

# Matematika G1 második feladatsor

## 2023/24/1

A komplex számok halmaza  $\mathbb{C} := \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ .  $a$ -t valós,  $b$ -t a komplex szám valós és képzetes részének nevezzük,  $Rez$  és  $Imz$ -vel jelöljük (vegyük észre hogy a képzetes rész is egy valós szám). Összeadás a valós és képzetes részekre külön külön, szorzásnál disztributívan kiterjesztjük, és figyelembe vesszük hogy  $i^2 = -1$ .  $z = a + bi$  konjugáltja  $a - bi =: \bar{z}$ .  $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$  a komplex szám hossza vagy abszolút értéke. A pozitív valós félegeneshez mérve a szögét minden komplex szám kifejezhető  $r(\cos \phi + i \sin \phi)$  alakban ahol  $r = |z|$ ,  $\cos \phi = \frac{a}{|z|}$ , ezt nevezzük  $z$  geometriai alakjának,  $a + bi$  az algebrai alakja.

**2.1. Feladat.** Számítsuk ki a  $z_1 = 1 - 5i$  és a  $z_2 = 3 + 4i$  komplex számok összegét és szorzatát. Ábrázoljuk ezeket derékszögű koordinátarendszerben.

**2.2. Feladat.** Adjuk meg az  $\frac{1}{1+i}$  számot algebrai alakban, majd általában fejezzük ki  $\frac{1}{a+bi}$ -t algebrai alakban.

**2.3. Feladat.** Szorozzuk össze a  $3(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$  és  $2(\cos 305^\circ + i \sin 305^\circ)$  számokat, illetve a  $2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$  és  $i$  számokat.

**2.4. Feladat.** Számítsuk ki a következő komplex számok valós és képzetes részét, illetve hosszát és szögét, adjuk meg trigonometrikus alakjukat

$$3, -8, -2i, 1 + i, 2 - 2\sqrt{3}i$$

**2.5. Feladat.** Adjuk meg a következő számok algebrai alakját.

$$5\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right), 2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$$

**2.6. Feladat.** Fejezzük ki  $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ -hez  $\bar{z}$  geometriai alakját.

**2.7. Feladat.** Határozzuk meg azokat az  $x, y \in \mathbb{R}$  számokat, melyekre fennáll a  $3x + 2iy - ix = 7 + 5i$  egyenlőség.

**2.8. Feladat.** Mely  $z \in \mathbb{C}$ -re teljesülnek a következő feltételek:

- $1 < |z| < 2$
- $|z| = 2$
- $|z - i| = |z + i|$
- $|z + i| \leq 1$
- $Im(z + i) > 2$
- $Rez = 1$
- $\frac{\pi}{4} < argz \leq \frac{\pi}{2}$

**2.9. Feladat.** Határozzuk meg az  $x, y$  valós koordinátákkal megadott síkban a

- $(-2, 1)$  középpontú, 4 sugarú kör
- $y = mx + b$  egyenletű egyenes

komplex változós egyenletét!

**2.10. Feladat.** Oldjuk meg a komplex számok halmazán a következő egyenleteket:

- $x^2 + 2 = 0$
- $x^2 - 2x + 2 = 0$
- $x^2 - 6x + 13 = 0$
- $x^2 + 8x + 17 = 0$
- $x^4 - x^2 - 6 = 0$
- $x^2 + 5 + \frac{6}{x^2} = 0$

**2.11. Feladat.** Határozzuk meg az  $\sqrt[n]{1}$  halmazokat  $n = 1, 2, 3, 4$ -re. Határozzuk meg  $\sqrt{3 + 4i}$  értékeit.

**2.12. Feladat.** Egy szabályos háromszög két csúcsa  $1 + 4i$  és  $5 + i$ , határozzuk meg a harmadik csúcsát!