**1. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. február 10.**

A feladatsorok teamsen, és a `https://bekem.web.elte.hu/`-ról is letölthetőek lesznek. Két zh lesz, az előadás időpontjában a tavaszi szünet előtti, és a szorgalmi időszak utolsó hetében. Jegyszerzés a két zh pontszámából, és a beadandó házi feladatok átlagából, illetve a szerzett pluszpontokból lesz. Minden héten 1-2 írásban beadandó házi feladat lesz, továbbá minden a gyakorlaton helyesen elmondott feladatért egy (maximum 10) pont szerezhető, ezek legfeljebb egy jegyet javítanak, így $\frac{Zh_1+Zh_2+\overline{H}}{3}+\frac{P}{10}$ adja meg a jegyet, ahol $\overline{H}$ a beadott házik átlaga, $P$ pedig a szerzett pluszpontok száma.

# Komplex számok ismétlés

**1.** Határozzuk meg az $n$. egységgyökök szorzatát, összegét, és négyzetösszegét!

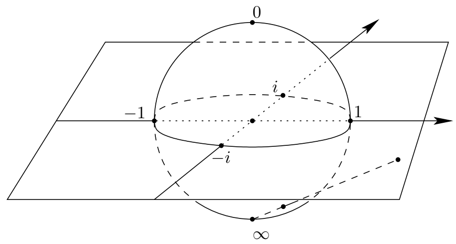
**2.** Hozzuk zárt alakra az
(a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots+\binom{n}{3\lfloor n/3\rfloor}$ (ötlet: harmadik egységgyökök)
(b) $1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cdots+\cos n\varphi$ kifejezéseket!

**3.** Ábrázoljuk azoknak a $z$ komplex számoknak a halmazát, amelyekre
(a) $0<\arg z\leq\pi$; (b) $\arg(z+1)=\arg(2z-1)$; (c) $\mathrm{Re}(z^2)\geq 4$; (d) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=1$; (e) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=2$.

**4.** Legyen $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$, ekkor $\varepsilon^5=1$ vagyis $\varepsilon$ egy ötödik egységgyök. Legyen $z=\varepsilon+\varepsilon^4$ és $w=\varepsilon^2+\varepsilon^3$.
(a) Számold ki $(z+w)$-t és $zw$-t.
(b) A fentieket felhasználva adj meg eljárást szabályos 5-szög szerkesztésére.

**5.** Feleltessük meg az egységnyi sugarú gömb pontjait a $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ halmaznak sztereografikus projekcióval (inverzióval) az ábra szerint. A gömb milyen transzformációit írják le a következő függvények?

$$z\mapsto -z;\quad z\mapsto\overline{z};\quad z\mapsto iz;\quad z\mapsto\frac{1}{z};\quad z\mapsto\frac{-1}{\overline{z}}$$




# Komplex differenciálhatóság

**6.** A komplex sík mely pontjaiban diferenciálhatóak az
(a) $Re(z)-Im(z)+i|z|^2$
(b) $Im(z)\cdot(Re(z))^2\cdot i+\bar{z}$
(c) $|z|^2-(2+i)\bar{z}$
függvények?

**7.** Ellenőrizzük, hogy teljesülnek-e a Cauchy-Riemann egyenletek a következő függvénypárokra:
(a) $(x^2+y^2,2xy)$;
(b) $(x^2-y^2,2xy)$;
(c) $(e^x\cos y,e^x\sin y)$.

**8.** Keressünk olyan $v(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvényt (ha van), amelyre az
(a) $f(x+iy)=e^y\sin x+iv(x,y)$
(b) $f(x+iy)=3x+2y+iv(x,y)$
függvény mindenütt differenciálható.

**9.** Van-e $\mathbb{C}$-n folytonos négyzetgyök függvény, azaz van-e olyan folytonos $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ függvény, melyre $g^2(z)\equiv z$? Van-e e $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$-n folytonos négyzetgyök függvény, azaz van-e olyan folytonos $g:\mathbb{C}\setminus[0,\infty)\to\mathbb{C}$ függvény, melyre $g^2(z)\equiv z$?