Számelméleti megjegyzések, III.
Néhány additív számelméleti problémáról

Erdős Pál

E cikkben néhány újszerű additív számelméleti problémával fogunk foglalkozni, melyek talán nem érdektelenek, továbbá szokatlan, s nem teljesen megoldott kérdésekre vezetnek.

E cikkben $1 \leqq a_1 < a_2 < \ldots$ egész számok sorozatát fogja jelenteni, $A(x) = \sum_{a_i \leqq x} 1$ az a-k számát jelenti x-ig. Az $a_1 < a_2 < \ldots$ sorozatot A-val fogjuk jelölni. Az A sorozat sűrűsége akkor 0, ha $\lim_{x=\infty} A(x)/x = 0$, ha $\limsup A(x)/x = \alpha$, akkor α az A felső sűrűsége.

Könnyű belátni, hogy ha $A(x) \geqq \frac{x+1}{2}$, akkor az

$$a_i + a_j = a_r, \quad i < j < r$$

egyenlet megoldható, s a páratlan számok $\left(\text{vagy az } \left[\frac{x}{2}\right] \text{ és } x \text{ közötti számok}\right)$ példája mutatja, hogy ez az egyenlőtlenség általában nem javítható. Mármost bebizonyítjuk a következő tételt:

I. Tétel. *Ha A olyan, hogy egyik a sem bontható fel csupa különböző a összegére, akkor A sűrűsége* 0.

Feltételünk nyilván azt jelenti, hogy

$$a_k = a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_r}, \; i_1 < i_2 < \ldots < i_r \tag{1}$$

egyenletnek semmilyen k és r-re sincsen megoldása. Ebből viszont nyilván következik, hogy ha az

$$a_1 + \ldots + a_r + a_k, \quad r < k < \infty \; (r \text{ fix})$$

sorozatot A_r-el jelöljük, akkor az A_r, $0 \leqq r < \infty$ (A_0-al az A sorozatot jelöljük) sorozatok páronként idegenek. Nyilván tehát fennáll, hogy minden k-ra és x-re

(2) $$x \geqq \sum_{i=0}^{k} A_i(x) \geqq (k+1) A_k(x).$$

Továbbá

(3) $$A_k(x) = A\left(x - \sum_{i=1}^{k} a_i\right) - k \geqq A(x) - \sum_{i=1}^{k} a_i - k.$$

(2) és (3)-ból

(4) $$A(x) \leqq \frac{x}{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i + k.$$

Minthogy (4) minden k-ra fennáll, azonnal nyerjük, hogy $\lim\limits_{x=\infty} A(x)/x = 0$, s ezzel tételünk be van bizonyítva.

Ugyanúgy belátható, hogy A sűrűsége akkor is 0, ha az (1) egyenletnek csak véges sok megoldása van. Ha feltesszük, hogy $A(x) > cx$ minden $x > x_0$-ra, valószínűnek látszik, hogy az (1) egyenlet x-nél kisebb megoldásainak száma x-szel együtt nagyon gyorsan (talán exponenciálisan tart a végtelenhez.

Bizonyításunkból nyilván következik, hogy ha az (1) csak $2 \leqq j \leqq r$ esetén nem megoldható, akkor A felső sűrűsége $\leqq \frac{1}{r}$. $a_k = 1 + kr$, $0 \leqq k < \infty$ példája mutatja, hogy ez az állítás nem élesíthető.[1]

Most bebizonyítjuk, hogy az I. tétel bizonyos értelemben nem javít ható. Ki fogjuk ugyanis mutatni, hogy ha $f(x) \to \infty$ tetszőlegesen lassan, akkor van olyan A sorozat, melyre az (1) nem oldható meg és végtelen sok x-re

$$A(x) > \frac{x}{f(x)}.$$

Legyen $n_1 < n_2 < \ldots$ elegendő gyorsan növekedő sorozat (a növekedés rendjének meghatározása később fog megtörténni, csak legyen $n_{k+1} > n_k^2$). Legyen továbbá $a_1 = 1$ és tegyük fel, hogy az n_k-nál nem nagyobb a_k-kat már meghatároztuk. Az (n_k, n_{k+1}) intervallumba eső a-k legyenek n_k^2 azon többszörösei, melyek a $(2/3\, n_{k+1}, n_{k+1})$ intervallumba esnek. Nyilván

$$A(n_{k+1}) > \frac{n_{k+1}}{3n_k^2} > \frac{n_{k+1}}{f(n_{k+1})}$$

[1] Lásd az Amer. Math. Monthly 4268. számú feladatát.

ha az n_k sorozat eléggé gyorsan tart a végtelenhez. $\sum\limits_{a_i \leqq n_k}' a_r < n_k^2 < n_{k+1}$ miatt könnyű belátni, hogy az (1) egyenletnek nincsen megoldása, ezzel állításunk igazolva van.

Más szempontból viszont az I. tétel élesíthető. Fennáll ugyanis a

II. Tétel. *Legyen A oly sorozat, melyre az* (1) *egyenletnek nincsen megoldása. Akkor* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i}$ *konvergens, sőt mindig*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} < 103.$$

Az I. tétel a II. tételből nyilván következik, ti. mint ismeretes, ha $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} < \infty$, $a_1 < a_2 < \ldots$, akkor $n/a_n \to 0$, azaz $A(x)/x \to 0$. Könnyű belátni továbbá, hogy ha $f(n) \to \infty$ tetszőlegesen lassan, akkor van oly A sorozat, melyre $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a_n)/a_n = \infty$ és (1)-nek nincsen megoldása (lásd az I. tétel nem javíthatóságát mutató példát).

A II. tétel bizonyításához az $1 \leqq j < \infty$ számokat két osztályba soroljuk. Az első osztályban vannak azon j-k, melyekre $A(2^{j+1}) - A(2^j) \leqq \frac{2^j}{j^2}$ Nyilván

$$\sum{}' \frac{1}{a_i} < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < 2, \tag{5}$$

ahol Σ'-ben az összegezés azon a-kra van kiterjesztve, melyekre $2^j < a_i \leqq 2^{j+1}$ és j végigfut az első osztály számain.

Legyenek $j_1 < j_2 < \ldots$ a második osztályba eső j-k, melyekre tehát

$$A(2^{j_r+1}) - A(2^{j_r}) > \frac{2^{j_r}}{j_r^2} \tag{6}$$

Egyszerűség kedvéért legyen $j_{\left[\frac{r}{2}\right]} = t$. (6) miatt, minthogy $j_k \geqq k$

$$A(2^{t+1}) - A(2^t) > \frac{2^{j_{\left[\frac{r}{2}\right]}}}{j^2_{\left[\frac{r}{2}\right]}} \geqq \frac{2^{\left[\frac{r}{2}\right]}}{r^2} > r^2 \tag{7}$$

ha $r > 100$.

Legyenek $a_1 < a_2 < \ldots < a_{r^2}$ az első r^2 drb a_i. (7) miatt $a_{r^2} < 2^{t+1}$.

Alkalmazzuk mármost (4)-et, s legyen $x=2^{j_r+1}$, $k=r^2$. Így kapjuk, hogy

$$(8)\qquad A(2^{j_r+1})\leqq\frac{2^{j_r+1}}{r^2+1}+\sum_{i=1}^{r^2}a_i+r^2<\frac{2^{j_r+1}}{r^2}+(r^2+1)2^{t+1}.$$

$j_r-j_{\left[\frac{r}{2}\right]}$ azonban nyilván nem kisebb, mint $\left[\frac{r}{2}\right]$, tehát ha $r>100$, akkor $(r^2+1)2^{t+1}<\frac{2^{j_r+1}}{r^2}\left(\text{u. i. t.}=j_{\left[\frac{r}{2}\right]}\leqq j_r-\left[\frac{r}{2}\right]\right)$. Tehát (8)-ból, ha $r>100$

$$(9)\qquad A(2^{j_r+1})<\frac{2^{j_r+2}}{r^2}.$$

(9)-ből nyilván, ha $r>100$

$$(10)\qquad \sum\nolimits_r\frac{1}{a_i}<\frac{4}{r^2}$$

ahol $\sum_r$-ben $2^{j_r}<a_i\leqq 2^{j_r+1}$. (10)-ből nyilván

$$(11)\qquad \sum_{r=101}^{\infty}\sum\nolimits_r\frac{1}{a_i}<\sum_{r=101}^{\infty}\frac{4}{r^2}<1.$$

Végül nyilván

$$(12)\qquad \sum_{2^t<a_i\leqq 2^{t+1}}\frac{1}{a_i}<1.$$

(5), (11) és (12)-ből végül nyerjük, hogy

$$\sum\frac{1}{a_i}<103.$$

103-at könnyű lenne lényegesen javítani, de a pontos konstanst nem tudom meghatározni.

III. Tétel. *Ha az A sorozat olyan, hogy* (1)-*nek nincsen megoldása akkor*

$$(13)\qquad \liminf_{x=\infty} A(x)/x^{(\sqrt{5}-1)/2}<\infty.$$

Tételünk mutatja, hogy ha az I. tétel minden x-re nem is javítható, de végtelen sok x-re sokkal élesebb egyenlőtlenség is fennáll.

Ha (13) — nem lenne igaz, akkor nyilván

$$a_k=o(k^{(1+\sqrt{5})/2})\quad\text{azaz}\quad \sum_{i=1}^{k}a_i=o(k^{(3+\sqrt{5})/2}).$$

Tehát, ha $k=10[x^{(3-\sqrt{5})/2}]$, akkor

$$\sum_{i=1}^{k} a_i < \frac{x}{2} \tag{14}$$

minden elegendő nagy x-re. Továbbá, ha (13) nem igaz, akkor nyilván van tetszőlegesen nagy x, melyre

$$A(x)-A\left(\frac{x}{2}\right) > x^{(\sqrt{5}-1)/2}. \tag{15}$$

Legyen mármost x oly eléggé nagy szám, mely (14)-et és (15)-öt kielégíti. Nyilván (2), (14) és (15) miatt

$$x \geqq \sum_{i=0}^{k} A_i(x) = \sum_{i=0}^{k}\left[A\left(x-\sum_{j=1}^{i} a_j\right)-i\right] \geqq k\left[A\left(x-\sum_{i=1}^{k} a_i\right)-k\right] \geqq$$

$$\geqq k\left[A(x)-A\left(\frac{x}{2}\right)\right]-k^2 > 10\,[x^{(3-\sqrt{5})/2}]\,x^{(\sqrt{5}-1)/2}-100\,x^{3-\sqrt{5}} > x,$$

ami lehetetlen, s ezzel tételünk be van bizonyítva.

Most konstruálok oly A sorozatot, melyre $A(x) > cx^{2/7}$ minden x-re és az (1) egyenletnek nincsen megoldása.

Sorozatunkat rekurzióval konstruáljuk, legyen $a_1=1$ és tegyük fel, hogy $a_1, a_2, \dots a_{k_i}$-ig már megkonstruáltuk az A sorozatot úgy, hogy az (1) egyenletnek ne legyen megoldása. Legyen $B_{i+1}=2\sum_{r=1}^{k_i} a_r$ és

$$a_{k_i+l}=1+lB_{i+1},\quad 1 \leqq l \leqq \left[\frac{B_{i+1}^2}{10}\right], \quad \text{azaz} \quad a_{k_i+l} \leqq \frac{B_{i+1}^3}{10}+1. \tag{16}$$

Könnyű belátni, hogy az (1) egyenletnek most sincsen megoldása. Legyen ugyanis (Σ_2-ben $j_s \leqq k_i$)

$$a_{k_i+l}=\sum_{s=1}^{t_1} a_{k_i+r_s}+\sum_{s=1}^{t_2} a_{j_s}=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2. \tag{17}$$

Először kimutatjuk, hogy $t_1 \leqq \left[\frac{B_{i+1}}{2}\right]$. Ha ugyanis ez nem lenne igaz, akkor (16) miatt

$$\sum\nolimits_1 \geqq \sum_{l=1}^{t_1}(1+lB_{i+1}) > \binom{t_1}{2}B_{i+1} > \frac{B_{i+1}^3}{4} > a_{k_i+l},$$

ami (17)-nek ellentmond. $t_1 \leqq \left[\frac{B_{i+1}}{2}\right]$ és (16) miatt $\Sigma_1 \equiv t_1 (\mathrm{mod}\ B_{i+1})$, azaz Σ_1 legkisebb pozitív maradéka mod (B_{i+1}) nem nagyobb, mint $[\frac{1}{2} B_{i+1}]$. (16) miatt $a_{k_i+l} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ B_{i+1},)$ (17) miatt tehát $\Sigma_2 > [\frac{1}{2} B_{i+1}]$. Ez azonban $\Sigma_2 \leqq \sum_{j=1}^{k_1} a_j = \frac{1}{2} B_{i+1}$ miatt lehetetlen. Ezzel ellentmondásra jutottunk, s bebizonyítottuk, hogy (1)-nek nincs megoldása. Legyen ármost

(18)
$$a_{k_l+\left[\frac{B_{i+1}^2}{10}\right]} = a_{k_{l+1}},\ B_{i+1} = 2\sum_{r=1}^{k_{l+1}} a_r,\ a_{k_{l+1}+l} = 1 + lB_{i+1},\ 1 \leqq l \leqq \left[\frac{B_{i+1}^2}{10}\right]$$

és konstrukciónkat tetszőlegesen folytathatjuk, s az így nyert sorozatban (1)-nek nincsen megoldása.

Hátra van még $A(x)$-re alsó becslést találni, ezt csak vázolni fogjuk. (16)-ból és (18)-ból $B_{i+2} < B_{i+1}^5$. Tehát (16) és (18)-ból

$$A(B_{i+2}) > \frac{B_{i+1}^2}{10} > \left(\tfrac{1}{10} B_{i+2}\right)^{2/5}.$$

Továbbá, ha $1 \leqq T \leqq [\frac{1}{10} B_{i+1}]$, akkor ((16) és (18)-ból)

(19)
$$A(TB_{i+2}) \geqq \left[\tfrac{1}{10} B_{i+1}^2\right] + T > \left(\frac{B_{i+2}}{10}\right)^{2/5} + T$$

(19)-ből egyszerű meggondolással beláthatjuk, hogy ha T-t B_{i+1}^2 nagyságrendűnek választjuk, akkor lesz $A(x)$ nagyságrendje x-hez képest a legkisebb. (16) és (18)-ból $B_{i+2} = (1+o(1))\frac{B_{i+1}^5}{200}$ ezért egyszerű számítással nyerjük (19)-ből, hogy minden x-re $A(x) > cx^{2/7}$ s ezzel állításunk igazolva van.

Nem lenne érdektelen eldönteni, vajon a III. tételben szereplő $(\sqrt{5}-1)/2$, s a példánkban szereplő $2/7$ javítható-e? Pontosabban meghatározandó azon α értékek felső határa β, melyekre van oly A sorozat, hogy (1)-nek nincs megoldása és minden x-re $A(x) > cx^{\alpha}$. Tudjuk, hogy $2/7 \leqq \beta \leqq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Felvethetjük továbbá a következő problémát: Legyen $b_1 < b_2 < \ldots$ egész számok végtelen sorozata, tegyük fel, hogy minden k-ra melyre $b_1 + b_2 + \ldots + b_k \leqq x$, fennáll $kB(x) < c_1 x$ $(B(x) = \sum_{b_i \leqq x} 1)$. Létezik-e akkor egy oly A sorozat, melyre $a_r < c_2 b_r$ minden r-re és melyre (1)-nek nincs megoldása? Ha kérdésünkre a válasz igenlő, úgy ez azt jelentené, hogy (2) lényegileg az egyetlen feltétel, melyet egy A sorozatnak ki kell elégíteni, ha (1)-nek nincs megoldása. Különben az igenlő válaszból következne, hogy $\beta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, úgy gondolnám azonban, hogy a válasz nem lesz igenlő.

Módosítsuk most az előbb definiált A sorozatot a következő módon: $\left(B_{i+1}=\sum_{r=1}^{k_i} a_r \text{ most is igaz}\right)$

$$(16') \qquad a_{k_i+l}=1+lB_{i+1}+B_{i+1}^2\,,\ 1\leq l<B_{i+1}^{1/2},\ a_{k_{i+1}}=a_{k_i+[B_{i+1}^{1/2}]}.$$

Könnyű belátni, hogy $A(x)>cx^{\alpha}$ (α értékét könnyű lenne meghatározni) s az

$$(1') \qquad \sum_{i=1}^{s_1} a_{r_i}=\sum_{i=1}^{s_2} a_{l_j},\ r_1<r_2<\ldots<r_{s_1};\ l_1<l_2<\ldots l_{s_2};\quad s_1\neq s_2$$

egyenletnek s_1 és s_2 semmilyen választása mellett sincsen megoldása. Ezen állítás bizonyítását csak vázolni fogjuk. Tegyük fel, hogy (1')-nek mégis lenne megoldása, s tekintsük azt a megoldást, melyre s_1+s_2 értéke minimális. Tegyük fel, hogy ezen egyenletben az előforduló a-k indexei mind nem nagyobbak, mint k_{i+1}, de k_i-nál nagyobb indexű a-k még előfordulnak (1') ezen megoldásában. Legyen u ily a (1') bal oldalán Σ_1 összeggel, s v ily a (1') jobb oldalán Σ_2 összeggel, azaz ha $\sum_{i=1}^{s_1} a_{r_i}=\sum_{i=2}^{s_2} a_{l_j}=$ $=L$, akkor $L=\Sigma_1+\xi_1=\Sigma_2+\xi_2$, ahol

$$(20) \qquad \max(\xi_1,\xi_2)\leq \sum_{r=1}^{k_i} a_r=\frac{B_{i+1}}{2}.$$

Ha $u\neq v$, akkor (16')-ből egyszerű számítással adódik $|\Sigma_1-\Sigma_2|\geq B_{i+1}$, ami (20) miatt lehetetlen. Ha $u=v$, akkor $\Sigma_1=\Sigma_2\equiv u \pmod{B_{i+1}}$ miatt nyerjük, hogy ha $\Sigma_1\neq\Sigma_2$, akkor $|\Sigma_1-\Sigma_2|\geq B_{i+1}$, ami megint ellentmond (20)-nak. Ha végül $\Sigma_1=\Sigma_2$, akkor ha (1')-ből elhagyjuk mindkét oldalon az $u=v$ k_i-nél nagyobb indexű a-kat, (1') egy új megoldásához jutunk, mely s_1+s_2 minimum tulajdonságának ellentmond.

Ezzel szemben viszont fennáll a

IV. Tétel. *Legyen A oly sorozat, hogy az (1') egyenletnek nincs megoldása, akkor minden x-re*

$$A(x)<Cx^{5/6},$$

ha C elegendő nagy abszolút konstans.

A IV. tétel mutatja, hogy az (1') egyenletek jóval élesebb becslést adnak, mint az (1) egyenletek.

A IV. tétel bizonyításához szükségünk lesz a Linnik-féle nagy szita Rényitől való élesítésére.

Lemma. Legyen $a_1 < a_2 < \ldots < a_Z \leqq N$ egész számok sorozata, $0 < f(p) < 1$, $Q(p) < 1$.

$$\min_{p<\frac{1}{2}N^{1/3}} f(p)/p = \tau, \quad \max_{p<\frac{1}{2}N^{1/3}} Q(p) = Q,$$

$Z(p, h)\left(p < \dfrac{1}{2}N^{1/3}\right)$ jelentse azon $a-k$ számát, melyekre

$$a_i \equiv h \pmod p.$$

Fennáll

$$\left|Z(p, h) - \frac{Z}{p}\right| < \frac{Z}{pQ(p)}$$

minden p és h-ra, ha $9NQ^2/z\tau$ p prímszámtól eltekintünk és ha a többi p prímszámnál esetleg $f(p)$ h értéktől eltekintünk.

Ez a Linnik-féle nagy szita Rényi-féle élesítése.[2]) Alkalmazzuk e lemmát $f(p) = p/3$, $Q(p) = 2$, $Z = CN^{5/6}$ esetén. Ez esetben $\tau = \frac{1}{3}$, $Q = 2$ és lemmánkból nyerjük, hogy van legalább egy olyan $\frac{1}{2}N^{1/3} > p > \frac{1}{4}N^{1/3}$ primszám, melyre

$$Z(p, h) > \frac{Z}{2p} \tag{21}$$

legalább $\frac{2}{3}p$ maradékosztályra. Jelöljük $h_1, h_2, \ldots h_r$, $r > \frac{2}{3}p$ azon maradékosztályokat, melyekre (21) fennáll. Egyszerű meggondolás mutatja, hogy a $h_1 + h_2 \equiv 0 \pmod p$ kongruenciának legalább $\left[\dfrac{p}{6}\right]$ megoldása van, s ezért (21) miatt az

$$a_i + a_j \equiv 0 \pmod p, \quad 1 \leqq i, j \leqq Z$$

kongruenciának legalább

$$\left(\frac{Z}{2p}\right)^2 \frac{p}{6} = \frac{Z^2}{24p} > \frac{C^2}{12} N^{4/3} \tag{22}$$

megoldása van. Az $a_i + a_j$ összegek mind kisebbek, mint $2N$, ezért legfeljebb

$$\frac{2N}{p} < 8N^{2/3} \tag{23}$$

[2] A. Rényi, On the large sieve of U. V. Linnik, Compositio Math. 8 (1950) 68—75.

$a_i+a_j=m\equiv 0 \pmod p$ alakú szám létezhet. (22) és (23) miatt van két olyan különböző $m_1\equiv 0 \pmod p$ és $m_2\equiv 0 \pmod p$ szám, melyekre az

$$a_i+a_j=m_1=pn_1, \quad a_r+a_s=m_2=pn_2 \tag{24}$$

egyenletek mindkettőjének legalább $\frac{C^2}{100}N^{2/3}$ megoldása van. Ha C elegendő nagy, akkor

$$\frac{C^2}{100}N^{2/3}>8N^{2/3}>\max(n_1, n_2)$$

miatt a (24) egyenletek megoldásaiból az $n_1pn_2=n_2pn_1$ számot elő tudjuk állítani, mint a (24) egyenletek megoldásaiból alkotott n_1, illetve n_2 tagú összegeket. Azaz az (1′) egyenleteknek van megoldásuk, s ezzel tételünket igazoltuk.

Valószínűnek látszik, hogy az $^5/_6$ kitevő javítható, s hogy a nagy szitára a bizonyításban nem lesz szükség, de eddig ezeknek bizonyításai nem sikerültek.

Teljesen más problémára jutunk, ha (1′)-ben nem tesszük fel, hogy $r_1\neq r_2$, azaz ha azt kérdezzük: maximálisan hány szám adható meg x-ig $a_1<a_2<\ldots<a_k\leqq x$, úgy, hogy a $\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i a_i$, $\varepsilon_i=0$ vagy 1, értékek mind különbözők. Ha k maximális értékét $C(x)$-el jelöljük, Moser és én[3]) bebizonyítottuk, hogy minden ε-hoz van olyan x_0, hogy $x>x_0$-ra

$$C(x)<\frac{\log x}{\log 2}+(1+\varepsilon)\frac{\log\log x}{\log 2}.$$

Régi problémám: igaz-e, hogy $C(2^k)=k+1$? Nemrég Guy és Conway[4]) találtak olyan k-t, melyre $C(2^k)>k+1$. Lehetséges, hogy minden x-re

$$C(x)=\frac{\log x}{\log 2}+O(1)$$

Természetes további kérdések a fenti problémák multiplikatív analogonjai: Vizsgálandók azon A sorozatok, melyekre az

$$\prod_{j=1}^{s_1} a_{i_j}=\prod_{j=1}^{s_2} a_{l_j}, i_1<\ldots<i_{s_1};\ l_1<\ldots l_{s_2},\ s_1\neq s_2 \tag{25}$$

[3] P. Erdős, Problems and results in additive number theory, Colloque sur la théorie des nombres Bruxelles 1955, 127–137 (lásd 136–137 oldalakat).

[4] Conway és Guy eredménye, melyet egymástól függetlenül találtak, még nincsen publikálva.

egyenleteknek semmilyen $s_1 \neq s_2$ esetén sincsen megoldása. Könnyű azonban belátni, hogy ha az A sorozat elemei a $2(2k+1)$ alakú számok, oly $\frac{1}{4}$ sűrűségű sorozatot nyerünk, melyre (25)-nek nincsen megoldása. Könnyű belátni azonban, hogy ha (25) nem oldható meg, akkor az A sorozat sűrűsége egynél kisebb (sőt ez már abból is következik, hogy az $a_1 \cdot a_k = a_l$ egyenletnek nincs megoldása). Nem tudom azonban eldönteni, van-e minden $\varepsilon > 0$-hoz olyan A sorozat, melynek sűrűsége nagyobb, mint $1-\varepsilon$ és melynél a (25) egyenletnek nincsen megoldása?

ЗАМЕЧАНИЯ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ. III

П. Эрдёш

Пусть $a_1 < a_2 < \dots$, $A(X) = \sum_{a_i \leqq x} 1$ бесконечная последовательность, для которой равенство

$$a_k = a_{i_1} + \dots + a_{i_r}, \; i_1 < \dots < i_r < k_2 \tag{1}$$

не имеет решения. Автор доказывает, что

$$\frac{A(X)}{X} \to 0 \quad \text{и, что} \quad \sum \frac{1}{a_i} < 103.$$

Далее, он показывает, что соотношение $A(X) = o(X)$ не может быть улучшено, однако всегда существует такая последовательность $X_i \to \infty$, для которой

$$A(X_i) < CX_i^{(\sqrt{5}-1)/2} \tag{2}$$

С другой стороны, существует такая последовательность A, для которой (1) неразрешимо, всё же $A(X) > cX^{2/7}$ для любого X. Возможно, что соотношение (2) может быть улучшено, однако показатель, наверняка, не может быть меньше чем $^2/_7$.

Рассмотрим теперь те последовательности A, для которых уравнение

$$a_{r_1} + a_{r_2} + \dots + a_{r_{s_1}} = a_{l_1} + a_{l_2} + \dots + a_{l_{s_2}}, \quad \begin{matrix} r_1 < \dots < r_{s_1}; \\ l_1 < \dots < l_{s_2}; \\ s_1 \neq s_2 \end{matrix} \tag{1'}$$

не разрешимо для любого выбора $s_1 \neq s_2$. Тогда существует такая последовательность для которой $A(X) > cX^{\alpha}$ для любого X если только α достаточно малое число. С другой стороны автор показывает, используя усиление Реньи большого решета Линника, что если A такое, что (1′) не имеет решения, тогда $A(X) < CX^{5/6}$ для любого X, если только C достаточно большая абсолютная константа. Может быть, что показатель $^5/_6$ можно улучшить, однако автору сделать этого не удалось.

REMARKS ON NUMBER THEORY III.

P. ERDŐS

Let $a_1 < a_2 < \dots, A(x) = \sum_{a_i \leq x} 1$ be an infinite sequence for which

(1) $$a_k = a_{i_1} + \dots + a_{i_r},\ i_1 < \dots < i_r < k$$

is not solvable. I prove that $A(x)/x \to 0$ and that

$$\sum \frac{1}{a_i} < 103.$$

Further I show that $A(x) = o(x)$ is best possible, but there always exists a sequence $x_i \to \infty$ for which

(2) $$A(x_i) < C x_i^{(\sqrt{5}-1)/2}.$$

On the other hand, there exists a sequence A for which (1) has no solutions, but $A(x) > cx^{2/7}$ for every x. Perhaps (2) can be improved, but the exponent can certainly not be made smaller than 2/7.

Consider now the sequences A for which the equation

(1') $$a_{r_1} + \dots + a_{r_{s_1}} = a_{l_1} + \dots + a_{l_{s_2}},\ r_1 < \dots < r_{s_1};\ l_1 < \dots l_{s_2};\ s_1 \neq s_2$$

is not solvable for every choice of $s_1 \neq s_2$. There exists such a sequence with $A(x) > cx^{\alpha}$ for every x if α is sufficiently small. On the other hand, I show by using Rényi's strengthening of the large sieve of Linnik that if A is such that (1') has no solutions, then $A(x) < cx^{5/6}$ for every x if c is a sufficiently large absolute constant. Perhaps the exponent 5/6 can be improved, but I have not succeeded in doing this.