4. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. március 3.

4.1. Legyen r is pozitív valós szám. (Útmutatás:az integrálok értékei r-től függhetnek!)

$$\int\limits_{|z|=r} \frac{e^z}{z+1}\mathrm{d}z = ?; \qquad \int\limits_{|z|=r} \frac{e^z}{(z+2)^2}\mathrm{d}z = ?$$

4.2.

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2-4}\mathrm{d}z = ? \qquad \int_{|z|=2} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n \mathrm{d}z = ? \quad (n \in \mathbb{Z});$$

4.3. Van-e olyan $f : B(0,\epsilon) \to \mathbb{C}$ holomorf, melyre elég nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén

(a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1}$ (b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n\frac{n}{n+1}$ (c) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n}{n+2}$ (d)* $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}$

4.4. Igazoljuk, hogy ha az f egészfüggvény a valós és a képzetes tengelyen is csak valós értékeket vesz fel, akkor páros függvény. (1. módszer: alkalmazzuk az unicitástételt az $f(z)$, $\overline{f(\bar{z})}$ és $\overline{f(-\bar{z})}$ függvényekre. 2. módszer: fejtsük hatványsorba a függvényt a 0 körül, és vizsgáljuk az együtthatókat.)

4.5. Van-e olyan nem konstans egészfüggvény, mely

1. $f(z) \le \sqrt{|z|}$ teljesül minden $|z| > 2$ esetén?
2. a síkot az egységkör külsejébe viszi.

Házi feladatok

4.6.

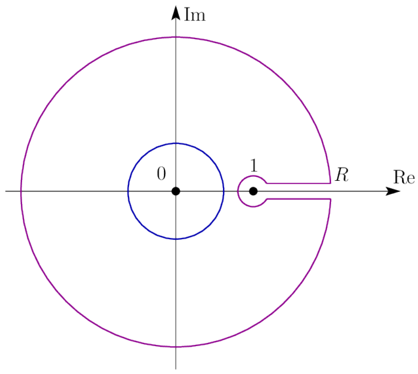
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3} \cos z\mathrm{d}z = ? \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3} \frac{\cos z}{z-\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}z = ? \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3} \frac{\cos z}{z^2-1}\mathrm{d}z = ? \qquad \int_{|z|=3} \frac{e^z}{(z-2)^3}\mathrm{d}z = ?$$

4.7. Az $f(z)$ egészfüggvényre $|f(1/n)| = 1/n^2$, ha $n = 1,2,\ldots$, és $|f(i)| = 2$. Mekkora lehet $|f(-i)|$? (Vizsgáld a $g(z) = f(z)\overline{f(\overline{z})}$ függvényt.)

4.8. * *„Az $a_0, a_1, \ldots,$ sorozatban $a_0 = -1$, és tetszőleges $n \ge 1$-re $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+1} = 0$. Igazoljuk, hogy $n \ge 1$ esetén $a_n > 0$.”* (Olimpiai feladatjavaslat, 2006; rövid teljes indukciós megoldása is van.)

Oldd meg a feladatot komplex függvénytani eszközökkel.

1. Számítsd ki az $f(z) = \sum_{n=0}^{n} a_n z^n$ generátorfüggvényt.
2. Írd fel az együtthatóformulát egy 0 körüli körön.
3. Cseréld ki az integrációs utat az ábrán látható "kulcslyukgörbére".



4. Mutasd meg, hogy $a_n = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^n(\pi^2 + \log^2(x-1))}$, ami persze pozitív.