

Matematika G2 hatodik gyakorlat 2023/24/2

6.1. Feladat. A mátrix felírása nélkül mondjuk meg az egyes leképezések sajátértékeit, majd számolással ellenőrizzük.

1. \mathbb{R}^3 -ban az xy síkra való merőleges tükrözés
2. \mathbb{R}^3 merőleges vetítése az $[1, 2, 3]^T$ irányú egyenesre
3. az egységleképezés, $v \mapsto v \forall v \in \mathbb{R}^3$
4. a nulla leképezés, $v \mapsto 0 \forall v \in \mathbb{R}^3$

6.2. Feladat. Határozzuk meg a sajátértékeket, sajátvektorokat!

a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

6.3. Feladat. Tudjuk, hogy az $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ mátrix egyik sajátvektora az $(1, 1)^T$. Határozzuk meg az a paraméter értékét, és a másik sajátvektort.

6.4. Feladat.

Szempléssük a főtengetételt a következő szimmetrikus mátrixokon:

93. $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}$, 94. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 95. $\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$,

96. $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, 97. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 98. $\begin{bmatrix} 36 & 18 & 12 \\ 18 & 9 & 6 \\ 12 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

6.5. Feladat. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit, számítsunk sajátvektorokat

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

6.6. Feladat. Igazoljuk, hogy egy mátrixnak, és az inverzének azonosak a sajátvektoraik, a megfelelő sajátértékek pedig a reciprokkra változnak.

6.7. Feladat. Igazoljuk, hogy 0 pontosan akkor sajátértéke az A mátrixnak, ha $\det A = 0$!

6.8. Feladat. Legyen $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$. Tudjuk, hogy A -nak sajátértéke a 3, és egy másik sajátértékéhez sajátvektor a $(2, 1, -2)^T$, ebből állapítsuk meg A összes sajátértékét és sajátvektorát.

6.9. Feladat. Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 14 \\ 9 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix összes sajátértékét. Számítsuk ki a legnagyobb és legkisebb valós sajátértékhez tartozó sajátvektorok által bezárt szöveget.

6.10. Feladat. Igaz-e, hogy egy $A \ 2 \times 2$ -es szimmetrikus mátrix $\det(Ix - A)$ karakterisztikus egyenletének diszkriminánsa nem lehet negatív?