

Komplex vonalintegrálok

1. Mi a komplex tangens függvény értékészlete?

2.

$$\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} dz = ?; \quad \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz = ?; \quad \int_{|z|=1} \bar{z} dz = ?; \quad \int_{[1,i]} z^2 dz = ?$$

3. Legyen γ^+ az egységkör felső íve, mely az 1-ből a -1 -be megy, γ^- pedig az alsó, ugyanezen kezdő-, és végpontokkal. Igaz-e, hogy

$$\int_{\gamma^+} \bar{z} dz = \int_{\gamma^-} \bar{z} dz$$

4. Legyen a komplex szám. Alakítsuk át egy holomorfnak függvény komplex vonalintegráljává az $\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |z-a|^2 |dz|$ integrált, majd számítsuk ki.

5. Van-e primitív függvényük?

$$(a) f(z) = \frac{1}{z} \quad (D(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad (b) f(z) = \frac{1}{z} \quad (D(f) = \operatorname{Re} z > 0) \quad (c) \frac{\sin z}{z^n}$$

6. Legyen Γ az $\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2$ parabola 0 és $1+i$ közötti íve. Számítsuk ki a következő integrálokat:

$$\int_{\Gamma} z^2 dz; \quad \int_{\Gamma} z^2 \bar{z} dz;$$

Melyik integrál esetében alkalmazható a Newton-Leibniz szabály?

7. Számítsuk ki az alábbi vonalintegrálokat:

$$\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz \quad \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4} dz \quad \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |z-a|^4 |dz|$$

8. * Az ábrán látható kígyó mentén sétálunk, és figyeljük a $\cos z$ irányának változását. Mekkora szöggel fordul el a $\cos z$ iránya, miközben elsétálunk a 0-tól a $(-\pi)$ -ig?

