

9. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. április 14.

9.1.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha} + 1} = ?$$

(Integráljunk egy szögtartomány határán.)

9.2.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = ?$$

(Használjuk a $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény pólusait.)

9.3. A Rouché-tételből számoljuk ki, hogy hány gyöke van a $z^7 + 3z^2 - z$ függvénynek az egységkörben.

9.4. Legyen $f(z)$ holomorf a zárt egységkörlemezen, a körvonalon nem 0.

(a) Mit állít elő az

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot z \, dz$$

integrál?

(b) Írjuk fel az f gyökeinek négyzetösszegét integrál alakban.

9.5. *

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x \, dx}{x^2 + 1} = ?$$

(Integráljunk módosított félkörön (a nullát kikerülve) a $\frac{\log^2 z}{z^2 + 1}$ függvényt)

Házi feladatok

9.6.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^4 + 1} = ?$$

9.7. Legyen a komplex szám, $|a| = 3.1$. Hány gyöke lehet (multiplicitással számolva) a $z^4 + z^3 + az - 1$ polinomnak az $1 < |z| < 2$ tartományon?

Útmutatás: Hány gyök van az 1, és 2 sugarú körön belül a Rouché tétel szerint?