Matematika G2 ötödik gyakorlat
2023/24/2

5.1. Feladat. *A Cramer szabály segítségével oldjuk meg az alábbi feladatokat!*

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -8, \\ x_4 &= ? \end{aligned}$$

5.2. Feladat. *Igazoljuk, hogy az alábbi V, W halmazok vektorteret alkotnak, és hogy az adott $L : V \to W$ leképezés lineáris!*

1. *V az $\mathbb{R}$-en deriválható függvények halmaza, W az $\mathbb{R}$-en értelmezett függvények halmaza, L pedig a deriválás*
2. *V az $[a, b]$ intervallumon integrálható függvények halmaza, $W = \mathbb{R}$, és $L : f \mapsto \int_a^b f$*
3. *$V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^m$ és $L : x \mapsto Ax$ ahol A egy rögzített $m \times n$-es mátrix*
4. *V a 0-ban értelmezett függvények halmaza, $W = \mathbb{R}$ és $L : f \mapsto f(0)$*

5.3. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az $f : x \mapsto ax + b$ függvény pontosan akkor lineáris ha $b = 0$.*

5.4. Feladat (*). *Mutassuk meg, hogyha $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti hogy $m(cx) = cm(x)$ minden $c, x \in \mathbb{R}$ számra, akkor $m(x + y) = m(x) + m(y)$!*

5.5. Feladat (*). *Mutassuk meg, hogyha egy $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az $a(x + y) = a(x) + a(y)$ azonosságot minden $x, y \in \mathbb{R}$ számra, akkor $a(cx) = ca(x)$ teljesül minden $c \in \mathbb{Q}$ és $x \in \mathbb{R}$-re!*

5.6. Feladat. *Gondoljuk meg a mátrixműveletek geometriai jelentésével az alábbi mátrixműveletek eredményét, majd válaszunkat mátrixszorzással ellenőrizzük.*

- *A a síkon $45°$-os forgatás, B a síkon $-45°$-os forgatás, $A + B =?$*
- *A a sík α szöggel való elforgatása, B a sík β szöggel való elforgatása, $BA =?$*