12. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. május 5.

12.1. Képezzük le konforman az egységkör belsejére az alábbi tartományokat

1. $Imz > 0$
2. $Imz > 0 \cap Rez > 0$
3. $0 < Imz < \pi$
4. $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$
5. $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus [-1, 1]$
6. $B(0,1) \cap Imz > 0$
7. $B(0,1) \setminus [0,1)$
8. $Imz > 0 \setminus [0, i]$
9. * $B(0,1) \setminus \overline{B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$

12.2. Harmonikus-e u. Ha igen, van-e harmonikus társa, azaz olyan valós értékű v, melyre $u + iv$ holomorf? Ha van harmonikus társ, határozzuk meg.

1. $u(x,y) = x^2 - y^2$
2. $u(x,y) = x^2 + y^2$
3. $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$
4. $u(x,y) = \log(x^2 + y^2)$ $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$-n.
5. $u(x,y) = \log(x^2 + y^2)$ a felső félsíkon.

12.3. * Legyen $f(0, \frac{1}{2}) \times (0, \frac{i}{2}) \to \operatorname{Im} z > 0$ konform bijekció, melyre $f(0) = \infty$ *. Igazoljuk, hogy f kiterjed $\mathbb{C}$-n meromorf függvénynek, amely pólusai a $k + li$ $(k, l \in \mathbb{Z})$ pontokban van. E pólusok másodrendűek, és rajtuk kívül a kiterjesztett f függvény holomorf, ráadásul 1 és i szerint egyaránt periodikus.