

Matematika G1 hatodik feladatsor
2023/24/1

Zh 8. hét keddjén (10.24) az előadás időpontjában, a tervezett anyag:halmazelmélet, teljes indukció, komplex számok, számsorozatok, fv folytonosság, határérték és deriválásból a "deriválás technikája" és "érintős" feladatok.

Konzultáció 6. (mostani) hét csütörtök 18:00 az óra Teams felületén, másnap péntek reggel 8-10 pedig hagyományos konzultáció.

6.1. Feladat.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(3x)}{x} =? \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(4x)}{\sin(x)} =? \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} =?$$

6.2. Feladat.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{7x} =? \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} =? \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1+2x} =?$$

6.3. Feladat. Számoljuk ki definíció szerint $\sin(x)$ differenciálhányadosát mint függvényt $x_0 \mapsto (\sin(x))'(x_0)$.

6.4. Feladat. Legyen f differenciálható az $a \in \mathbb{R}$ pontban, és tekintsük a g függvényt, amire $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ha $x \neq a$, és $x \mapsto f'(a)$ ha $x = a$. Lássuk be, hogy ez a függvény folytonos a -ban!

6.5. Feladat. A deriválási szabályok felhasználásával deriváljuk az alábbi függvényeket, és adjuk meg a grafikonjuk érintőegyenésének egyenletét az $(1, f(1))$ pontban.

1. $x^2 - 2x + 3$

4. $\frac{\sin(x)}{x}$

7. $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

2. $\frac{1}{x} + \sqrt{x^5}$

5. $\tan(x)$

8. $(\sin(x) + 1)^2$

3. $x \sin(x)$

6. $\frac{x^3+4}{1+2x}$

9. $\sin(\tan(x))$

6.6. Feladat. Deriváljuk az alábbi függvényeket, és állapítsuk meg hogy mely pontokban létezik (nem függőleges) érintője a grafikonjuknak!

1. $\sqrt{1-x^2}$

2. $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

3. $(3x + 18x^2)^{1/3}$

4. $\sqrt{1 + \sin(x)}$

6.7. Feladat. Állapítsuk meg az $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$ függvény összes deriváltját $(f', (f)'), \dots$.

1.zh G1 Matematika

1. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet:

$$z^2 \bar{z} = 5 + 10i \quad (3p)$$

2. Adjuk meg a komplex számsíkon az alábbi feltételeknek megfelelő pontok halmazát:

$$\operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Im}(z)$$

$$|z - 1| < 1$$

$$\operatorname{Im}(z^2) \geq 2 \quad (3p)$$

3. Állapítsuk meg az alábbi sorozat illetve függvény határértékeit: (L'Hospital nem alkalmazható)

a.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sin 6x - \sin 7x} \quad (3p)$$

b.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 - n + 5}{2n^2 + n + 5} \right)^{2n} \quad (4p)$$

4. Bizonyítsuk be teljes indukcióval:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)} \quad (4p)$$

5. Keressük meg az $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$ függvény grafikonjának az $y=2x$ egyenessel párhuzamos érintőit. (3p)