

Komplex függvénytan 1. ZH, 2021. március 30.

A dolgozatot 10:00-ig bezárólag kell leadni a megfelelő felületen lehetőleg **pdf formátumban**. Az egyes feladatokra adott megoldásokat **külön oldalra** kérjük leírni. Minden feladat 1 pontot ér, részpontszám is szereshető. A dolgozatra kapott jegy nagyjából az elért pontszámmal egyenlő, a ketteshez 2 pont, az ötöshöz 5 pont megszerzése szükséges. A feladatok nem feltétlenül nehézség szerinti sorrendben vannak. Jó munkát kívánunk!

1. Számítsuk ki $(-i)^i$ összes értékét.
Számítsuk ki i^{-i} összes értékét.

2. Adjuk meg az $f(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 2}$ függvény 0 körüli Laurent-sorait és a sorokhoz tartozó konvergencia tartományok? (A tartomány határain nem kell vizsgálni a konvergenciát.)

Adjuk meg az $f(z) = \frac{5}{z^2 + 5z + 6}$ függvény 0 körüli Laurent-sorait és a sorokhoz tartozó konvergencia tartományok? (A tartomány határain nem kell vizsgálni a konvergenciát.)

3.
$$\operatorname{Res}_0 \frac{z+1}{\cos(z)-1} =? \quad \operatorname{Res}_0 \frac{z-1}{(e^z-1-z)} =?$$

4. Számítsuk ki az alábbi integrált:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + \cos x} dx.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + \sin x} dx.$$

5. Számítsuk ki az alábbi integrált:

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{(z-1)\sin z} dz.$$

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z(e^z - e)}, dz =?$$

6. a)

1. Van-e olyan $f : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf, melyre minden pozitív egész n esetén $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{2n+1}$?

2. Van-e olyan $f : B(0, 5) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf, melyre minden pozitív egész n esetén $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{2n+1}$?

b)

1. Van-e olyan $f : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf, melyre minden pozitív egész n esetén $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{1-3n}$?

2. Van-e olyan $f : B(0, 5) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf, melyre minden pozitív egész n esetén $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{1-3n}$?