5. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. március 10.

5.1. Számítsuk ki az

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{\sin z} \mathrm{d}z$$

integrált.

5.2. Van-e olyan nem konstans egészfüggvény, mely

1. $f(z) \leq \sqrt{|z|}$ teljesül minden $|z| > 2$ esetén?
2. a síkot az egységkör külsejébe viszi.

5.3. A Liouville-tétel segítségével igazoljuk, hogy ha f kétszeresen periodikus egész függvény (vagyis $f(z+a) = f(z)$, $f(z+b) = f(z)$, és az a, b periódusok nem egy közös c periódus valós számszorosai), akkor f konstans.

5.4. A maximum-elv felhasználásával bizonyítsuk be, hogy ha egy függvény holomorf és nem konstans egy nyílt halmazon, akkor a valós és a képzetes részének nincs lokális szélsőértéke.

5.5. Fejtsük Laurent-sorba az

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 4z + 3}$$

függvényt az 0 körül.

5.6. Írjuk fel a $\operatorname{ctg} z$ függvény 0-körüli $\dot{B}(0, \frac{\pi}{2})$-ön konvergens Laurent sorának első két nemnulla tagját.

Házi feladatok

5.7. Számítsuk ki az

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{e^z - 1}$$

integrált!

5.8. Számoljuk ki a $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z+1)}$ függvény 0 körüli Laurent sorait.

5.9. Írjuk fel az $\frac{1}{\sin(z)}$ függvény 0-körüli $\dot{B}(0, \pi)$-ön konvergens Laurent sorának első két nemnulla tagját.

5.10. * Az f függvény holomorf az $|z| < 1 + \varepsilon$ körlemezen. Legyen $A = \max\limits_{0 \leq t \leq \pi} |f(e^{it})|$ és $B = \max\limits_{\pi \leq t \leq 2\pi} |f(e^{it})|$. Bizonyítsuk be, hogy $|f(0)| \leq \sqrt{AB}$. (Írjuk fel a maximum-elvet egy alkalmas függvényre.)