Matematika G1 ötödik feladatsor
2023/24/1

5.1. Feladat. *Számoljuk ki a definíció alapján a* $\lim_{x\to 2,\infty} \frac{3x+1}{5x+4}$ *és a* $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-4x}$ *határértékeket. Lássuk be, hogy* $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{\pi}{x})$ *nem létezik.*

5.2. Feladat. x *megfelelő hatványával egyszerűsítve számoljuk ki a következő határértékeket:*

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2-2}$
2. $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-x+1}{6x^2+3x+2}$
3. $\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^3+x^2-1}{x^2+x-1}$
4. $\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$
5. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2}{x^2+1} - x$
6. $\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

5.3. Feladat. *Szorzattá alakítás és egyszerűsítés után számítsuk ki az* $\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$ *függvény határértékét az*

1. $x_0 = 2$,
2. $x_0 = 1$,
3. $x_0 = \infty$ *helyeken.*

5.4. Feladat.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1} = ? \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin^3(x)} = ? \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{|x-1|} = ? \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-cos(2x)}}{x}$$

5.5. Feladat. *Hol folytonosak az alábbi függvények? Ha van szakadási pont, állapítsuk meg a tipusát (hézag/megszüntethető, vagy lényeges (pólus-e?)).*

1. $3^{\frac{1}{x+1}}$
2. $\frac{5x^2-3x}{2x}$
3. $\frac{1}{\sin(2x)}$
4. $\frac{\sin^2(x)}{1-\cos(x)}$
5. $sgn(|x^4+x^2|)$

5.6. Feladat. *Legyen* $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ *ha* $x \neq 0$*, határozzuk meg az* a *értékét, hogy az* $f(0) = a$ *definícióval az* f *függvény folytonos legyen* 0*-ban.*

5.7. Feladat. *Számítsuk ki definíció szerint a* $4x+2$ *függvény differenciálhányadosát* $x_0 = 2$*-ben.*

5.8. Feladat. *Számoljuk ki definíció szerint* $\sin(x)$ *differenciálhányadosát mint függvényt* $x_0 \mapsto (\sin(x))'(x_0)$*.*

5.9. Feladat. *A deriválási szabályok felhasználásával deriváljuk az alábbi függvényeket, és adjuk meg a grafikonjuk érintőegyenesének egyenletét az* $(1, f(1))$ *pontban.*

1. x^2-2x+3
2. $\frac{1}{x}+\sqrt{x^5}$
3. $x\sin(x)$
4. $\frac{\sin(x)}{x}$
5. $\tan(x)$
6. $\frac{x^3+4}{1+2x}$

192. Határérték csak olyan x szám lehet, amelyre teljesül az

$$x = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(2a_n^2 + a_n) = 2x^2 + x$$

egyenlet, azaz $x = 0$. A sorozat monoton növekvő, ezért akkor és csak akkor konvergens, ha felülről korlátos, s ebben az esetben a határérték a sorozat legkisebb felső korlátja. Ha tehát a sorozat konvergens, akkor minden n-re $a_n \le 0$. Mivel $a_{n+1} = a_n(2a_n + 1)$ és $a_n, a_{n+1} \le 0$, ezért a $2a_n + 1 \ge 0$ feltételnek teljesülni kell, s így $a_n \ge -\frac{1}{2}$. Kaptuk, hogy konvergencia esetén minden n-re $-\frac{1}{2} \le a_n \le 0$, ezért szükségképpen $-\frac{1}{2} \le a \le 0$. Most megmutatjuk, ha $-\frac{1}{2} \le a \le 0$, akkor a sorozat konvergens (és természetesen a határérték 0). Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy akkor minden n-re: $-\frac{1}{2} \le a_n \le 0$. Az $n = 1$-re a feltétel miatt teljesül az állítás. Tegyük fel, hogy valamely n-re $-\frac{1}{2} \le a_n \le 0$. Akkor $-a_n \ge 2a_n^2 \ge 0$, azaz $0 \ge 2a_n^2 + a_n \ge a_n \quad (\ge -\frac{1}{2})$, tehát $0 \ge a_{n+1} \ge -\frac{1}{2}$. Mivel a sorozat monoton növekvő, ezért valóban konvergens. Tehát az $[a_n]$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha $-\frac{1}{2} \le a \le 0$, s ebben az esetben $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ha $a < -\frac{1}{2}$ vagy $a > 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, mivel a sorozat monoton növekvő, de felülről nem korlátos.

193. A sorozat divergens, mert az $x = x + \dfrac{1}{x^3+1}$ egyenletnek nincs megoldása. Mivel a sorozat szigorúan monoton növekvő, ezért $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

194. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő. $a_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a + \sqrt{a}} = a_2$ nyilván igaz és könnyen belátható, hogy az $a_n < a_{n+1}$ feltevésből következik a $a_{n+1} < a_{n+2}$ egyenlőtlenség. A sorozat felülről korlátos. Igazoljuk ezt is teljes indukcióval. Ekkor olyan k számot kell keresni, amelyre $a_n \le k$-ból $a_{n+1} \le k$ következik. Ehhez az $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n} \le \sqrt{a+k}$ egyenlőtlenség miatt elegendő, ha $\sqrt{a+k} \le k$ vagyis $a \le k^2 - k$ igaz. Ha $k = a + 1$, akkor az előző egyenlőtlenség biztosan teljesül, továbbá $a_1 \le k$ is igaz lesz. A sorozat tehát bármely pozitív a-val konvergens. Az x határérték a következő egyenletnek tesz eleget: $x = \sqrt{a+x}$, ahonnan $x > 0$ miatt: $x = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

195. $a_n = \dfrac{n-1}{n} a_{n-1} = \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-2}{n-1} a_{n-2} = \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-2}{n-1} \cdots \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{2} a_1 = \dfrac{1}{n}$.