10. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. ápilis 21.

10.1. Legyen $f(z) = z^2$. Igazoljuk, hogy f $\mathbb{C} \setminus \{0\}$-n szögtartó, míg a 0 ban megduplázza a szöget.

10.2.

1. Legyen $f(z) = z + \frac{1}{z}$. Igazoljuk, hogy f konform az egységkör külsején.
2. Mi a képe az egységkör külsejének a fenti f-re nézve?
3. * Igazoljuk, hogy nem konstans egészfüggvény értékkészlete nem hagyhat ki szakaszt.
4. * Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-hez van olyan p polinom, melyre $p(f(z)) = f(z^n)$.

10.3. Legyenek $D, E \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tartományok, $f : D \to E$, $g : E \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ konformak. Igazoljuk, hogy ekkor $g \circ f$ is konform.

10.4. *

$$\int_0^\infty \frac{\log x \mathrm{d}x}{x^2 + 1} = ?$$

(Integráljunk módosított félkörön (a nullát kikerülve) a $\frac{\log^2 z}{z^2+1}$ függvényt)

10.5. Mivel egyenlő az alábbi sor összege? ($z \notin \mathbb{Z}$)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - k}$$

Házi feladatok

10.6.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 2x + 2)} = ?$$

10.7. Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf. Legyen $\gamma : [a, b] \to D$ rektifikálható egyszerű zárt görbe, melyre $int(\gamma) \subset D$. Tegyük fel, hogy $|f(\gamma(t))| > 1$ minden $t \in [a, b]$ esetén. Igazoljuk, hogy f $int(\gamma)$-ban $B(0, 1)$ minden elemét (multiplicitással számolva) ugyanannyiszor veszi fel.