Matematika G2 második gyakorlat
2023/24/2

2.1. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi mátrixok egész kitevős hatványait.*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

2.2. Feladat. *Mutassuk meg, hogy* $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, *és hogy* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}$, *ahol* F_n *az* n*. Fibonacci számot jelöli* ($F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ F_0 = 0, F_1 = 1$)*.*

2.3. Feladat. *Adjunk ellenpéldát a mátrixok körében az* $AB = BA$, $(AB)^2 = A^2B^2$ *és az* $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ *azonosságokra. (hint: nem kell mindig újrakezdeni a munkát)*

2.4. Feladat. *Milyen mátrixokra teljesül a binomiális tétel?*

2.5. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy minden* 2×2*-es* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *mátrix teljesíti az* $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0$ *azonosságot, ahol* $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *az egységmátrix.*

2.6. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat.*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 1 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & -1 \\ -6 & 5 & -6 & 0 \end{vmatrix}$.

2.7. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat (utolsó kettő szorgalmi).*

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$