

Matematika G2 hetedik gyakorlat

2023/24/2

Az összegzések $n = \infty$ -ig tartanak, konvergencia szempontjából nem számít, hogy honnan indul az összegzés.

7.1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi numerikus sorok összegét!

$$1. \sum_0^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} \quad 2. \sum_0^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n} \quad 3. \sum_0^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad 4. \sum_0^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \quad 5. \sum_0^{\infty} \frac{1}{n^2 + (2i+1)n + i - 1}$$

7.2. Feladat. Mutassuk meg, hogy a következő sorok divergensek:

$$1. \sum \frac{n}{a^n} \text{ ahol } 0 < |a| \leq 1 \quad 2. \sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

7.3. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi sorok divergensek-e:

$$1. \sum \frac{n}{n^2 + 2}, \quad 2. \sum \frac{\sin(nx)}{2^n}$$

7.4. Feladat. A minoráns- és majoránskritérium segítségével döntsük el, hogy a következő sorok konvergensek-e:

$$1. \sum \frac{1}{1+n^2} \quad 2. \sum \frac{n^2}{n^3+1} \quad 3. \sum \frac{2n^3-16}{n^5+n} \quad 4. \sum \frac{3n+2}{2n^2-n}$$

7.5. Feladat. Vizsgáljuk a sorok konvergenciáját a hányados- és a gyökkritériummal!

$$1. \sum \frac{1}{(\ln(n))^n} \quad 2. \sum \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e-1}\right)^n \quad 3. \sum \left(\frac{1}{\pi} \arctg(n)\right)^n$$

$\sum a_n$, ahol $a_n = \frac{1}{a^n}$ ha n páratlan és $a_n = \frac{1}{b^n}$ ha n páros, ahol $1 < a < b$. $\sum b_n$, ahol $b_1 = 2$ és $b_{n+1} = \frac{1+\sin(n)}{n} b_n$.

7.6. Feladat. Vizsgáljunk konvergenciát az integrálkritériummal!

$$1. \sum \frac{n}{e^n} \quad 2. \sum \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

7.7. Feladat. Konvergensek-e az alábbi váltakozó előjelű sorok?

$$1. \sum (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1} \quad 2. \sum (-1)^n \frac{n}{5n-2} \quad 3. \sum \frac{n}{a^n}, \text{ ahol } a < -1$$

7.8. Feladat. Mely számsorozatok konvergensek, feltételesen vagy abszolút konvergensek illetve divergensek?

$$1. \sum \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}} \quad 2. \sum \frac{(-1)^2}{n \log n} \quad 3. \sum \frac{(-1)^n}{n^2 \sqrt{n}} \quad 4. \sum (\sqrt[n]{n} - 1)^{2n} \quad 5. \sum \frac{i^n}{n} \quad 6. \sum \left(\frac{2-i}{3}\right)^n \quad 6. \sum \frac{n(2i-1)^n}{3^n}$$

7.9. Feladat (*).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n} = ?$$