

Matematika G1 hetedik feladatsor

2023/24/1

Arkuszfüggvények

D 10.13 Az arkuszfüggvények a trigonometrikus függvények megadott intervallumra való le-
szűkítéseinek inverzei, nevezetesen:

$$\arcsin x = y \Leftrightarrow \sin y = x, \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \operatorname{arctg} x = y \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x, \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

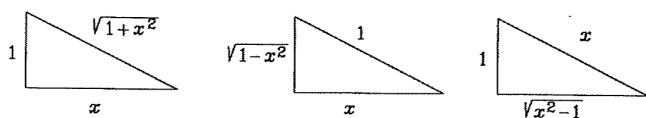
$$\arccos x = y \Leftrightarrow \cos y = x, [0, \pi], \quad \operatorname{arccotg} x = y \Leftrightarrow \operatorname{ctg} y = x, (0, \pi).$$

T 10.14 Az arcsin és az arccos függvények a $(-1, 1)$ intervallumon, az arctg és az arccotg
függvények az egész számegyenesen differenciálhatók. Deriváltjuk:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

T 10.15 Az arkuszfüggvényekre, értelmezési tartományuk minden x pontjában, fennállnak az
alábbi összefüggések:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}.$$



Area függvények

D 10.21 Az areafüggvények a hiperbolikus függvények inverzei:

$$\operatorname{arsh} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto y, \text{ ahol } \operatorname{sh} y = x,$$

$$\operatorname{arch} : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty); x \mapsto y, \text{ ahol } \operatorname{ch} y = x,$$

$$\operatorname{arth} : (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto y, \text{ ahol } \operatorname{th} y = x,$$

$$\operatorname{arch} : \mathbf{R} \setminus [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}; x \mapsto y, \text{ ahol } \operatorname{cth} y = x.$$

T 10.22 Az areafüggvények kifejezhetők a logaritmusfüggvénnyel:

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad (x \in \mathbf{R}), \quad \operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad (|x| < 1),$$

$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad (x \geq 1), \quad \operatorname{arch} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad (|x| > 1).$$

T 10.23 Az arch függvény az $(1, \infty)$ intervallumon, a többi areafüggvény az egész értelmezési
tartományán differenciálható, és

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad (\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad (\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad (\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

7.1. Feladat. Számoljuk ki $\arcsin(\sin(x))$ értékét!

7.2. Feladat. Hol értelmesek az alábbi függvények? Mi
a deriváltjuk?

1. $\arccos(1-2x)$

2. $\operatorname{arctg}(1-x^2)$

3. $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

4. $\arcsin(\cos(x))$

7.3. Feladat. Igazoljuk, hogy $\cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$, és hogy $\sin(\operatorname{arctg}(x)) = \cos(\operatorname{arctg}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$!

7.4. Feladat. Számoljuk ki $\operatorname{arsh}(\operatorname{sh}(x))$ értékét!

7.5. Feladat. Hol értelmesek az alábbi függvények? Mi
a deriváltjuk?

1. $\operatorname{arch}(1-2x)$

2. $\operatorname{arth}(1-x^2)$

3. $\operatorname{arsh}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

4. $\operatorname{arsh}(\operatorname{ch}(x))$

7.6. Feladat. Igazoljuk, hogy $\operatorname{ch}(\operatorname{arsh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$ és
hogy $\operatorname{sh}(\operatorname{arth}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$!

7.7. Feladat. Igazoljuk az analóg addíciós képleteket a
hiperbolikus szögfüggvényekre is (a formula azonos $\sin \leftrightarrow \operatorname{sh}$ és $\cos \leftrightarrow \operatorname{ch}$ helyettesítéssel).

7.8. Feladat. Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket monotonitás és szélsőérték szempontjából:

1. $x^3 - 3x^2 + 1$

2. $\frac{x}{x^2+4}$

3. $x^2 \sqrt[3]{x+2}$

4. $\sin^2(x) - \sqrt{3} \sin(x)$

5. $x^2 e^{-x}$