Matematika G1 első feladatsor
2023/24/1

Jelenléti követelmények: aláírást csak az kaphat, aki részt vesz az előadásoknak legalább 50%-án és a gyakorlatoknak legalább 70%-án. Kivételes esetben egy gyakorlatról való hiányzás a párhuzamosan meghirdetett megfelelő gyakorlaton való igazolt részvétellel pótolható. 7. és 12. héten 45 perces, 20 pontos zhkból fog állni a félévközi számonkérés. Mindkét zh pótolható, az pót zh eredménye mindig felülírja a korábbi eredményt. Pótlásra a 13. héten lesz lehetőség, különeljárási díj ellenében az egyik zh pótlása másodszor is megkísérelhető. Aláírás feltétele a jelenléti követelmény és legalább 8 pont szerzése mindkét zárthelyin. Aláírással lehet menni vizsgázni, ez egy 90 perces 60 pontos dolgozat. Nem elégtelen vizsgajegyhez legalább 24 pontot szükséges elérni, majd a két zh pontszáma és a vizsgajegy összege s határozza meg a tárgyra kapott jegyet: ha $s < 40$, akkor 1, $40 \leq s < 55$ akkor 2, $55 \leq s < 70$ akkor 3, $70 \leq s < 85$ akkor 4, $85 \leq s$ akkor 5.

Az A, B halmazok egyenlőek pontosan akkor, hogyha azonosak az elemeik. Ha A minden eleme B-nek is eleme, akkor A részhalmaza B-nek, jele $A \subseteq B$, valódi része ha nem egyenlőek. Két halmaz metszete ($A \cap B$) A és B közös elemeiből áll, az uniójuk pedig azon elemekből amik $\in A$ vagy $\in B$. A különbségük ($A \setminus B$ vagy $A - B$) azon elemekből áll amik elemei A-nak, de B-nek nem. Szokás ezt még a B halmaz A-ra vonatkozó komplementumának is nevezni, ekkor $\overline{B}_A$-val jelöljük (ha egyértelmű, az A elhagyható). A szimmetrikus különbségük ($A\Delta B$) azon elemekből áll, melyek pontosan az egyiknek elemei.

1.1. Feladat. *Az első évfolyamosok közül jelöljük M-el a második tankörösöket, F-el a fiúkat, A-val az angolul és N-el a németül tudó hallgatókat. Fejezzük ki ezekből halmazműveletekkel a következő halmazokat:*

1. *második tankörös fiúk*
2. *angolul és németül tudók*
3. *angolul vagy németül tudók*
4. *angolul vagy németül tudó fiúk*
5. *vagy angolul vagy németül tudók*
6. *második tankörös lányok*
7. *németül tudó lányok*
8. *németül nem tudó második tankörös lányok*
9. *második tankörös angolul tudók és a többi tankörbe tartozó németül tudók párjai*

Az A és B halmazok szorzatán az elemeikből képezhető rendezett párok halmazát értjük és $A \times B$-vel jelöljük.

1.2. Feladat. *Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 5\}$ és $B = \{y \in \mathbb{R} : 3 \leq y \leq 4\}$. Ábrázoljuk az $A \times B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmazt, mint a sík egy részhalmazát.*

1.3. Feladat. *Legyen $A = \{a\}$, $B = \{x, y\}$, $C = \{1, 2, 3\}$. Soroljuk fel az $A \times B \times C$ halmaz, és az $A^3 = A \times A \times A$, B^3 halmazok elemeit.*

Egy A halmaz összes részhalmazainak halmazát az A hatványhalmazának nevezzük és $\mathcal{P}(A)$-val jelöljük.

1.4. Feladat. *Legyen $H = \{a, b, c\}$, írjuk fel a $\mathcal{P}(H)$ hatványhalmazt!*

1.5. Feladat. *Ha A, B két tetszőleges halmaz, akkor $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, hogyha $B \subseteq A$ vagy $A \subseteq B$.*

1.6. Feladat. *Legyen A_n egy n elemű véges halmaz, hány eleme van a $\mathcal{P}(A_n)$ halmaznak?*

1.7. Feladat*. *Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan A halmaz, hogy A és $\mathcal{P}(A)$ között létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés! (Útmutatás: indirekt tegyük fel, hogy létezik ilyen A halmaz és $\varphi : A \to \mathcal{P}(A)$ kölcsönösen egyértelmű leképezés, és vizsgáljuk az $X := \{y \in A : y \notin \varphi(y)$ halmazt.)*

Ha adott egy $P(n)$ állítássorozat minden n természetes számhoz, amelyre teljesül, hogy: 1. létezik n_0 amire $P(n_0)$ igaz, továbbá 2. ha $P(n)$ igaz, akkor $P(n+1)$ is igaz, akkor $P(n)$ igaz minden $n \geq n_0$-ra. Ezt nevezzük a matematikai indukció elvének.

1.8. Feladat. *Keressünk hibát a következő bizonyításban:*
Állítás: minden egész szám egyenlő.
Bizonyítás: indukcióval bizonyítunk. Tegyük föl, hogy az n természetes számra teljesül az állítás, vagyis $n = n + 1$. Adjunk ezen egyenlet mindkét oldalához hozzá egyet, ekkor $n + 1 = n + 2$ adódik, tehát a tulajdonság öröklődik. $\square$

1.9. Feladat. *Igazoljuk indukcióval, hogy $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.*

1.10. Feladat. *Igazoljuk indukcióval, hogy* $(1-1/4)(1-1/9)\dots(1-1/n^2) = \frac{n+1}{2n}$.

1.11. Feladat. *Igazoljuk indukcióval, hogy* $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$.

Az $(x+y)^n$ kifejezést kiszorozva $x^i y^{n-i}$ együtthatóját $\binom{n}{i}$-vel jelöljük, és binomiális együtthatónak hívjuk.

1.12. Feladat. *Bizonyítsuk a következő azonosságokat:*

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$,
2. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{k} = 0$,
3. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.