6. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. március 17.

6.1. Írjuk fel a $\operatorname{ctg} z$ függvény 0-körüli $\dot{B}(0,\pi)$-ön konvergens Laurent sorának első két nem nulla tagját.

6.2. Adjuk meg az alábbi függvények összes izolált szingularitását, nevezzük meg a szingularitások típusait

$$\frac{1}{z} \qquad \frac{1}{z^2} \qquad e^{1/z} \qquad \frac{1}{e^{1/z}} \qquad \frac{1}{\sin z} \qquad \sin\frac{1}{z} \qquad \frac{1}{\sin(1/z)} \qquad \frac{1}{z^2-3z+2} \qquad \frac{z}{\sin z}$$

6.3. Van-e olyan $f : B(0,\epsilon) \to \mathbb{C}$ holomorf, melyre elég nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\text{(a)}\ f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^{\sqrt{2}}} \qquad \text{(b)}\ f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^n}$$

6.4. Igazoljuk, hogy ha az $f(z)$ függvény holomorf az a pont egy pontozott környezetében, és ott $|f(z)| > 1$, akkor a megszüntethető szingularitás vagy pólus.

Házi feladatok

6.5. Írjuk fel az $\frac{1}{\sin(z)}$ függvény 0-körüli $\dot{B}(0,\pi)$-ön konvergens Laurent sorának első két nem nulla tagját.

6.6. Hol vannak az alábbi függvényeknek izolált szingularitásai?

$$\frac{1}{1+e^z}; \qquad \frac{e^z}{(z^2-1)^3} \qquad \frac{e^z - z^3 + 8}{z^2+1} \qquad \frac{e^z}{z^2+4} \qquad \frac{e^z}{(z^2+4)^2}$$

6.7. Van-e olyan $f : B(0,\epsilon) \to \mathbb{C}$ holomorf, melyre elég nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\text{(a)}\ f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n!} \qquad \text{(b)}\ \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{n^n}$$

6.8. * Igazoljuk, hogy ha f-nek a-ban izolált szingularitása van, és vannak olyan $z_n \to a$ és $w_n \to a$ sorozatok, hogy $f(z_n) \to 1$, $f(w_n) \to 2$, akkor van olyan $s_n \to a$ sorozat is, hogy $f(s_n) \to 3$.