UBER DIE VEREINFACHUNG EINES LANDAUSCHEN SATZES.

P. ERDÖS (Manchester) und P. TURAN (Budapest).

Es bedeute $l_a(k)$ die kleinste Zahl für welche $a^{l_a(k)} \equiv 1 \pmod{k}$, ε eine beliebige positive Zahl. Wir wollen beweisen, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(l_a(k))^{\varepsilon}} < C_1 \operatorname{loglog} a$$

ist, wo C_1 nur von ε abhängt.

Romanoff[1]) bewies zuerst, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\, l_a(k)}$ konvergiert.

Landau[2]) zeigte, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\, l_a(k)} < C_2 (\operatorname{loglog} a)^2$ gilt.

Unser Beweis ist kürzer und elementarer, als die vorherigen. Wir können offenbar voraussetzen, dass a beliebig gross ist. Zuerst beweisen wir

Hilfsatz 1.

Bei $n > e^{(\operatorname{loglog} a)^2}$ seien $\left[\frac{\log a\, (\log n)^{\frac{4}{\varepsilon}}}{\log 2}\right]$ Primzahlen $p_i \leqslant n$ gegeben. Wir behaupten, dass die Anzahl der Zahlen $\leqslant n$, die aus den gegebenen Primzahlen zusammengesetzt sind, kleiner als $\frac{n}{(\log n)^2}$ ist.

Wir teilen diese Zahlen in zwei Gruppen. In der ersten Gruppe sind die Zahlen mit mehr, als 10 $\operatorname{loglog} n$ verschiedenen Primfaktoren. Zur zweiten Gruppe hingegen gehören die Zahlen mit nicht mehr, als 10 $\operatorname{loglog} n$ verschiedenen Primfaktoren.

---

[1]) N. P. Romanoff. — Über einige Sätze der additiven Zahlentheorie, Math. Ann., 109 (1934) S. 668—678.

[2]) E. Landau.—Verschärfung eines Romanoffschen Satzes, Acta Arithmetica (1935) S. 43–62.

Für jede Zahl m der ersten Gruppe ϑ ist $d(m) > 2^{10 \log\log n}$ ($d(m)$ bedeutet die Anzahl der Teiler von m). Es ist $\sum_{\gamma=1}^{n} d(\gamma) < C_3\, n \log n$, also ist die Anzahl der Zahlen der ersten Gruppe kleiner als

$$\frac{C_3 n \log n}{2^{10 \log\log n}} < \frac{1}{2} \frac{n}{(\log n)^2}.$$

Die Anzahl der p^α mit $p^\alpha \leqslant n$ ist höchstens $\left[\frac{\log n}{\log 2}\right]$, also ist die Anzahl der $p_i^{\alpha_i}$ mit $p_i^{\alpha_i} \leqslant n$ höchstens $\frac{\log a .(\log n)^{\frac{4}{\varepsilon}+1}}{(\log 2)^2}$. Daher ist die Anzahl der Zahlen der zweiten Gruppe offenbar kleiner oder gleich

$$\left(1 + \frac{\log a^{\vartheta} (\log n)^{\frac{4}{\varepsilon}+1}}{(\log 2)^2}\right)^{10 \log\log n};$$

dies ist kleiner als

$$(\log a)^{10 \log\log n} \left(\frac{2 \log n}{(\log 2)^2}\right)^{10 \log\log n \left(\frac{4}{\varepsilon}+1\right)}$$

Nun ist $n \geqslant e^{(\log\log a)^2}$, also $\log\log a \leqslant (\log n)^{\frac{1}{2}}$,

so dass $(\log a)^{10 \log\log n} = e^{10 \log\log a \cdot \log\log r} \leqslant e^{10 (\log n)^{\frac{1}{2}} \log\log n} < \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2}$,

und $\left(\frac{2 \log n}{(\log 2)^2}\right)^{10 \log\log n} < \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\log^2 n}$.

Also ist die Anzahl der Zahlen der zweiten Gruppe ebenfalls kleiner als $\frac{1}{2} \frac{n}{\log^2 n}$, womit Hilfsatz 1. bewiesen ist.

Nun ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \left(l_a(k)\right)^{\varepsilon}} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \left(l_a(k)\right)^{\varepsilon}} + \sum_{k=}^{\infty} \frac{1}{k \left(l_a(k)\right)^{\varepsilon}} = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

wobei für $\sum_1$: $l_a(k) > (\log k)^{\frac{2}{\varepsilon}}$ und für $\sum_2$: $l_a(k) \leqslant (\log k)^{\frac{2}{\varepsilon}}$ gilt.

Ferner ist offenbar $\Sigma_1 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\left(l_a(k)\right)^{\varepsilon}} < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^2} < C_4$

$$\text{mit} \quad l_a(k) > (\log k)^{\frac{2}{\varepsilon}}.$$

Es ist ferner

$$\Sigma_2 = \sum_{k > e^{(\log\log a)^2}}^{\infty} \frac{1}{k\left(l_a(k)\right)^{\varepsilon}} + \sum_{k \leqslant e^{(\log\log a)^2}} \frac{1}{k\left(l_a(k)\right)^{\varepsilon}} = \Sigma_2' + \Sigma_2'',$$

wobei $l_a(k) \leqslant (\log k)^{\frac{2}{\varepsilon}}$ ist.

Es sei nun $n > e^{(\log\log a)^2}$. Wir bezeichnen durch $f(n)$ die Anzahl der Zahlen $k \leqslant n$, für welche $l_a(k) \leqslant (\log k)^{\frac{2}{\varepsilon}}$. Eine jede solche Zahl k ist als Faktor in einer der Zahlen $a-1, a^2-1, a^3-1, \ldots a^{\left[(\log n)^{\frac{2}{\varepsilon}}\right]}-1$ enthalten, also ist jede solche Zahl k aus den Primfaktoren dieser Zahlen zusammengesetzt. Da aber eine Zahl x höchstens $\left[\frac{\log x}{\log 2}\right]$ Primfaktoren hat, ist die Anzahl der in Betracht kommenden Primfaktoren höchstens $\left[\frac{\log a\ (\log n)^{\frac{4}{\varepsilon}}}{\log 2}\right]$, es ist also nach Hilfsatz (1) $f(n) < \frac{n}{(\log n)^2}$, und daraus folgt unmittelbar

$$\sum_2{}' < \sum_{k > e^{(\log\log a)^2}}^{\infty} \frac{1}{k} < \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{s(\log s)^2} < C_4,$$

$$\text{mit } l_a(k) \leqslant (\log k)^{\frac{2}{\varepsilon}}.$$

Nun müssen wir Σ_2'' abschätzen.

Die Zahlen mit $k \leqslant e^{(\log\log a)^2}$ und $l_a(k) \leqslant (\log k)^{\frac{2}{\varepsilon}}$ sind offenbar alle in einer der Zahlen $a-1, a^2-1, a^3-1, \ldots, a^{\left[(\log\log a)^{\frac{4}{\varepsilon}}\right]}-1$ als Faktoren enthalten. Diese k sind daher Teiler des Produktes

$\Pi = (a-1)(a^2-1)\ldots(a^{\left[(\log\log a)^{\frac{4}{\varepsilon}}\right]}-1)$. Nun ist $\Pi < a^{(\log\log a)^{\frac{8}{\varepsilon}}}$, also offenbar $\Sigma_2'' < \sum_{d/\pi} \frac{1}{d} < C_5 \log\log \left(a^{(\log\log a)^{\frac{8}{\varepsilon}}}\right) < C_6 \log\log a$, da nämlich $\sum_{d|x} \frac{1}{d} < C_7 \log\log x$.

Wir haben daher

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\left(l_a(k)\right)^{\varepsilon}} = 1 + \Sigma_1' + \Sigma_2' + \Sigma_2'' < 1 + 2C_4 + C_6 \log\log a < C_8 \log\log a.$$

Es ist leicht zu sehen, dass diese Ungleichung sich nicht verbessern lässt, da $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\left(l_a(k)\right)^{\varepsilon}} > \sum_{d|a-1} \frac{1}{d} > C_9 \log\log a$ für entsprechend gewähltes a.

Об упрощении одной теоремы Ландау.

П. Эрдеш (Манчестер) **и П. Туран** (Будапешт).

В настоящей работе дается упрощенное доказательство одной теоремы Ландау, помещенной в его работе, указанной в сноске 2-й настоящей статьи.

SUR QUELQUES MODES DE CONVERGENCE DES SUITES DE FONCTIONS, À UNE VARIABLE RÉELLE SUR $(-\infty, +\infty)$.

A. S. KOVANKO (Tomsk).

C'est la théorie des fonctions presque-périodiques classiques et generalisées qui nous pose le problème général de la convergence des suites de fonctions mésurables et sommables qui sont définis sur $(-\infty < x < +\infty)$.

Chapitre I.

LA CONVERGENCE DES SUITES DE FONCTIONS MESURABLES.

Introduisons les significations suivantes. Soit E un ensemble mesurable linéaire, défini sur $(-\infty < x < +\infty)$, et soit $E(a, b)$ sa partie situé sur $(a < x < b)$. Posons $\delta E(a, b) = \frac{Mes\, E(a, b)}{b-a}$: De plus posons: $\delta_s^e E = \underset{(-\infty < a < +\infty)}{\text{borne supérieure}}\ \delta E(a, a+e)$. Il est bien évident, que

$$\delta_s^e(E_1 + E_2) \leqslant \delta_s^e E_1 + \delta_s^e E_2,\ \ \delta_s^e E \leqslant \delta_s^{e'} E,\ \text{si}\ e > e'.$$

Définition I. Nous disons que la suite $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$ $(-\infty < x < +\infty)$ converge „S en mesure", si quelque soit $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$ et $e > 0$ il existe un nombre $N > 0$, assez grand et tel, que $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ pour toût $n > N$, et pour tout p et pour toute valeur de x, exclusion faite peut-être d'un ensemble $E_{n,\,n+p}$, $\delta_s^e E_{n,\,n+p} < \varepsilon$.

Théorème I. Soit $\{f_n(x)\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ une suite de fonctions qui converge „S en mesure", alors quelque soit $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$ et $e > 0$, il est possible d'extraire une suite $\{f_{n_k}(x)\}$ $(k = 1, 2, 3 \ldots)$, qui converge niformément vers une fonction $f(x)$ pour toute valeur de x, exclusion faite peut-être d'un ensemble E avec $\delta_s^e E < \varepsilon$. De plus il existe un nombre $N > 0$ tel, que $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ pour $n > N$ et pour toute valeur de x, exclusion faite peut-être d'un ensemble E_n, avec $\delta_s^e E_n < \varepsilon$.

Pour démontrer ce théorème nous avons à prouver le lemme suivant.

Lemme. Si $\delta E(a, a+d) < \varepsilon$ pour tout „a" alors $\delta E(a, a+d) < 2\varepsilon$ si $d' > d$.