

## Komplex függvénytan 2. ZH, 2021. május 11.

A dolgozatot 10:00-ig bezárólag kell leadni a megfelelő felületen lehetőleg **pdf formátumban**. Az egyes feladatokra adott megoldásokat **külön oldalra** kérjük leírni. Minden feladat 1 pontot ér, részpontoszám is szerezhető. A dolgozatra kapott jegy nagyjából az elért pontszámmal egyenlő, a ketteshez 2 pont, az ötöshöz 5 pont megszerzése szükséges. A feladatok nem feltétlenül nehézség szerinti sorrendben vannak, a dolgozat megoldásához az előadáson elhangzottak használhatóak, **gyakorlaton szereplő állításokat levezetéssel kérjük leírni**.

Jó munkát kívánunk!

1. Harmonikus-e  $u(x, y) = e^y \sin x + 3e^y \cos x$ ? Ha igen, van-e harmonikus társa, azaz olyan valós értékű  $v$ , melyre  $u + iv$  holomorf? Ha van harmonikus társ, határozzuk meg.

2. Harmonikus-e  $u(x, y) = 2e^y \sin x - e^y \cos x$ ? Ha igen, van-e harmonikus társa, azaz olyan valós értékű  $v$ , melyre  $u + iv$  holomorf? Ha van harmonikus társ, határozzuk meg.

3. Komplex függvénytani eszközökkel számoljuk ki az alábbi integrált:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2} dx = ?$$

4. Komplex függvénytani eszközökkel számoljuk ki az alábbi integrált:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x - \cos 4x}{x^2} dx = ?$$

5.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4} = ?$$

(A végeredményben csak valós számok szerepeljenek!)

6.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 9} = ?$$

(A végeredményben csak valós számok szerepeljenek!)

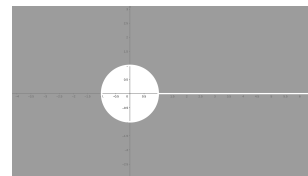
7. Hány gyöke van (multiplicitással) a  $p(z) = z^{49} + 14iz^{48} + 43z + 2$ -nek  $B(0, 2)$ -ben?

8. Hány gyöke van (multiplicitással) a  $p(z) = z^{49} + 12iz^{48} + 43z + 2$ -nek  $B(0, 5)$ -ben?

9. Képezzük le konforman az egységkörtre a

$$D = (\mathbb{C} \setminus \overline{B(0, 1)}) \setminus [1, \infty)$$

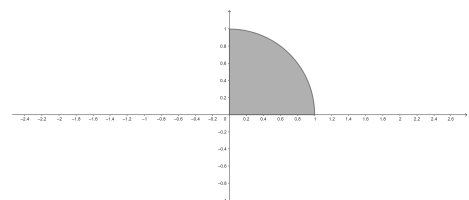
tartományt (az ábra szürke része).



10. Legyen  $H := \{z : \operatorname{Im} z > 0 \text{ és } \operatorname{Re} z > 0\}$ . Képezzük le konforman az egységkörtre a

$$D = B(0, 1) \cap H$$

negyedkört (az ábra szürke része).



**11.** Adjunk meg olyan  $f : B(0,1) \rightarrow \text{Im } z > 0$  holomorf leképezést, amely a felső félsík bármelyik pontját multiplicitással számolva pontosan kétszer veszi fel.

**12.** Adjunk meg olyan  $f : B(0,1) \rightarrow \text{Re } z > 0$  holomorf leképezést, amely a jobb félsík bármelyik pontját multiplicitással számolva pontosan kétszer veszi fel.