Matematika G2 első gyakorlat
2023/24/2

Elérhető vagyok a bekem@renyi.hu emailcímen, a kurzus weboldala: https://users.renyi.hu/~bekem/teaching.html illetve a tárgy ütemterve elérhető a https://geometria.math.bme.hu/node/2922 webcímen. Gyakorlati aktivitásért, feladatmegoldásért a szemeszterben 6 pluszpont szerezhető, ezek az évvégi értékelésbe számítanak (ergo "zh pontok"). Jó munkát:)

1.1. Feladat. *Legyen O a tér egy adott pontja, $e := OE$ egy egyégvektor, $k \in \mathbb{R}^+$. Hol helyezkednek el azok az X pontok, amikre $e \cdot OX = k$?*

1.2. Feladat. *Bontsuk fel az a vektort két vektor összegére, melyek közül egypárhuzamos, a másik pedig merőleges az adott b vektorra! Ellenőrizzük a számolásunkat egy példán.*

1.3. Feladat. *Igazoljuk, hogy bármely $ABCD$ tetaréderre a kitérő helyzetű élek skaláris szorzatainak az összege zérus!*

Az a, b térvektorok vektori szorzata $a \times b$ az a vektor melynek hossza $|a||b|| \sin \alpha$, ahol α az a, b vektorok bezárt szöge, az iránya pedig úgy választandó, hogy $a, b, a \times b$ jobbrendszert alkosson.

1.4. Feladat. *Készítsuk el a $0, i, j, k$ vektorok vektori szorzatainak műveletttábláját.*

1.5. Feladat. *Legyen e egységvektor, a tetszőleges vektor. Adjunk geometriai jelentést az $|e \times a|$ számnak, és az $(e \times a) \times e$ vektornak.*

Az a, b, c vektorok vegyes szorzata $abc := (a \times b) \cdot c$. A vektoriális szorzás tulajdonságai miatt $abc = cab = bca = -bac = -acb = -cba$, továbbá $= a \cdot (b \times c)$. Koordinátás alakban a három vektorból képzett 3×3-as mátrix determinánsával egyenlő.

1.6. Feladat. *Az a, b, c vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata V. Mennyi az $r = 2a + 3b + 4c, s = a - b + c, t = 2a + 4b - c$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térofgata?*

1.7. Feladat. *Mekkora az $ABCD$ tetraéder térfogata, ha $AB = (2, -1, 4)^T, BC = (6, 1, -4)^T, CD = (1, 1, 2)^T$?*

1.8. Feladat. *Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, ami átmegy az $A(1, 5, 2)$ ponton, és párhuzamos a $7x - y + 3z + 2 = 0$ egyenletű síkkal!*

1.9. Feladat. *Normálvektorokkal mutassuk meg, hogy az $x + y + z = 6, 2x - y + z = 3, x + 2y - z = 2$ síkoknak pontosan egy közös pontjuk van*

1.10. Feladat. *Adjuk meg a különböző módon leírt egyenesek paraméteres és nemparaméteres egyenletrendszerét:*

1. *átmegy az $A(-2, 5, 1)$ ponton, és párhuzamos az $a[-1, 2, 3]$ vektorral*
2. *átmegy a $P(3, 1, 2)$ és $Q(-1, 1, 3)$ pontokon*
3. *Párhuzamos a $k[0, 0, 1]$ vektorral, és átmegy az $A(5, 1, 4)$ ponton*
4. *merőleges az $a[-2, 3, 1]$ és a $b[2, 0, 1]$ vektorra, és átmegy az $A(6, -3, 4)$ ponton.*
5. *párhuzamos a $3x + y - z + 1 = 0$ és az $x + y + z = 0$ egyenletű síkkal, és az yz tengelysíkot a $P(0, 4, 1)$ pontban metszi.*

1.11. Feladat. *Állapítsuk meg az alábbi hat egyenes kölcsönös helyzetét. Ha metszőek, adjuk meg a metszéspontjukat.*

$$e: \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad f: \begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = -3 + 2t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \qquad g: \begin{cases} y = -1 \\ \dfrac{x+5}{2} = \dfrac{z-6}{3} \end{cases}$$

$$h: \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = -1 \\ z = 3t + 9 \end{cases} \qquad k: \frac{8-x}{3} = y + 2 = \frac{z+3}{2} \qquad l: \frac{x-5}{6} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{-4}.$$