# 11. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. ápilis 28.

**11.1.** Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf. Igazoljuk, hogy $f$-nek van primitív függvénye.

**11.2.** Igazoljuk Morera tételét (Goursat lemma megfordítása), mely szerint $D$ tartományra, egy $f : D \to \mathbb{C}$ folytonos függvény akkor és csak akkor holomorf, ha minden olyan $\Delta \subset D$ háromszögvonalra, melyre $int(\Delta) \subset D$, teljesül $\int_\Delta f = 0$.

**11.3.** Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, $f : D \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorf. Igazoljuk, hogy $f$-nek van "logaritmusa", azaz létezik $g : D \to \mathbb{C}$ holomorf, melyre $e^g = f$.

**11.4.** Írjunk fel (lehetőleg számolás nélkül) egy-egy olyan törtlineáris függvényt, ami
(a) a felső félsíkot önmagára képezi úgy, hogy a 0, 1, $\infty$ pontok képe rendre 1, $\infty$, 0,
(b)* az egységkör felső felét az első síknegyedbe képezi.

**11.5.** Képezzük le konforman az egységkör belsejére az alábbi tartományokat

1. $Imz > 0$
2. $Imz > 0 \cap Rez > 0$
3. $0 < Imz < \pi$
4. $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$
5. $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus [-1, 1]$
6. $B(0, 1) \cap Imz > 0$
7. $B(0, 1) \setminus [0, 1)$
8. $Imz > 0 \setminus [0, i]$
9. * $B(0, 1) \setminus \overline{B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$

## Házi feladatok

**11.6.** Írjunk fel egy törtlineáris függvényt, ami az egységkört a jobb félsíkba képezi.

**11.7.** Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, $f : D \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorf. Igazoljuk, hogy $f$-nek van "négyzetgyöke", azaz létezik $g : D \to \mathbb{C}$ holomorf, melyre $g^2 = f$.

**11.8.**

1. * Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf Legyen $f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$. Igazoljuk, hogy $u$ harmonikus, azaz
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
2. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, $u : D \to \mathbb{R}$ harmonikus. Igazoljuk, hogy ekkor $g(x + iy) = \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$ holomorf $D$-n.