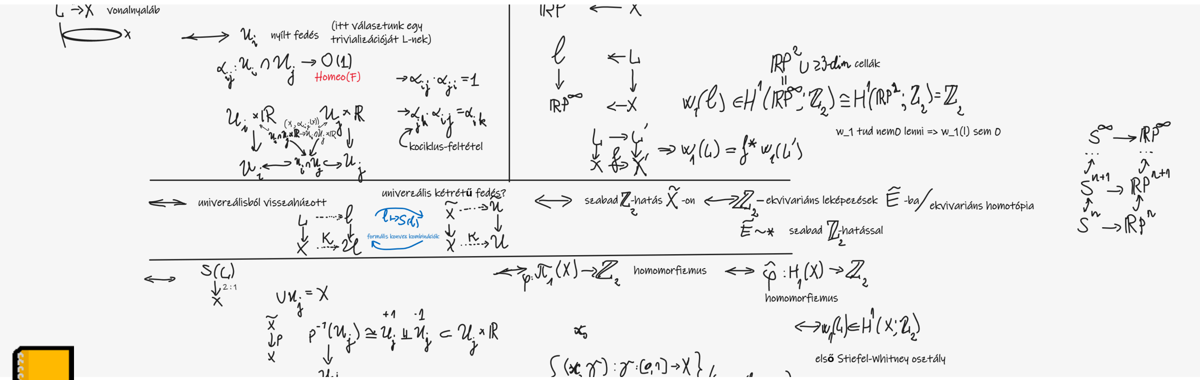
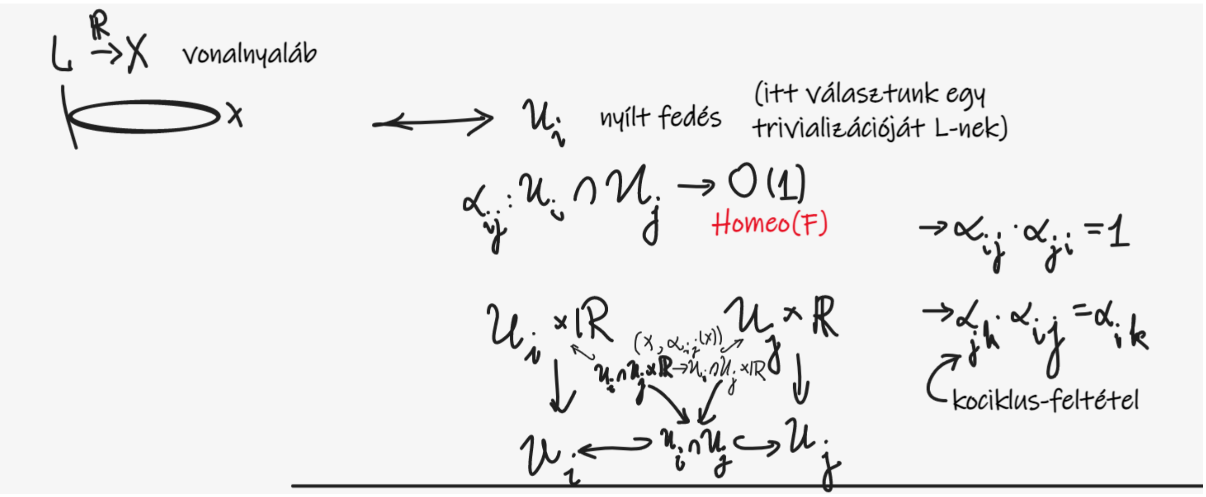


1.

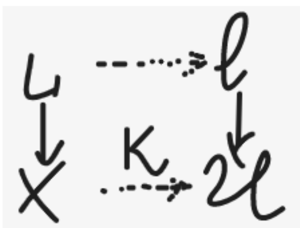
Távlati cél: Egzotikus gömbök, ehhez kobordizuscsoportok és karakterisztikus osztályok.

Meg akarjuk érteni a vonalnyalábokat. Egy X tér, és fölötte egy $L \xrightarrow{\mathbb{R}} X$ vonalnyaláb, parakompakt és választva van rajta egy metrika. Megadhatóak persze az átmeneti függvények kociklusfeltétellel, ergo U_i nyílt fedés trivializáló környezetekkel. A metszetekből vannak $\alpha_{ij} : U_i \cap U_j \to O(1)$ átmeneti leképezések.



Mindenképpen teljesülnie kell, hogy $\alpha_{ij} \circ \alpha_{ji} = id$ ahol értelmes, illetve $\alpha_{ij} \circ \alpha_{jk} = \alpha_{ik}$ (*kociklusfeltétel*). Állítjuk, hogy ez elég is hogy vonalnyalábot kapjunk (általánosabban is, de persze a struktúracsoport más lesz). Minden trivializáló környezet felett a triviális nyalábot véve, és lefaktorizálva a függvényekkel minden működni fog, ha körbemennénk a környezeteken az identitásba érünk vissza a ragasztásokkal a feltétel miatt.

Másik lehetőség: valamilyen univerzális objektum konstrukciója, és abból visszahúzni.



Pullback diagram

Fibrumonkénti izomorfizmus, ezzel csak az $X \to U$ izomorfizmusokat kell megérteni.

Az egységgömbnyaláb egy kétrétű fedése lesz a bázistérnek $S(L) \xrightarrow{\mathbb{R}} X$ $2:1$. Ez megint egy ekvivalens leírás, a másik irányban a kétrétű fedés joinját kell venni (formláis konvex kombinációkat) és megmondjuk hogy egy pont felett a két fedőpont súlypontja az origó. Ez egy $\mathbb{R}$ fibrumú nyaláb minden esetre. Veszünk egy trivializáló fedést X-nek, az ős két diszjunkt példánya a környezetnek, a joinnal kapunk egy $U_j \times \mathbb{R}$-et, megválasztjuk akárhogy, hogy melyik $+1$, melyik -1. Megnézzük, hogy a fedésben melyik ág felelt meg melyik pontnak, és így választjuk a ragasztóleképezéseket, ez automatikusan lineáris lesz.

Kétrétű fedések kellenek nekünk tehát, vagyis $\phi : \pi_1(X) \to Z_2$ homomorfizmus (egy 2-indexű részcsoport) (ergo megmondjuk, hogy mely +1-ből felemelt hurok ér a +1-be, mely a -1-be).

> 💡 $\{(x,\gamma) \mid \gamma : [0,1] \to X, 0 \mapsto x_0, 1 \mapsto x_1\}/\{x_0$-ban kötött homotópia, és a ϕ magja$\}$ fogja adni a kétrétű fedést egy adott homomorfizmushoz.

Mivel Z_2 kommutatív, ez a leképezés áthúzódik az első homológiacsoporton, tehát $\hat{\phi} : H_1(X) \to Z_2$, ami pedig megintcsak megfelel egy $\tilde{\phi} \in H^1(X; Z_2)$. Ő lesz az első karakterisztikus osztályunk, $w_1(L)$ az *első Stiefel-Whitney osztály*. Továbbá a fent említett α_{ij} függvényekből elő tudunk állítani egy Z_2 kociklust. Lefedünk egy 1-cellát triviális környezetekkel, megszámoljuk hogy ahogy megyünk körbe az áttérési függvényekkel hány + és hány -1et látunk, ez adja a Z_2 kociklust (additívan ha több 1-cella van).

Az univerzálisból visszahúzottas példához, létezhetne egy univerzális kétrétű fedés, amiből visszahúzunk minden más kétrétű fedést (létezik is, elég az univerzális nyalábra eljátszani a fedőtérkonstrukciót, az egységgömbnyalábképzés, és a formális konex konbinációk inverz konstrukciók itt).

▼ A fedőterek sokkal könnyebben kezelhetőek, csak a szabad Z_2 hatásokat kell átlátnunk $\tilde{X}$-en. Továbbá ha van egy pontrahúzható terünk $\tilde{E}$, amin szabadon tud hatni Z_2, akkor az ide menő Z_2-ekvivariáns leképezések (ekvivariáns homotópiaosztályai, lásd később) klasszifikálják ezeket.

Mért? Feltehetjük, hogy ez a tér CW-komplex, és a hatás cellánként hat. $\tilde{X}$ 0-vázát leképezhetjük $\tilde{E}$-be valahogy, a párpontot a hatás szerint a párjába, az 1-cellák is párokban vannak állítva, a végpontok képei már megvannak, így ki tudjuk terjeszteni cellapáronként ekvivariáns módon. A 2-vázon mivel pontrahúzható beterjed a cellaperem, majd a tükörképére tükörképként terjesztjük ki, és így tovább. Ez valóban egy $\tilde{X} \to \tilde{E}$ ekvivariáns leképezés, mint állítottuk. Megtörténhet, hogy két leképezés ugyan azt a Z_2 hatást adják vissza, ha ők ekvivariáns módon homotópok: a homotópiák is visszahúzhatók hasonló gondolatmenettel $\tilde{E}$-ből. Így a hatás kiterjed a hengerre, és a két indukáló leképezés ekvivariáns homotóp, tehát ezzel még faktorálni kell a klasszifikációban.

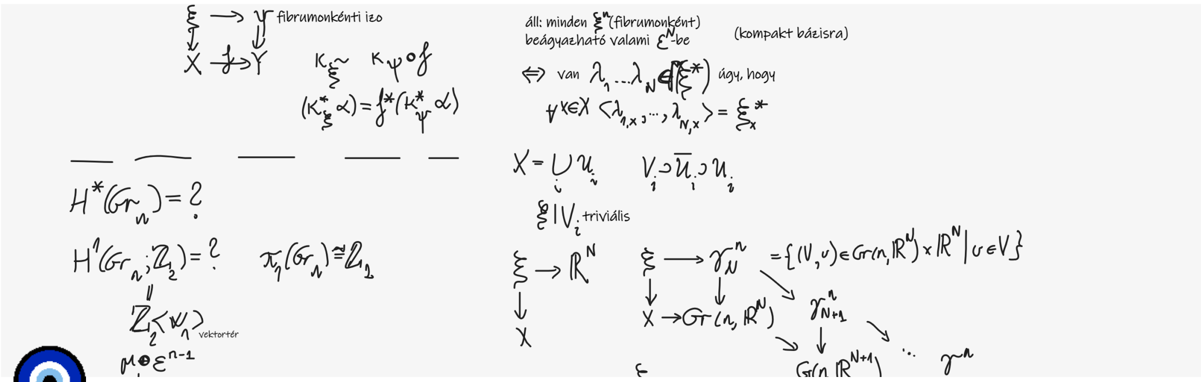
Ilyen $\tilde{E}$ teret pedig ismerünk, S^∞ megfelel a feltételeknek. Emiatt az $S^\infty \to \mathbb{RP}^\infty$ lesz az univerzális kétrétű fedés, alkalmazva a join konstrukciót kapjuk az univerzális vonalnyalábot. A konstrukciót tekintve minden RP^n-beli pont felett tekintjük az általa reprezentált egyenest R^(n+1)-ben, és ennek a pontjai lesznek a fibrum, a terünk ezen tautologikus nyalábok direkt limesze, az univerzális vonalnyaláb $\ell \xrightarrow{\mathbb{R}} \mathbb{RP}^\infty$.

Mivel ez egy vonalnyaláb, van Stiefel-Whitney osztálya. $w_1(\ell) \in H^1(RP^\infty, Z_2) = H^1(RP^2, Z_2) = Z_2$, hiszen később csak ≥ 3 dimenziós cellákat ragasztunk a térhez, ezek nem bántják az első kohomológiát.

> 💡 Ha van egy visszahúzott nyalábunk, akkor a függvényen visszahúzódik w_1 is.

$$\begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & L' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array} \Rightarrow w_1(L) = f^* w_1(L')$$

És ismerünk olyan vonalnyalábot, aminek az osztálya nem nulla, a végtelen Möbius-szalag.



2.

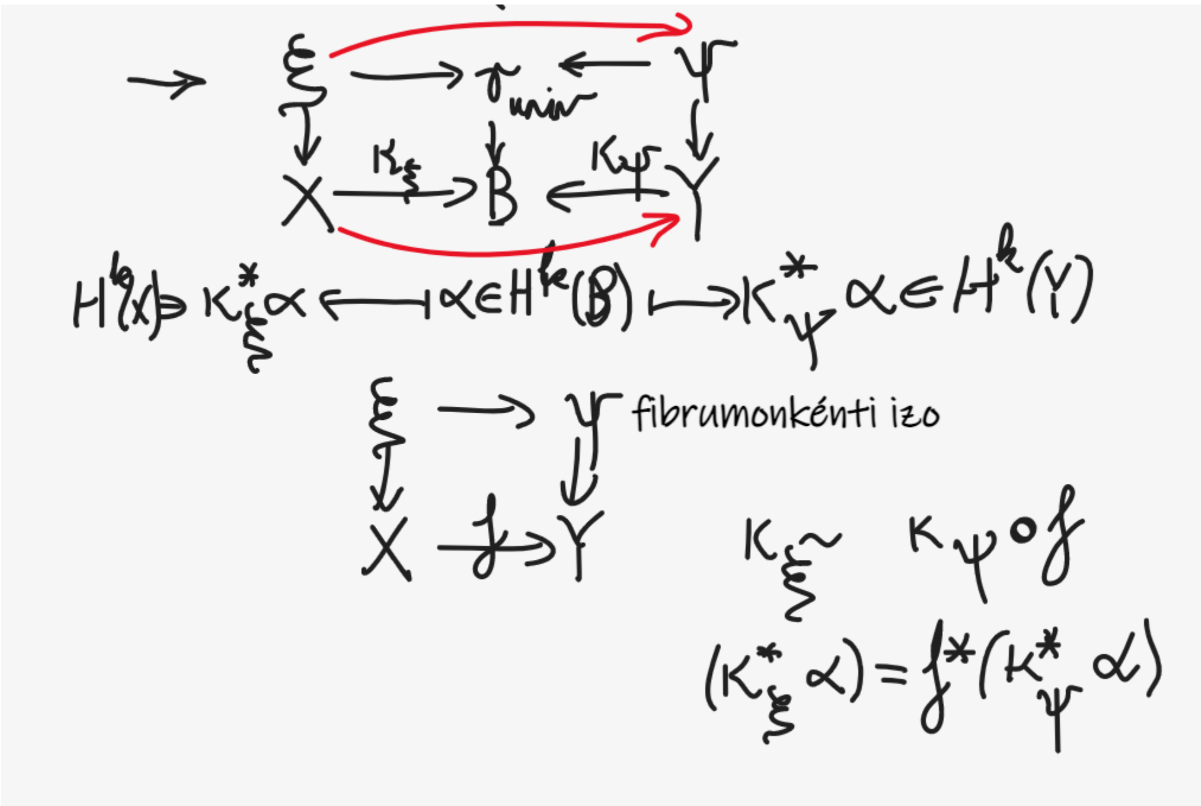
Volt: w_1 vonalnyalábokra. Most ezt akarjuk minden vektornyalábra definiálni.

$\xi \xrightarrow{R^n} X$ n rangú vektornyaláb. Ebből tudunk gyártani egy vonalnyalábot a determinánssal $\Lambda^n \xi \xrightarrow{R} X$.

> 💡 $\Lambda^k V = V^{\otimes k} / \{v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \sim sgn\pi \; v_{\pi 1} \otimes \cdots \otimes v_{\pi k}\}$ egy vektortér külső hatványa. Az n-edik csak a determináns, és többszöröseiből áll, mint algebrán tanultuk, ezt csináljuk fibrumonként, mivel a konstrukció természetes összeragad nyalábbá.

$w_1(\Lambda^n \xi)(\gamma) = 0$, ha a görbe mentén nem változik az irányítás, illetve 1 ha igen. Visszahúzzuk a nyalábot $\gamma^* \xi$-vé S^1 felett, és itt már tényleg lekövethető az irányítás.

Tegnaphoz hasonlóan, ha létezik egy klasszifikáló tér amiből mindenki visszahúzható (homotopikusan egyértelműen) és van egy kohomológiaosztályunk az univerzális vektornyaláb bázisában, azokat vissza tudjuk húzni szintén, hiszen jóldefiniált(/homotópia) a nyalábokat visszahúzó klasszifikáló leképezés. Továbbá ha van egy fibrumonkénti izomorfizmus két visszahúzás között, az kommutál a klasszifikáló leképezésekkel, és a karakterisztikus osztály is visszahúzódik.



A vonalnyalábok esetében RP^∞ kohomológiagyűrűje az egyváltozós $Z_2[w_1]$ polinomgyűrű, tehát elég a generátorelem visszahúzását megnézni, a többi nem ad semmit, hasonlóan ha egész együtthatóval nézzük, sem szolgál új információval.

Kellene az n-rangú vektornyalábok klasszifikáló tere. Ez nem annyira egyszerű, a triviális nyalábot tudjuk jól klasszifikálni, ezért beágyazzuk a nyalábunkat egy ilyenbe.

▼ Állítás: Minden ξ^n fibrumonként beágyazható valami ϵ^N-be.

Ha már tudnánk, hogy létezik, ez valójában N darab leképezést jelent $\mathbb{R}$-be (ugye koordinátánként). Jelöljük ezeket $\lambda_i \in \xi^*$. Tudniuk kell továbbá, hogy minden bázisponthoz ők feszítik a pont fibrumának a duális terét. Lefedjük a bázist trivializáló környezetekkel, ezekben választhatunk ilyen szeléseket persze, majd ezeket kiterjeszthetjük globálissá (egy kicsit nagyobb környezet is legyen még trivializáló), mivel kompakt a bázis ez véges sok szelés a megfelelő tulajdonságokkal.

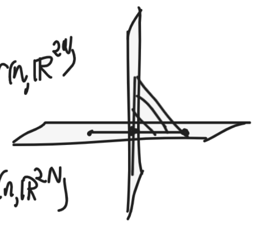
Ezzel X minden pontjához rendeltünk R^N-nek egy n dimenziós alterét. Tekintsük a $Gr(n, R^N)$ feletti tautologikus nyalábot ($\gamma_N^n := \{(V, v) \in Gr(n, R^n) \times R^n | v \in V\}$, és az első koordinátára vett projekció). Az imént konstruált leképezés egy fibrumonkénti izomorfizmust ad ebbe a nyalábba, tehát visszahúztuk belőle. Kényelmetlen még, hogy N-et választottuk, ezt teljesen hasonlóan a direkt limesz konstrukcióval orvosoljuk, adódik a $\gamma^n \to Gr^n$ nyaláb, belőle mindenkit vissza tudunk húzni az előbbiek szerint.

Egyértelmű-e ez? Húzza vissza $\kappa_1,\ \kappa_2$ is a nyalábunkat. Mivel kompakt a bázis, ezeknek a képe már valami véges $Gr(n, R^N)$ Grassmannban is benne van. Ágyazzuk be az egész szituációt $Gr(n, R^{2N})$-be, az első, illetve második N koordinátába. Minden pont feletti fibrum két képét lineáris homotópiával itt már összeköthetjük

$$X \xrightarrow{\kappa_1} Gr(n, \mathbb{R}^N) \xhookrightarrow{\text{első } N} Gr(n, \mathbb{R}^{2N})$$

$$X \xrightarrow{\kappa_2} Gr(n, \mathbb{R}^N) \xhookrightarrow{\text{második } N} Gr(n, \mathbb{R}^{2N})$$

ezeket lineáris homotópiával összeköthetjük



Látjuk tehát, hogy Gr^n kohomolóigái meghatároznak karakterisztikus osztályokat. Tehát mostmár $H^*(Gr^n)$-re vagyunk kiváncsiak. Ezt majd később tesszük meg, w_1-hez kevesebb is elég, $H^1(Gr_n, Z_2) =$? Ez megfelel az első homológiacsoportnak, tehát a fundamentális csoportot kell megértenünk n-dimenziós síkoknak valami nagy dimenziós euklideszi térben.

▼ Meggondolható, hogy ez csak attól függ, hogy milyen irányítással térünk vissza

Vegyünk egy bázist, és ezt vigyük magunkkal. Ha ugyanabba a bázisba érünk vissza, akkor nullhomotóp lesz a hurok. Választhatunk olyan páronként merőleges altereket hogy az i. bázisvektor vetülete nem nulla benne. A homotópia elején belevisszük ebbe az altérbe, és mostmár koordinátánként lekövethetjük a bázisvektorok mozgását, ez egy nagydimenziós gömb fundamentális csoportjában egy elem, tehát a bázisvektorok mozgása koordinátánként nullhomotóp. Ha a bázis ellentétes irányítással ér vissza, akkor az persze nem lehet nullhomotóp, vagyis $\pi_1(Gr_n) = Z_2$, és ennek a csoportnak a generátorát nevezzük w_1-nek.

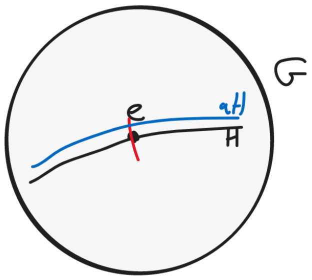
Látni akarjuk, hogy ez egy nemtriviális invariáns, kellene egy nem irányítható n-rangú vektornyaláb. Lusta megoldás $\mu \oplus \epsilon^{n-1} \to S^1$ a Möbiusz szalag.

CW kompleus feletti nyalábnál tekinthetjük a bázis vázfiltrálását, a 2-váz már elég ha egy H^1 elemre hajtunk ($sk_2 X \hookrightarrow X$ indukál egy $H^1(X) = H^1(sk_2 X)$ izomorfizmust). Megszoríthatjuk a nyalábot magát a 2-vázra, ha itt tudjuk definiálni a w_1-et már jók vagyunk. Ugyanakkor az első SW osztály mégiscsak az 1-vázon akarna élni. A pár egzakt sorozatából látjuk, hogy a megszorítás által indukált leképezés a kohomológiákon injektív (de nem feltétlen szürjektív), tehát megkeressük az 1-vázban az első SW osztályt, majd leellenőrizzük, hogy ez kiterjed-e a 2-vázra.

☐ 1. Mutassuk meg, hogy $Gr(n, R^N) \cong\ O(N)/(O(n) \times O(N-n))$!

Zárt részcsoporttal ha faktorizálunk egy Lie-csoportot akkor sima sokaságot kapunk. $G/H = \{\alpha H | \alpha \in G\}$. Az egységelemnek csinálunk környezetet. A faktoron G tranzitívan hat a $g(aH) = (ga)H$ formula szerint. Veszünk egy invariáns metrikát (a Haar egy számszorosa), ha G kompakt ez kétoldalról is invariáns lesz. Vesszük a H merőleges kiegészítőjét az egységelem érintőterében, ezen irányokban geodetikus görbékkel kapunk egy normálszeletet. Ezzel akarjuk azonosítani a faktort. Kellene, hogy minden az egységelemhez kellően közeli aH mellékosztály csak egy pontban metszi.

Az világos hogy legfeljebb egy pontban metszi, mert kellően közel egy mellékosztály őse egy affin altérnek felel meg az exponenciális leképezés alatt, továbbá az exp leképezés lokálisan bijektív, tehát legalább egy pontban el is metszi.



Most a balhatással eltolhatjuk ezt az egységelem körüli térképet mindenhova, látni kell még, hogy ezek a térképek simán vannak kapcsolva. $k \in U_g \cap U_h$ akkor $g^{-1}k \in U_e \ni h^{-1}k$

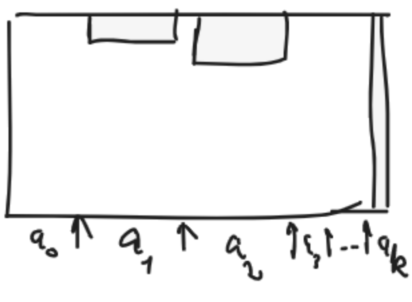
- [ ] 2. Bizonyítsuk be, hogy $Gr(n, R^N)$ egy $n(N-n)$ dimenziós sima sokaság!
- [ ] 3. Lássuk be, hogy $TGr(n, R^N) \cong \ Hom(\gamma, \gamma^{\perp})$, ahol $\gamma = (V, v) \in Gr(n, R^N) \times R^N : v \in V$ a tautologikus nyaláb, míg $\gamma^{\perp} = (V, v) \in Gr(n, R^N) \times R^N : v \perp V$ az ő merőleges kiegészítőjének csúfolt ikertestvére!

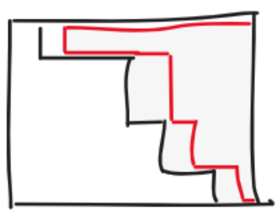
Grassmanok CW-felbontása

$\mathbb{R}^N$-ben vagyunk, rögzítünk egy bázist. Milyen k-dimenziós altereink vannak? Egy $k \times N$-es mátrix adja meg az alteret, erre persze még hathatunk balról egy invertálható $k \times k$-assal, vagyis végezhetünk Gauss eliminációt, és ilyen "háromszög" alakra hozhatjuk (már amennyire azt a mátrix alakja megengedi).

> 💡 Heads up, a vezéregyesek nem feltétlenül vannak egységmátrixként a mátrix elején!

$N - k = a_0 + a_1 + \dots a_k$ partíció (sorrenddel együtt!), a koordinátázásban az eliminált mátrixot írjuk le olyan módon, hogy a_0 darab csupa nulla oszlop van, majd a_1 darab olyan oszlop ahol az első elemet választhatjük meg, s így tovább. Ezt persze $\mathbb{R}^{\sum ia_i}$ paraméterezi, ez lesz egy nyílt cellája a Grassmannban. Meg kell még néznünk, hogy a határra ez hogyan terjed ki, hogy nem metsz bele nagyobb dimenziós cellába. A határ úgy fog kinézni, hogy néhány koordinátát kinullázunk, a többit beállítjuk, majd megszorozzuk t-vel és kitartunk a végtelenbe. Ennek megfelel az, hogy a szabad paramétereket lerögzítjük, és a vezéregyeseket leosztjuk t-vel, magyarán kinullázzuk őket. Erre újra kell futtatni az eliminációt persze. A határpont mintája olyan lesz, mint az előző, csak a vezéregyeseket eltoltuk jobbra, tehát valóban csökken a dimenzió.





Ez egy elég szép, konkrét megadás. A kialakult módszer a CW homológia megkapására a Schubert kalkulus, de mi máshogy fogjuk csinálni, kellene egy fibrálás HES homológiákra, ami teljes általánosságban nincsen (illetve spektrális sorozat, egy kétirányban gradált objektum és egy differenciál. Ennek a homológiái még mindig kétfelé gradáltak, és van egy újabb differenciál, ennek megint vesszük a homológiáit, és így tovább).

Ennek egy speciális esete: $\xi \to X$ vektornyalábnak tekinthetjük a gömbnyalábját, ezzel lehet egy HES csinálni kohomológiákra. A Grassmanok egymás felett fibrálódnak gömbfibrummal, megtalálhatjuk a vektornyalábokat amiknek ők a gömbnyalábjai és így megkaphatjuk a Grassmannok kohomológiagyűrűjét.

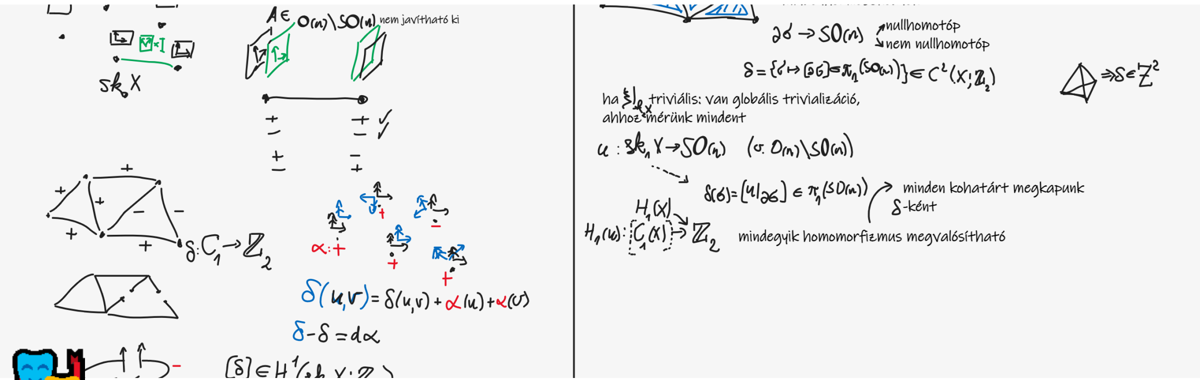
Nekünk csak a végtelen ortogonális csoport kell. $O(\infty)$ még értelmes, de nem feltétlenül látjuk a faktor homológiáit, hogy a végtelen Grassmannt kapjuk. Az $O(n) \subset O(n+k)$ inklúzió $n-1$-ig izomorfizmust indukál a homotopikus csoportokon, iteráltan faktorizálunk $(O(n+k)/O(n))/O(k)$-ban az első faktorizálás után az első $n-1$ homotopikus csoport nulla lesz.

$$\pi_j(O(n)) \xrightarrow{\cong} \pi_j(O(n+k)) \to \pi_j(O(n+k)/O(n)) \to \pi_{j-1}(O(n)) \xrightarrow{\cong} \pi_{j-1}(O(n+k))$$

a fibrálás HES egy része, látjuk hogy ha $j \leq n-1$, akkor itt sok izomorfizmus van, tehát utána 0-t kell hogy kapjunk a sorozatban. Ergo van egy magasan összefüggő terünk, rajta egy szabad $O(n)$ hatás, lásd S^n és Z_2 hatás rajta. Ennek a direkt limesze az $EO(k) \xrightarrow{O(k)} BO(k)$ nyaláb (a bázis megintcsak a végtelen k Grassmann), és meg is van adva a téren egy $O(k)$ hatás, ezeket hívjuk *principális G-nyalábnak* (tehát egy szabad G-hatás szerinti faktor, ekvivalensen egy G fibrumú fibrálás reguláris G-hatással a fibrumokon).

> 💡 Contrast mondjuk a projektív sík érintő egységgömbnyalábja, aminek szintén G a fibruma, de nem lehet megadni egy koherens hatást, mert az megirányítaná a nyalábot.

Általában is le tudunk gyártani univerzális G nyalábokat, mint egy pontrahúzható tér EG amin szabadon hat G, és hozzá egy klasszifikáló tár bázisnak BG. Általános konstrukciónk is van ilyenek gyártására. Vegyük G-nek a végtelen joinját, ezen átlósan hat G, ez megfelelő lesz.

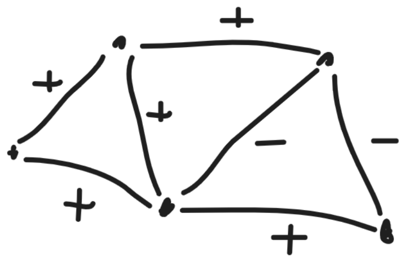


3.

Múltkor: általános vektornyalábokra w_1. Alternatív megközelítést befejezzük.

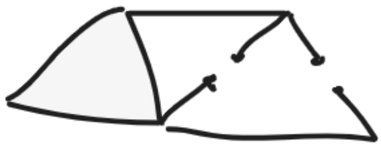
CW kompleus feletti nyalábnál tekinthetjük a bázis vázfiltrálását, a 2-váz már elég ha egy H^1 elemre hajtunk ($sk_2 X \hookrightarrow X$ indukál egy $H^1(X) = H^1(sk_2 X)$ izomorfizmust). Megszoríthatjuk a nyalábot magát a 2-vázra, ha itt tudjuk definiálni a w_1-et már jók vagyunk. Ugyanakkor az első SW osztály mégiscsak az 1-vázon akarna élni. A pár egzakt sorozatából látjuk, hogy a megszorítás által indukált leképezés a kohomológiákon injektív (de nem feltétlen szürjektív), tehát megkeressük az 1-vázban az első SW osztályt, majd leellenőrizzük, hogy ez kiterjed-e a 2-vázra.

Celladimenzió szerinti indukciót szeretnénk alkalmazni az 1-váz feletti vektornyaláb megkonstruálásához. A 0-váz felett persze csak triviális lehet $\sqcup \mathbb{R}^n$. Vegyünk egy 1-cellát, fölötte hogy néz ki a nyaláb? Fölötte is triviális lesz, hiszen pontrahúzható a cella, egy probléma, hogy a végpontokban már fixálva van egy trivializáció, ezzel nem feltétlenül illeszkedik a cellára választott trivializálás. Reméljük, hogy ez javítható. Az irányítás obstruál minket, ha megegyezik a végen levő irányítás, akkor egy rövid utat beszúrunk a cella végén $SO(n)$-ben az identitás és a végpont állása között, ha az irányítások eltérőek akkor nem tudjuk kijavítani, hiszen $O(n)$ két komponensből áll, egy homotópia nem tud ezek között váltani. Ha egyik végén sem illeszkedik, akkor a kiindulási trivializációt egy tükrözéssel komponálva még javítható. Így minden 1-cellát fel tudunk cimkézni aszerint, hogy a 0-cellákról rá kiterjed a trivializáció vagy sem.

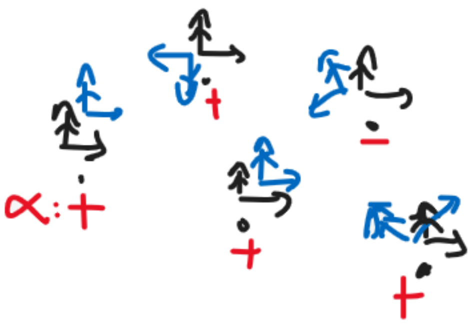


Az élek kompatibilitásai.

Ez valami $\delta : C_1 \to Z_2$ homomorfizmus. Állítjuk hogy ez egyértelműen leírja a szituációt, felvágjuk az éleket, efelett meg tudjuk csinálni a nyalábot, majd a $-$os felvágott éleket összeragasztjuk egy irányításfordító azonosítással. Volt viszont egy választás korábban, a 0-vázon vett trivializációk, ezektől hogy függ a konstrukció?



Az elvágott inkompatibilis élek.

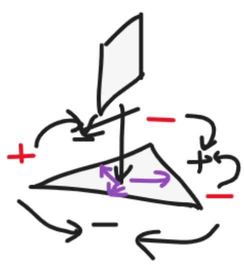


A 0-váz különböző trivializációi.

Minden pontjában a 0-váznak veszünk két trivializációt. Két ilyen trivializáció persze irányításban térhet csak el, ezt minden csúcsra ráírjuk. Elvégezve az előbbi konstrukciót mindkét trivializációra $\delta_1(u, v) = \delta_2(u, v) + \alpha(u) + \alpha(v)$, ahol $\alpha(u)$ 1, ha az adott csúcsban a két trivializáció irányítása megfelel, -1 ha nem. Erre ránézve az történik valójában, hogy δ az α kohatárával változik meg $\delta_1 - \delta_2 = d\alpha$ (figyelem, $\mod 2$ dolgozunk!).

Ergo két ilyen függvény egyazon nyalábot határoz meg, ha ekvivalensek $H^1(sk_1 X, Z_2)$-ben. Van-e olyan kohomológiaosztály, aki nem $H^1(X, Z_2)$-ből jön? Egy kohomológiaosztály pontosan akkot jön X-ből, ha kohatárral tudjuk őt reprezentálni, ergo $\forall \sigma \in C_2(X)$-re ($\delta(\partial\sigma) =$) $d\delta(\sigma) = 0$. Tehát ha valaki nem képbeli, akkor van egy 2 szimplex, aminek páratlan sok oldalán $\pm$-t vesz fel δ.

σ felett pontosan egy n-vektornyaláb van, ennek vehetünk egy trivializációját és ehhez mérünk mindent. Az előbb meggondoltak szerint feltehetjük, hogy az 1-cellákon ez megegyezik az eredetivel, a 0-cellákon tetszőlegesen választottunk, nem tudjuk beállítani, minden csúcs állhat jól, vagy rosszul, ezzel összevetve a globális trivializálással megint felcimkézhetjük az éleket.

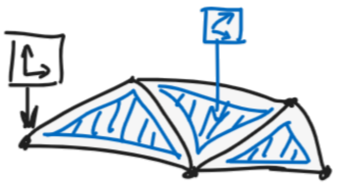


A δ a kettő cella határára megszorítva összeadja a két végpontban, hogy a globális trivializáció és az 1-vázon választott irányítása megegyezik-e, és ezeket összeadja, tehát az éleken kiértékelve 0-t kapunk mod 2, mindenki kétszer szerepel (ha amit az eddigi konstrukcióból kaptunk, az egy a 2-váz felett is definiált vektornyalábból származott).

Ezért valóban kapunk egy $H^1(X, Z_2)$-beli osztályt minden vektornyalábhoz egyértelműen. Leképezésekre is jól működik, CW-leképezésekre automatikusan visszahúzódik persze, hiszen az 1-vázon is ad egy leképezést, majd CW-approximáció. Ez lehet nem nulla, pl. a körvonal feletti nemtriviális vektornyaláb.

Milyen obstrukciónk van arra, hogy $\xi|_{sk_2 X}$ triviális legyen?

Ha már az 1-váz felett sem az, akkor persze tovább sem lehet, tehát feltesszük a későbbiekben hogy $\xi|_{sk_1 X}$ triviális (ekvivalensen $w_1(\xi|_{sk_1 X}) = 0$).



Az 1-, és 2-cellák trivializációi.

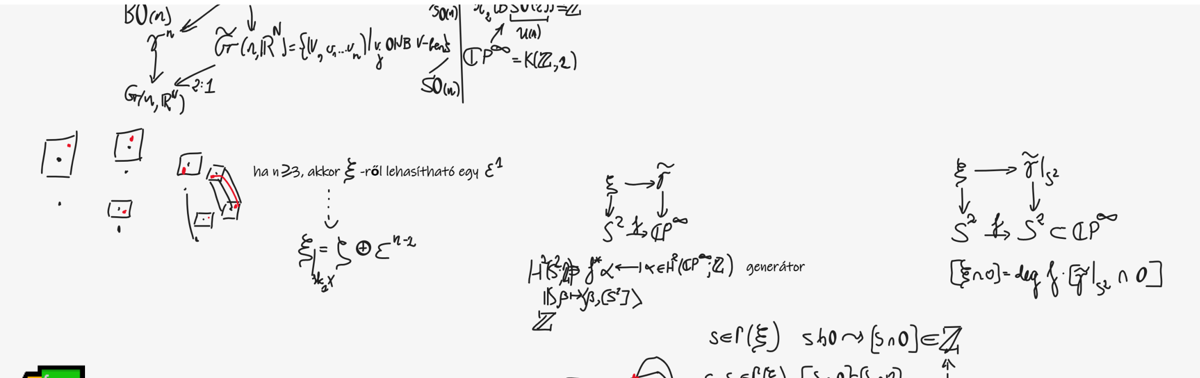
A 2-cellák felett egyesével megszorítva választható egy trivializáció (hisz pontrahúzható). Ez azonban nem biztos hogy illeszkedik az 1-cellák adott trivializációjával. Ha a fekete és a kék irányítása eltér, az egyiket megcsavarva elérhető hogy mindenhol illeszkedjenek, hiszen kifaktorálva a 2-cellákkal egy $sk_1 X \to O(n)$ folytonos leképezést kapunk, tehát mindenhol koherens az irányítás. Ugyanez megy minden magasabb dimenzióban is hasonlóan, tehát feltehető hogy az irányítások megegyeznek.

Tehát minden 2-cella pereméről van egy $\partial\sigma \to SO(n)$ leképezésünk, homotópia erejéig ilyenekből kétféle van (a trivializáció szélére beszúrhatunk egy homotópiát, ezért elég erre nézni). Ezzel megint kapunk egy $C^2 \to Z_2$ leképezést ($\{\delta : \sigma \mapsto [\partial\sigma] \in \pi_1(SO(n))\} \in C^2(X, Z_2)$).

Mely kohomológiaelemek állhatnak elő, ha $\xi|_{sk_2 X}$ triviális? Vegyünk egy globális trivializációt, bármely két ilyen vagy homotóp, vagy egy fix tükrözéssel vett kompozíció után homotóp (vehetünk egy fix azonosítást $O(n)$ két komponense között). A globális trivializációban felírva az 1-váz trivializációját látunk egy $u : sk_1 X \to SO(n)$ (vagy a másik komponensbe) leképezést. Mi lehet ez? $\delta(\sigma) = \sigma \mapsto [u|_{\partial\sigma}] \in \pi_1(SO(n))$ alakú leképezésünk van, továbbá u-hoz tartozik $Hu : H_1(X) \to Z_2$. Az 1-váz egy gráf, összehúzzuk egy feszítőfáját, minden hurkon vagy 0-ba vagy 1-be megy, meg is választhatjuk. Tehát tetszőleges ilyen homomorfizmust meg tud valósítani ilyen u, vagyis minden kohatárt megkapunk δ alakban.

> Állítás: $[G, X] = Hom(H_1(G), \pi_1(X$ ha G egy véges gráf. Ezt használjuk, amikor azt mondjuk, hogy az u minden homomorfizmust elér.

Ha van egy 3-cellánk, a peremén δ mindenképpen 0-ként értékelődik ki mint az előbb, minden lapon megnézzük, hogy a középponthoz képest hogyan áll, minden lap minde élére, ergo minden él kontribúciója 0. Ismét az előbbihez hasonlóan látjuk, hogy két ilyen osztály kohatárban tér el. Ez ad egy újabb invariáns osztályt, ami pontosan akkor nulla, ha a nyaláb a 2-vázon triviális.



4.

Van egy vektornyalábunk, melyre $w_1 = 0$ (vagyis irányítható, sőt irányított). A múlt órán kaptunk egy újabb invariáns osztályt ezekre, ami 0, ha a 2-váz fölött triviális.

A $\xi \to X$ irányítható pontosan akkor, ha ő visszahúzható az univerzális irányítható nyalábból. Ennek a struktúracsoportja $SO(n)$ ($\gamma^n_{SO(n)} \to BSO(n)$), ennek a második kohomológiájában találunk egy osztályt az eddigiekkel hasonlóan, $w_2 \in H^2(BSO(n); Z_2) =$

$\pi_2(BSO(n)) = Z_2(\text{ha } n \geq 3)$, (az egyenlőség a Hurewicz miatt lesz), ez megintcsak természetes módon viselkedik a visszahúzásokkal.

$$\begin{tikzcd} \xi \arrow[r] \arrow[d] & \gamma^n_{SO} \arrow[d] \\ X \arrow[r] & BSO(n) \end{tikzcd}$$

Kisebb dimenziókban $\pi_2(BSO(2)) = Z$, mivel $SO(2) = U(1)$, ez a tér a múlt órai $O(1)$ konstrukcióval analóg módon $CP^\infty = K(Z, 2)$ lesz. Tehát a 2-nyalábokra egy egészegyütthatós invariánsunk van. Mivel ez egy Eilenberg-Mclaine tér, itt is egyértelműen meghatározza a klasszifikáló leképezéseket az, hogy a fundamentális osztályt hogyan húzzák vissza.

> 💡 A fibrálás egzakt sorozata, és a totális tér pontrahúzhatósága miatt $\pi_2(BSO(2)) = \pi_1(SO(2))$.

Példa: $BSO(3)$ már nem eilenberg-Mclaine, van 2,4. homotopikus csoportja (mert $SO(3) = RP^3$), itt nem lesz elég egy kohomologikus adat, hogy megadja a klasszifikáló leképezéseket.

Mit tudunk kezdeni nemirányítható nyalábokkal? $\gamma^n \to BO(n)$ az univerzális nyalábunk, $BO(n) = Gr^n$ volt, a végtelen n-Grassmann. Ugyanezt eljátszhatjuk azzal az extrával, hogy megjegyezzük az alterek irányítását, definiáljuk az irányított Grassmann sokaságokat.

$\tilde{G}r(n, R^N) = \{(V, v_1, \ldots, v_n) | v_i \text{ rendezett ONB V-ben}\}/SO(n)$, és efelett vehetjük a tautologikus nyalábot. Van egy természetes kétrétű fedés innen az irányítatlan Grassmannra, ez átmegy a tautologikus nyalábok szintjére egy fibrumtartó leképezésként. $BO(n)$ fundamentális csoportja Z_2, tehát nincs is választásunk igazából erre a fedésre, $BSO(n)$ az univerzális fedés lesz.

Meggondoltuk, hogy $BSO(2) = CP^\infty$, keresünk teret amit ő kétrétűen fed, ergo egy szabad Z_2 hatást. A véges komplex projektív terekben a valós projektív terek n kodimenziósak, őket kidobva az első $n-1$ homotopikus csoportot nem bántjuk genericitás miatt, ergo ha a direkt limeszt tekintjük egy a végtelen komplex projektív térrel homotopikusan ekvivalens dolgot kapunk, ezen a konjugálás már szabadon hat, hiszen a fixhalmazát hagytuk el, faktorként kapjuk a fedést, ő lesz $BO(2)$.

Látni szeretnénk a kohomológiáit most ennek a térnek, de most nem megy.

Hogy tudjuk még megnézni a 2-váz fölött a vektornyalábokat? Az 1-váz felett mindenki vagy a triviális, vagy a möbius-szalag plusz triviálisok, számíthatunk-e ilyesmire a 2-váz felett?

Igen, induktíven definiálhatunk egy nemnulla szelést, ami lehasít egy triviális irányt. A 0-vázon tetszőlegesen megadhatjuk, az 1-vázon összeköthetünk nemnulla módon két vektort a végpontokban, ha $n \geq 1$, és a 2-vázra be tudjuk ezeket terjeszteni, ha $n \geq 3$. A 2-rangú nyalábot klasszifikálja a $BO(2)$-be menő leképezés, az eredeti nyalábhoz (a levagdosás előtt) is ezt az értéket fogjuk rendelni.

- [ ] Két nyaláb összegének a w_1-e az összeadandók w_1-einek összege.

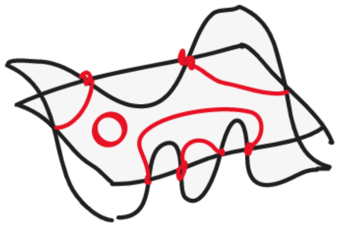
Visszahúzunk egy kör fölé, minden leképezés vagy az identitással, vagy az első koordinátára való tükrözéssel homotóp. A kört kettévágva a szakasz két végét vagy identikusan, vagy egy tükrözés mentén kell ragasztani, az áttérési mátrix az összegben blokkdiagonális lesz. Ebből látjuk, hogy $w_1(\xi \oplus \eta) = w_1\xi + w_1\eta$.

Tenzorszorzatnál hasonló módszert alkalmazunk, ha mindkettő irányítható akkor identikusan ragasztunk, ha ξ nem irányítható, akkor lesz $dim\eta$ darab -1-es elem a ragasztási mátrixban, hasonlóan ha η nemirányítható, illetve ha egyik sem, akkor $\dim\xi + \dim\eta - 2$ darab, tehát $w_1(\xi \otimes \eta) = rk\eta w_1\xi + rk\xi w_1\eta$.

w_2 geometriai értelmezése.

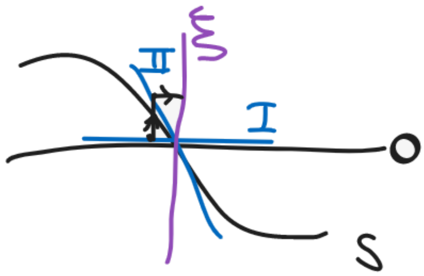
A 2-kohomológia generátora azt nézi meg, hogy a láncban hányszor van benne a 2-cella, ezt visszahúzva S^2-re kiértékelhetjük az egész sokaságon, mint 2-cellán, ez azonosítja a $H^2(S^2, Z)$-t Z-vel. Ez megfelel annak, hogy a klasszifikáló leképezésnek mennyi a foka. De ezt a számolást nagyon kellemetlen végigvinni.

$$\begin{tikzcd} \xi \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{\gamma} \arrow[d] \\ S^2 \arrow[r] & \mathbb{C}P^\infty \end{tikzcd}$$



Emlékszünk algebrai geometriára, veszünk egy szelést, ami transzverzális a nullszelésre és megszámoljuk a metszeteket. Ez független a szelések választásától, a szelések tere pontrahúzható, hiszen mindenki homotóp a nullával, következik hogy bármely két szelés homotóp, magát a homotópiát is transzverzálissá tehetjük a 0-ra, a nullszelést egy 1-dimenziós peremes sokaságban metszi a homotópiánk, ide szeretnénk koherens irányításokat adni a metszéspontoknak, ez jelentené azt, hogy a homotópia két végén a metszetek száma megegyezik.

Megirányítjuk a nullszelést, illetve a fibrumokat, illetve a totális teret, és megnézzük, hogy az $O + TGraph(s)$ irányítás ebben a sorrendben megegyezik-e a totális tér irányításával. Máshogy, ξ fibrumai és a homotópia grafikonja között egy lineáris izomorfizmust ad az érintőleképezés, mindkettő meg van irányítva, ez is ugyanez az előjel.

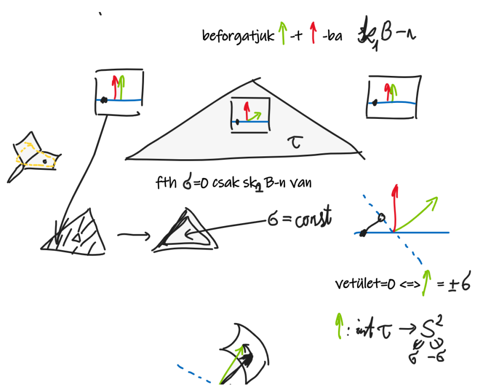


Ugyanezt eljátszhatjuk a diagram másik oldalán, veszünk egy szelést ami transzverz a nullszelésre, majd az univerzális térből visszahúzzuk. Minden CP^n-ben vehetünk egy 0-ra transzverz szelést, f-et is transzverzzé tehetjük a nullszelésre, ekkor a visszahúzott pont megfelelő lesz.

$$\begin{tikzcd} \xi \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{\gamma}|_{S^2} \arrow[d] \\ S^2 \arrow[r, "f"] & S^2 \subset \mathbb{C}P^\infty \end{tikzcd}$$

Máshogy, a $\tilde{\gamma}$-ot megszorítjuk az S^2-re, és itt nézzük az f-et. Visszahúzzuk a szelést és minden pontban azonos előjelekkel húzódik vissza a szelés nullhelye, de még megcsavarodik a tér df-el. Tehát $[\xi \cap 0] = \deg f[\tilde{\gamma}|_{S^2} \cap 0]$.

- [ ] HF Számoljuk ki, hogy mennyi is az univerzális nyaláb S^2-re vett megszorításának, ergo a CP^1 feletti tautologikus nyalábnak ezt a metszetszámát.



5.

Egy kettő rangú $\xi^2 \to B$ nyalábhoz egy 2-dimenziós CW-komplex felett hozzárendeltünk egy $w_2 \in H^2(B, Z_{(2)})$-t a múltkor (Z ha irányítható, Z_2 ha nem). Lehasítgattunk egy-dimenziós résznyalábokat, lehet, hogy különböző módokon különböző w_2 adódik? Például $TS^2 \oplus \epsilon^1 = \epsilon^3$, de a gömb érintőnyalábja nem triviális.

> A vektormező indexe megegyezik a szelés metszésszámával az érintőnyaláb esetében.

$\eta^n \to B$, ahol $\dim B = 2$. Lehasítgatjuk kétféle módon: $\xi^2 \oplus \epsilon^{n-2}$, illetve $\psi^2 \oplus \epsilon^{n-2}$, itt akarjuk a w_2-t összehasonlítani. Egy triviális nyaláb lehasítása igazából egy nem 0 szelés megválasztása, ezeket kellene összekötni nem 0 széléseken keresztüli homotópiával. Két nem 0 szelés egy kétdimenziós teret feszít, homotópiával együtt egy 3-dimenziós dolgot feszít, ez lehet transzverzális a kétdimenziós nullszelésre, tehát $\xi \oplus \epsilon^1 = \psi \oplus \epsilon^1$. Vegyük ξ-nek egy szelését, át akarunk térni a másikra. Az első nyaláb triviális részét akarjuk elforgatni a másikba. A 0-váz felett ez persze megy. Az 1-váz felett is triviális a nyaláb, azonosíthatjuk a fibrumokat mind R^3-al, a szakaszok végpontjain a két fajta ϵ_1 irány megegyezik, amíg a két irány nem ellentettje egymásnak, addig a legrövidebb íven el tudjuk forgatni, és ezt feltehetjük, az irányok egy 2-dimenziós dolgot alkotnak, generikusan elkerüli a ψ-hez tartozó a ξ-hez tartozó -1szeresét. Most a 2-vázon úgy választunk trivializációt, hogy az egyik legyen a z irány. A másik ezzel megegyezik a peremen, belül valahogy forog. Átforgatni nem fogjuk tudni, az egyik komplementerének egy szelését át akarjuk vinni a másikra.

Kivisszük a piros szelésének a nullhelyeit az 1-vázra. Ha van egy nullánk egy 2-cella belsejében, akkor veszünk egy kis gömbkörnyezetet körülötte, ami belemetsz az 1-vázba. Gömb pontrahúzható, felette triviális a nyaláb, ez csak egy függvény a bázisból R^n-be, ezt a függvényt változtathatjuk tetszőlegesen.

Beljebb megyünk egy kicsit egy 2-cellába, egy kis galléron konstanssá deformáljuk, és így terjesztjük be a szimplxre. Ez megtehető, az obstrukció a körülfordulási szám, de tudjuk, hogy *valahogy* beterjed, így konstansként is be tudjuk forgatni (ez lesz σ). Továbbá, egy kis galléron is még feltehető, hogy a két normálirány megegyezik, nem csak az 1-vázon. Tehát a galléron a két normálszelés egyezik meg, a szelés csinálhat bármit, belül pedig nem egyezik a két normálirány, de a szelés konstans. A konstans részen levetítjük a szelést a másik normálirány komplementerére, ott lesz nullása, ahol a normálirány párhuzamos a szelés irányával, ez multiplicitással pont annyi lesz, mint ahányszoros értéke a szimplex belsején értelmezett normálirány mint S^2-re menő függvénynek a $\pm\sigma \in S^2$.

Ez a lokális foka a függvénynek a $\pm\sigma$-ban. $-\sigma$-ban mindig jó irányításunk van, σ-ban dimenziófüggően előjelet kapunk. Mivel a lokális fok független attól hogy hol mérjük, tehát összesen páros sok nullhelyet találunk, és $w_2(\xi) = w_2(\psi) \mod 2$.

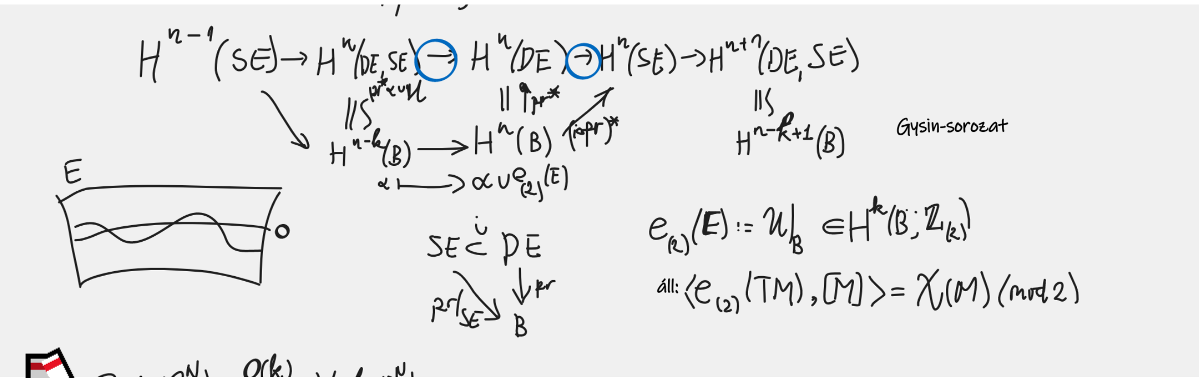
A lokális fok, és a nullhely előjele.

Thom-osztály, Euler-osztály

$\xi^k \to M^n$ egy k dimenziós vektornyaláb egy n dimenziós sokaság felett, vegyük egy szelését $\sigma \in \Gamma(\xi),\ \sigma \pitchfork 0$, ekkor a 0 őse egy $n-k$ dimenziós részsokaság M-ben, ha mindenki irányított, akkor ezen a részsokaságon is kapunk egy irányítást. Ekkor $\sigma^{-1}(0)$-nak megfelel egy $[\sigma^{-1}(0)] \in H^k(M, Z_{(2)})$. Állítjuk, hogy ez az osztály független σ választásától, és a bizonyítás azonos azzal mint amit az előbb csináltuk, két szelés között vehetünk egy homotópiát, ez is vehető transzverznek a bázisra, a homotópia egy bordizmus a két sokaság között, ekkor ők persze azonos kohomológiaosztályt reprezentálnak, tehát a Poincaré duálisuk is egyenlő. Ezt nevezzük a ξ Euler osztályának, $e_2(\xi) = [\sigma^{-1}(0)] \in H^k(M, Z)$.

A Thom osztályhoz tekintsünk egy $\xi^k \to B$ nyalábot, és a $H^k(E\xi, E\xi \setminus 0) = H^k(D\xi, S\xi)$ csoportot. Minden fibrumban egy gömböt nézünk modulo a határa, $H^k(D^k, \partial D^k)$, minden fibrum be van ágyazva a térbe, tehát van egy leképezésünk $H^k(D\xi, S\xi) \to H^k(D^k, \partial D^k) = Z$, és ha lerögzítjük a golyó egy irányítását, akkor van egy kanonikus generátorunk. Állítjuk, hogy ez a kanonikus generátor egyértelműen "visszahúzható", pontosan egy ősképe van ι^*-nál.

Ha van egy V trivializáló környezetünk, az egész történést megszoríthatjuk rá, $H^k(V \times D^k, V \times S^k)$, a Künneth formulát alkalmazzuk, az V-ból a 0 fokot, a D^k, S^k-ból pedig a k fokot választjuk, ez fogja megadni a generátort, nevezzük ezt az osztályt u-nak. Állítjuk, hogy ezek az osztályok két trivializáló környezeten megegyeznek. Ez az osztály azt csinálja, hogy egy függvény 0-beli lokális fokát értékeli ki, és ezen egy lineáris transzformáció legfeljebb előjelet tud váltani, ha nem volt irányított a nyalábunk. Tehát ezek az u-k összeragadnak egy globális kohomológiaosztállyá (ez pl. a Mayer-Vietorisból könnyen látszik). Ezt fogjuk a nyaláb Thom-osztályának nevezni, ha minden irányítva van, egész együtthatókkal is működik.



6.

Thom osztály folyt.

Egy olyan kohomológiaosztály$\in H^k(E, E \setminus 0; Z_{(2)})$ az $E^k \to B$ nyalábhoz, ami minden fibrumban a generátort (esetleg az irányítás által adottat, vagy a $\mod 2$-t) reprezentálja.

Ott fejeztük be a múltkor, hogy Mayer-Vietoris, itt $pr^{-1}(v) = E_v$

$$H^{k-1}(E_v \cap E_w) \to H^k(E_v \cup E_w) \to H^k(E_v) \oplus H^k(E_w) \to H^k(E_v \cap E_w)$$

Valójában itt a nullszelés komplementerére vett relativizálást vesszük, csak nem írjuk ki! $H^k(E_v, E_v \setminus 0)$

A kohomológiagyűrű

$$H^*(E_v, E_v \setminus 0) = H^*(V \times R^k, R^k \setminus \{0\}) = H^*(V) \otimes H^*(R^k, R^k \setminus \{0\}),$$

a második tag a tenzorszorzatban $Z[k]$(=Z, ahol a generátor a k. grádicson van), hiszen ez a k-gömb kohomológiagyűrűje, tehát ez végülis $H^*(V)[k]$-val eltolva.

Ebben a gyűrűben minden szorzat nulla, mert a tenzorszorzat bal tagjában is minden szorzat nulla, az egységelem nem a 0 fokon van.

Ebből kinyerhetünk egy $\Phi_v : H^*(V) \to H^{*+k}(E_v, E_v \setminus 0)$ izomorfizmust az additív csoportján ennek a két gyűrűnek. Ez a leképezés az $\alpha \mapsto \alpha \smile U_v$-ként hat ($\alpha \otimes \ell$-be képez, ahol $Z[k] =< \ell >$).

Az előbbi izomorfizmus miatt $H^{k-1}(E_v \cap E_w) = 0$. Az U_v és az U_w generátorok ugyanabba az elembe szorulnak meg a metszeten, tehát ők a magban vannak, következésképpen ők egyértelműen jönnek az unió kohomológiáiból.

$(V \cup W) \cup X$ egy új környezet, azt szeretnénk, hogy $(V \cup W) \cap X$-en ugyanazt kapjuk. Mindkét tagon egyértelműen van egy olyan osztály, ami a fibrumok kohomológiáját generálja. Ugyanígy tudjuk azt is mondani, hogy ha két nyílt felett egyértelműen van egy ilyen kohomológiaelemünk, akkor az unió felett is.

Kell még, hogy $H^{k-1}(V \cap W, V \cap W \setminus 0) = 0$, de ez megint egy Mayer-Vietorisból világos, a koordinátakörnyezetekben minden k-nál kisebb fokú kohomológia nulla, nullák veszik közre az uniót a sorozatban, tehát az unión is nulla (lefedtük a metszetet koordinátakörnyezetekkel).

A bázisban van egy nagyon hasonló Mayer-Vietoris, és a kettő között haladnak a $\Phi_V,\ \Phi_W,\ \Phi_{V\cap V}$ izomorfizmusok, az 5 lemmából látjuk, hogy $H^{n-k}(V \cup W) = H^n(E_V \cup E_W, E_V \cup E_W \setminus 0)$, az uniók között a $pr^*(\alpha \smile U_{V\cup W})$ leképezés megy, leellenőrizhető, hogy valóban kommutatív lesz, tehát valóban izomorfizmus. Következésképpen definiálva van a globális Thom osztály, sőt izomorfizmus van a bázis kohomológiái, és a totális tér egy relatív kohomológiája között, ami gyakorlatilag a Thom-osztállyal való szorzás, ezt is róla nevezzük Thom izomorfizmusnak.

$$\Phi : H^*(B) \xrightarrow{\sim} H^{*+k}(E, E \setminus 0) = \bar{H}^{*+k}(TE)$$

Ami tovább megegyezik a vektornyaláb Thom terének a redukált kohomológiájával.

$H^*(B) \to H^{*+k}(DE, SE)$ alakú a Thom izomorfizmus, hogy viszonyul ez a golyó és gömbnyaláb hosszú egzakt sorozatához?

$$H^{n-1}(SE) \to H^n(DE, SE) \xrightarrow{(2)} H^n(DE) \xrightarrow{(1)} H^n(SE) \to H^{n+1}(DE, SE)$$

A golyónyaláb megegyezik a bázissal persze, a párra pedig van a Thom izomorfizmus $H^n(DE, SE) = H^{n-k}(B),\ H^n(DE) = H^n(B)$, milyen leképezéseket látunk ezen azonosítások elvégzése után?

Az (1) golyónyalábból a gömbnyalábba az $(i \circ pr)^*$ a leképezés, a pr^* homotopikus ekvivalencia a bázis és a golyónyaláb között, ezt komponáljuk a beágyazással. A $H^{n-k}(B) \to H^n(B)$-nél a Thom osztályt akarjuk megszorítani a nullszelésre, és ezzel szorozni, valamilyen értelemben. B-t azonosítjuk a nullszeléssel, ebben van egy k-láncunk, ehelyett veszünk egy generikus szelést, és ezen már ki tudjuk értékelni a Thom-osztályt, megszámoljuk megintcsak a metszetpontok számát (esetleg mod 2). Ezt fogjuk *Euler-osztály*nak nevezni, ez a Thom osztály megszorítása a bázisra.

Állítás: $e_{(2)}(TM)([M]) = \chi(M)$ (esetleg mod 2, ha nem irnyítható).

Ezek szerint tehát a (2) leképezés pont az Euler osztállyal való szorzás, $\alpha \mapsto \alpha \smile e_{(2)}(E)$. Az így kapott hosszú egzakt sorozatot *Gysin-sorozat*nak hívják.

Ezekkel már megpróbálhatjuk a Grassmannok kohomológiáit kiszámolni. $Gr(k, R^N) \xleftarrow{O(k)} V(k, R^N)$ egy principális $O(k)$ nyaláb, továbbá $V(k, R^N) \xrightarrow{V(k-1,R^{N-1})} S^{N-1}$ is egy nyaláb, ha kiválasztjuk az egyik tüskéjét (első bázisvektorát) minden altérnek. Ilyenfajta redukcióra hajtunk a Grasmannok felett. $\gamma_N^k \setminus 0 \to Gr(k, \mathbb{R}^N)$, a pontozott totális térből tudunk vetülni megintcsak $S^{N-1} \times (0, \infty)$-be, a fibrum $Gr(k-1, \mathbb{R}^{N-1})$, a totális tér $S\gamma_N^k \times (0, \infty)$, hiszen a nullát kidobtuk. Eltartva N -el végtelenbe látjuk, hogy $S\gamma^k \sim Gr_{k-1}$.

$$\dots \to H^{n-1}(S) \to H^{n-k}(B) \xrightarrow{\smile e(\xi)} H^n(B) \longrightarrow H^n(SE) \to \dots$$

Normalizálva van egy $S\gamma_N^k \xrightarrow{Gr(k-1,\mathbb{R}^{N-1})} S^{N-1}$ fibrálásunk. A bázis $N-2$-ekvivalens a ponttal. A cellafelbontásból látjuk, hogy a fibrum $N-k-1$ ekvivalens a végtelen $k-1$ Grassmannal. Kellene egy cellafelbontás a totális tér gömbnyalábjának.

> Ha egy D^m-et ragasztunk a bázishoz, a cella felett a direkt szorzat fog megjelenni, $D^m \times S^{k-1}$, ezt meg tudjuk oldani úgy, hogy csak m és nagyobb dimenziós cellákat ragasztunk be a térbe.

Tehát a totális tér $N-k$ ekvivalens $S(\gamma^k)$-val. Ha tehát felírjuk a Gysint a végtelen tautologikus nyalábra, vagy valamely végesre, akkor egy bizonyos szintig ugyanazt fogjuk látni. Világos, hogy a fibrum beágyazása a végtelen gömbnyalábba homotopikus ekvivalencia.

A teljes $S\gamma_N^k \to Gr(k, \mathbb{R}^N)$-re is felírva a Gysint látjuk, hogy

$$H^{n-1}(Gr_{k-1}) \to H^{n-k}(Gr_k) \xrightarrow{\smile e_{(2)}} H^k(Gr_k) \to H^n(Gr_{k-1})$$

Állítjuk, hogy ebből kiszámolhatóak a Grassmannok kohomológiagyűrűi.

1. $H^*(Gr_1) = H^*(RP^\infty) = Z_2[w_1]$
2. Állítjuk, hogy $H^*(Gr_2) = Z_2[w_1, w_2]|_{\deg=2}$, ahol a w_2 szimbólum a totális tér euler osztálya. $\to < w_1^{n-1} > \to$ $H^{n-2}(Gr_2) \to H^n(Gr_2) \to < w_1^n > \to$ tehát $H^n(Gr_2) = H^n(Gr_1),\ n < 2$. Az első nemtriviális helyen a $H^0(Gr_2) \to H^2(Gr_2)$ az Euler-osztállyal való szorzás, állítjuk, hogy ez injektív, mert a 2-Grassmann összefüggő, utána pedig az előbb megállapított izomorfizmust látjuk, ezért a 2. grádicson is izomorfizmus van.

7.

Grassmannok kohomológiagyűrűje Gysinnel folytatás.

$Gr_{k-1} \to Gr_k$ a fibrálás, a totális tér homotóp ekvivalens $S\gamma^k$-val.

Állítjuk, hogy $H^*(Gr_k, Z_2) = Z_2[w_1, \dots, w_k]$.

$$H^{n-1}(Gr_2) \to H^{n-1}(Gr_1) \to H^{n-2}(Gr_2) \to H^n(Gr_2) \to H^n(Gr_1)$$

a Gysin megfelelő része, indukcióval tegyük fel, hogy az $n-1$. grádicsig már megvan az izomorfizmus. Az első nyíl szürjektív az indukciós feltevésből, a következő tehát nulla, és így az utánalevő injektív, és mivel ez a leképezés az euler osztállyal való szorzás, ezért minden w_2-vel osztható polinom benne van az n. lépcsőfokban. A természetes leképezés, ami $Gr_2 \leftarrow \gamma^2$-ből a $\gamma^1 \oplus \epsilon^1$ nyalábot húzza vissza megtartja a karakterisztikus osztályokat. Meggondoljuk, hogy ez a direkt összeg pont a gömbnyaláb (?) Az egységgömb minden pontja meghatároz egy $k-1$ dimenziós alteret, és ez előáll minden k-altérből, ami ráilleszkedik. Ez egy vetítés Gr_{k-1}-be, a visszahúzott nyaláb $Gr_{k-1} \oplus \epsilon^1$, és $w_1(\gamma^2) \mapsto w_1(\gamma^1 \oplus \epsilon^1) = w_1(\gamma^1)$, tehát a nyíl szürjektív is, és az n. fokon is megkaptuk az összes w_1, w_2-ben felírt polinomokat. Ez a $k=2$ esetet befejezi. A többi teljesen hasonlóan jön ki, legalább kettővel csúszik a sorozat egyik része

$$H^{n-1}(Gr_k) \to H^{n-1}(Gr_{k-1}) \xrightarrow{0} H^{n-k}(Gr_k) \xrightarrow{\smile e = w_k} H^n(Gr_k) \twoheadrightarrow H^n(Gr_{k-1})$$

> 💡 Ugyanez a gondolatmenet működik az U-val is, $H^*(Gr_k^{\mathbb{C}}; Z) = Z[c_1, \dots, c_k]$, működik Z felett, mert kanonikus irányításunk van.

- ▼ Állítás: $2e(\xi^{2k+1}) = 0$, ha ξ irányított páratlan dimenziós (valós) vektornyaláb.

  Ha $\sigma \in \Gamma(\xi)$, $\#\sigma \pitchfork 0 = -\#(-\sigma \pitchfork 0)$, mert a tükrözések megfordítják az irányítást.

$H^*(RP^\infty, Q) = H^*(*)$, racionális együthatókkal egy kétrétű fedésnél a fedőtranszformáció indukált leképezésének a pozitív alterét kell venni, ez lesz a fedett tér kohomológiája. $H_*(E) \xrightarrow{p} H_*(B)$, és van egy inverze is visszafelé, a kompozíció a rétegszámmal való szorzás. Következik például, hogy racionálisan mindegy, hogy a Grassmannt, vagy az irányított Grassmannt tekintjük, hiszen kétrétűen fedik egymást, $H^*(Gr_k; Q) = H^*(\tilde{Gr}_k; Q)$. $H^*(CP^\infty; Q) = Z[e]$. Most ezen felbuzdulva az irnyított Grassmannok kohomológiája Q felett.

$$H^{n-1}(\tilde{G}r_k) \twoheadrightarrow H^{n-1}(\tilde{G}r_{k-1}) \xrightarrow{0} H^{n-k}(\tilde{G}r_k) \xrightarrow{\smile e = w_k} H^n(\tilde{G}r_k) \twoheadrightarrow H^n(\tilde{G}r_{k-1})$$

Ha $2|k$, $0 \neq e \in H^k(\tilde{G}r_k)$, megpróbáljuk ugyanezt, feltesszük, hogy a $H^*(\tilde{G}r_{k-1})$-et karakterisztikus osztályok generálják, továbbá az előző indukciós feltevésekkel élve látjuk, hogy $H^*(\tilde{G}r_k) = H^*(\tilde{G}r_{k-1})[e]$.

Ha $2 \not| k$, a hosszú egzakt sorozat felbomlik, mert az euler osztály torzió, tehát nulla ha Q felett vagyunk. Ebből a következő adódik:

$$0 \to H^n(\tilde{G}r_k) \to H^n(\tilde{G}r_{k-1}) \to H^{n-k+1}(\tilde{G}r_k) \to 0$$

Nincs nemtriviális bővítés Q-nál, tehát minden grádics valami szorzat lesz. Például $k = 3$-nál az első két szinten izomorfizumus van, utána $n = 2, k = 3$-ra látjuk, hogy $H^2(Gr_3) = 0$, majd a következő szinten $H^4(Gr_3)$ rangja egy lesz, mert $H^2(Gr_3)$-t nulla. Tehát $H^*(\tilde{G}r_3) = Q[p_1]$, ahol $\deg p_1 = 4$, ez az első Pontrjagin osztály, ő az Euler osztály négyzetébe megy a $H^*(\tilde{G}r_3) \to H^*(Gr_2)$ homomofzimusnál.

Visszatérve a páros esethez, kellene, hogy ez az előbb talált generátor karakterisztikus osztály legyen, kiderült az előbb, hogy $H^*(\tilde{G}r_4) = Q[p_1, e]$.

A következő lépés a négyről ötre, az első néhány lépcsőfokon semmi újdonság. n=4, k=5-re látjuk, hogy $H^4(Gr_5)$-ben ott a p_1. néggyel feljebb $H^8(\tilde{G}r_5)$-ben biztosan ott van p_1^2. Az előző lépcsőfokban az Euler osztály az 1-be ment a $H^0(Gr_5)$, mert ki kell valahogy generálnunk ott 1 rangot.

> $H^*(\tilde{G}r_{k-1})$ modulus $H^*(\tilde{G}r_k)$ felett!

A 8-as lépcsőfokban látjuk, hogy $p_1 e$ eltalálja a $H^4(\tilde{G}r_5)$ generátorát, p_1-et. e^2-nek nem tudjuk mi a képe, de ki tudjuk kombinálni a nullát belőle és p_1-ből biztosan. Ez nulla, tehát egzaktság miatt, neki van egy őse $H^8(\tilde{G}r_5)$-ben, ezt az osztályt fogjuk p_2-nek hívni. Mégtovább, $n = 12$, $p_1^3 \mapsto p_1^2 \mapsto 0, 0 \mapsto p_1^2 e \mapsto p_1^2$, $p_1 p_2 \mapsto p_1 e^2 \mapsto 0, 0 \mapsto e^3 \mapsto p_2$, s így tovább derül ki, hogy...

$p_j(\xi) := C_{2j}(\xi^{\mathbb{C}})$

8.

$p_j(\xi) = (-1)^j c_{2j}(\xi_C)$-t állítottuk a múltkor, na de micsoda a komplexifikált vonalnyaláb? Kellene egy lineáris művelet, aminek a négyzete a -1.

$\xi_C := (\xi \oplus \xi, i(u, v) = (v, -u))$, így megadtuk az i-vel való szorzást, ez egy ugyanakkora (komplex) rangú nyaláb, mint amekkora (valós) rangú ξ volt. Ez továbbá megfelel $\xi \otimes \epsilon_C^1$-nek. Nem áll elő minden komplex vektornyaláb ilyen alakban.

Állítás: $\bar{\xi}_C = \xi_C$ izomorf a konjugáltjával.

Ha a szorzást megfordítjuk, $\bar{i}(u, v) = (-v, u)$, izomorf konstrukciót kapunk.

Állítás: $c_j(\bar{\xi}) = (-1)^j c_j(\xi)$.

Ha van egy j rangú komplex vektornyalábunk, veszünk benne egy generikus szelést, előjelesen összeadjuk a nullhelyeket, ha megcseréljük i és $-i$ szerepét, látunk egy lineáris izomorfizmust az egyikből a másikba, ez j db tükrözés az egyes komplex irányokban.

Következmény: $2c_{2j+1}(\xi_C) = 0$.

> Emlékeztető: $w_j(\psi^j \oplus \epsilon^r) := e_2(\psi^j)$, ehhez hasonlóan a *Chern osztály* komplex vektornyalábokra $c_j(\psi^j \oplus \epsilon_C^r) := e(\psi)$. A konstrukció pont ugyanúgy megy, csak minden dimenzió komplex lesz, bizonyos determinánsoknak kell nullának lenni.

> ❗ Komplex sokaságban nem biztos, hogy csak páros dimenziós cellák vannak!

Állítás: $\bar{\xi}_C = \xi_C$ izomorf a konjugáltjával.

Kellene egy leképezés, ami a két komplex struktúrát összepárosítja. Kellene látni, hogy $(0, I; -I, 0)$ és $(0, -I; I, 0)$, az egyik a másikba konjugálja a másikat.

Találnunk kell egy nyalábot, aminek a c_1-e nem torzió, például CP^1 felett a tautologikus nyaláb megfelelő.

Mostmár látjuk, hogy minden esetre jóldefiniált a komplexifikálás, mindegy melyik komplex struktúrát vesszük rajta. Mivel a komplexifikálás funktoriális, és a Chern osztályok karakterisztikusak, látjuk hogy a Pontrjagin osztályok is karakterisztikusak. Már csak össze kellene kötni őket a Gysin sorozatnál látottakkal, ezt nem csináljuk meg, csak előjel erejéig érdekelnek minket/a nagy összességükben. Például annyi, hogy $H^*(BSO(2k+1); Q) = Q[p, \dots, p_k]$ elégséges ("mindegy, hogy melyik bázisban számolunk").

A keddi órai számolások szerint

$$H^*(BSO(2k); Q) = Q[p, \dots, p_{k-1}, e]$$

Egy irányított k rangú nyalábból lehet csinálni direkt összeadással egy irányított $k+1$ rangút, ezt visszahúzhatjuk az egyel nagyobb univerzálisból, ezzel kapva a $\to BSO(2k) \to BSO(2k+1) \to BSO(2k+2) \to$ sorozatot. Kohomológiákon a nyilak visszafelé mennek, $p_j \mapsto p_j \mapsto p_j$ $1 \leq j \leq k-1$, továbbá $e \mapsto 0$ és $p_k \mapsto p_k$ a párosról páratlanra esetben, végül $p_k \mapsto e^2$ a páratlanról páros esetben végül.

Vektornyalábokra irányíthatóság ugyanazt jelenti, mint hogy az 1-váz felett ő triviális, ergo $w_1 = 0$. Ezt próbálja az ember általánosítani, vehetjük a továbbiakat, lehet ő a 2-váz felett is triviális például. Ez azt jelenti, hogy ő irányítható, de tudnia kell még valamit ahhoz, hogy triviális legyen a teljes 2-vázon, ezt méri a w_2. A konkrét obstrukció az volt, hogy volt egy konkrét koláncunk, aminek a kohatára volt a w_2-höz tartozó kociklus, ez gyakorlatilag azt mondja meg, hogy hogyan kell megtekerni a trivializációt úgy, hogy már beterjedjen a trivializációnk az 1-vázról.

Kis engedményt teszünk, trivialitás helyett stabil trivialitást követelünk meg, az állítás így egységesen irányítható+$w_2 = 0$ ekvivalens azzal, hogy a 2-váz felett stabilan triviális alakot ölti. Továbbá az irányított megegyezik azzal, hogy az 1-váz felett nem csak trivializálható, de trivializált. Minden komponensen két (különböző) irányítás van. Fogalmazzuk ezeket meg a 2-váz feletti esetre is. Rögzítsünk a 2-váz felett egy (stabil) trivializációt, ezt fogjuk spinstruktúrának nevezni. Kettőt akkor fogom ekvivalensnek nevezni, ha stabilan izomorfak.

> Valójában legfeljebb 3-rangig kell felmennünk, mert a 2-váz felett vagyunk.

Hogy hasonlítunk össze két különböző spinstruktúrát? Egyiket felírva a másik bázisában, kapunk egy $sk_2 B \to SO(n)$ leképezést, a homotópiaosztályok adják meg a spinstruktúrák közötti különbségeket.

> "Mért csináljunk új gondolatokat, amikor vannak régiek?"

A 0-vázat homotopikusan egyértelműen tudjuk leképezni. Az 1-váz *valahogy* ívekből áll, a végpontokat a kijelölt pontba képezzük, kapunk hurkokat, ez lehet triviális vagy nemtriviális. Mindegyik ívre ráírom, hogy a triviálisba ment, vagy sem, ez egy kolánc, egy 2-szimplex határán biztosan nullát kell kapnunk, ezért kociklus is. A 0-váznál megválasztottuk az íveket, amivel az 1-váz végpontjait betoljuk a pontba, ettől függ még az egész konstrukció. Ha egy másik utat választunk, és az összefűzés a nemtriviális hurkot választjuk, akkor a kiértékelés pont megfordul, sőt az összes belőle kiinduló 1-cellán megfordul. Látjuk, hogy ez valóban egy kohomológiaelem, csak modulo kohatárok van jól definiálva.

> Z^1 jelöli a (ko)ciklusok, és B^1 a (ko)határok halmazát a C^1 lánckomplexusban.

Mivel ϕ kociklus, van kiterjesztés a 2-vázra, a 2-cellákra kétféle módon lehet kiterjeszteni, ők a határon meg fognak egyezni, összességében egy $S^2 \to SO(n)$ leképezést látunk, ő nullhomotóp, átvihetem egyiket a másikba.

Összességében tehát bármely 2 spinstruktúrához van egy $H^1(B, Z_2)$ elem, és bármely spinstruktúrát el tudunk tolni bármely $H^1(B, Z_2)$ elemmel.

9.

$codim\Sigma^1(n, n+k) = k+1$, és $codim\Sigma^2(n, n+k) = 2(k+2)$.

$E \xrightarrow{R^n} B$-ből csinálunk egy $E \times S^\infty \xrightarrow{R^n} B \times S^\infty$ nyalábot. Egy Z_2 hatással faktorálunk ami a totális térben $(-1, -1)$-el hat, lent peig $(id, -1)$-el. Ez szabad, faktorálhatunk, és kapunk egy másik vektornyalábot. A bázis $B \times RP^\infty$ lesz, a totális tér *valami*. Ennek van egy Euler osztálya $H^n(B \times RP^\infty; Z_2)$-ben. Ez persze szorzattá bomlik $\oplus H^j(B) \otimes H^{n-j}(RP^\infty)$. A második tagot ismerjük, az $n-j$. grádicsot a generátor ugyanennyiedik hatványa generálja. Következésképpen az Euler osztály is összeggé bomlik $e(E \times S^\infty / Z_2) = \sum a_j \otimes y^{n-j}$.

Fact: $a_j = w_j(E)$. Ellenőrizhető, hogy a_j-k természetesek, mert a konstrukció során végig fibrumonkénti izomorfizmust látunk. Összeadásra stabil, a triviális nyalábot visszahúzhatjuk a pont feletti triviális nyalábból, az RP^∞ feletti tautologikus nyalábot kapjuk, ennek az Euler osztálya $1 \otimes y$-lesz, ezzel beszorozzuk az eredetileg kapott osztályt ezzel az elemmel, ami pont a stabilizációt adja, $a_j(\xi \oplus \epsilon^1) = a_j(\xi)$.

$$\begin{tikzcd}
E \times S^\infty / Z_2 \arrow[d] & E \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\
B \times RP^\infty & B \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

Ekkor $a_n = e(E \times S^\infty / Z_2)|_B = e(E \times S^\infty / Z_2|_B) = e(E)$, vagyis a rang magasságban $a_n = w_n$, és mint láttuk stabilizációra jól viselkedik.

$E \xrightarrow{R^n} B$-ből legyártjuk a projektivizáltját $P(E) \xrightarrow{RP^{n-1}} B$, ezt vissza is húzhatjuk a totális tér fölé.

$$\begin{tikzcd}
P(E) \arrow[d, "pr"', "RP^{n-1}"] & pr^* E \arrow[l] \arrow[d] \\
B & E \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Ez a visszahúzott felbomlik egy vonalnyaláb, és valami más összegére. $pr^* E = l \oplus \eta$, és mindegyik fibrumon a vonalnyaláb felett a tautologikusat látjuk, $l|_{RP^{n-1}} = \gamma^1_{n-1}$. Ezt iteráljuk, $P(\eta) \to P(E)$-ból visszahúzva a $\tilde{pr}^* pr^* E = l_1' \oplus l_1 \oplus \psi_{n-2}$, stb. Ezt lehet egyetlen lépésben, a zászlónyaláb projektivizáltja rögtön szétesik vonalnyalábok összegére.

> 💡 Vesszük az összes bázis n-es egyeneseit, ez lesz a projektivizált zászlónyaláb

Szeretnénk, hogy a visszahúzás által indukált leképezés injektív legyen, állítjuk hogy ez így is van.

Lépésenként haladunk $H^*(B) \to H^*(P(E))$ monomorfizmus, sőt $H^*(P(E)) = (H^*(B)[a])_{\deg a \leq n-1}$ mint $H^*(B)$ modulusok.

Tétel (Leray-Hirsch): $X \xrightarrow{F} Y$ fibrálás, és adott $a_1, \ldots, a_N \in H^*(X)$ olyan, hogy $H^*(F) =< i^*a_1, \ldots, i^*a_N >$ szabadon generálják, mint Abel csoport, ahol $F \xhookrightarrow{i} X$ a beágyazás. Ekkor $H^*(X)$-et mint szabad $H^*(Y)$ modulust szabadon generálják.

Triviális nyalábra ez *látványosan* igaz, továbbá ha van két környezetünk amin igaz, akkor az uniójukon is igaz lesz, vagyis ragasztásra öröklődik.

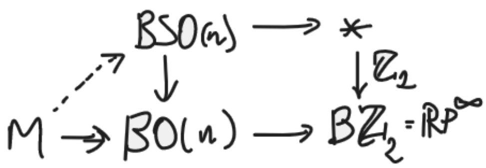
$w^1(P(E)) \in H^1(P(E))$, mindegyik fibrumban az ő első $n-1$ hatványa generálja a fibrum kohomológiáját (levágott Z_2 polinomgyűrű) mint csoport, és adódik az előbbi állítás. A nulladik grádics képe az, amit a pr^* eltalál, tehát minden esetre monomorfizmust kapunk ott valóban.

Az a generátorra $a^n = \sum x_j a^{n-j}$, minden fibrumon megszorítva nulla, globálisan csak annyit látunk, hogy felírható a többiekkel. $x_j \in H^j(B)$, és ezek megintcsak a Stiefel-Whitney osztályok!

10.

Volt a gyakorlaton, hogy egy nyaláb irányíthtó pontosan akkor, ha a $BO(n)$-ből ahogy visszahúztuk a leképezés áthúzható $BSO(n)$-en.

$BO(n)$ felett van az irányításnyaláb, amit igazából $BSO(n) \to *$-ből kapunk az irányításváltás mint szabad involúcióval.



Az irányított nyalábok pullbackje kiegészítve az irányításnyalábbal

Itt a $*$ pont igazából S^∞-t jelöli. Mint azt a múltkor megbszéltük, pontosan akkor húzható át valaki az irányított univerzális nyalábon, ha az előrelököttje nullhomotóp. Kétrétű fedésünk van, a homotopikus csoportok nem változnak, a $BO(n)$ Z_2-je tűnt csak el az első szinten.

Menjünk egyel feljebb, $BSO(n)$ fundamentális csoportja 1, a második homotopikus csoportja Z_2 (ha $n \geq 3$). Akarunk fölé egy fibrálást, ami megeszi ezt a Z_2-t. Legyen ez $X \xrightarrow{F} BSO(n)$. Felírjuk a hosszú egzakt sorozatot a homotópiákra.

$$\to \pi_N(F) \to \pi_N(X) \to \pi_N(BSO(n)) \to \pi_{N-1}(F) \to$$

Az lenne az álom, hogy $\pi_1(F) = Z_2,\ \pi_N(F) = 0$ mindenhol máshol, ez pont az RP^∞, azt is szeretnénk még, hogy a leképezés $\pi_2(BSO(n))$-ből a fibrumba legyen izomorfizmus, a legkényelmesebb az lenne, ha $X \sim *$. Ilyenekből az univerzális egy $* \xrightarrow{RP^\infty} K(Z_2, 2)$, ha úgy választjuk meg a leképezést, hogy eltalálja a homotópiagenerátort, ezzel egyértelműen megadtuk a visszahúzó leképezést.

Visszahúzásra érzéketlen a fibrálás egzakt sorozatának határleképezése, ha visszahúzunk egy nyalábot, a határleképezés a fibrumba viszi a szferoidokat, indukálódik egy láncleképezés a hosszú egzakt sorozatok között visszahúzásból.

Megkonstruáljuk ezt a $* \xrightarrow{RP^\infty} K(Z_2, 2)$ fibrálást. Vehetjük a $K(Z_2, 2)$ feletti útfibrálást, egy bázispontból induló utak terét, a fibrum a hurkok lesznek lényegében, ami egy $K(Z_2, 1) = RP^\infty$.

Továbbá $[BSO(n), K(Z_2, 2)] = H^2(BSO(n), Z_2)$, továbbá a Hurewicz miatt ez megegyezik $\pi_2(BSO(n))$-el. Legyen ennek a generátora g.

Ha f-nek az $\alpha \in H^2(BSO(n))$ felelt meg ez előbbi azonosításnál, az pontosan azt jelenti, hogy $f^*\ell = \alpha$, ahol $< \ell >= H^2(K(Z_2, 2))$ *a* generátor. A g generátorelemhez tartozó f a homotopikus csoportokon is nemtriviálisat indukál, ergo izomorfizmust.

Ezzel megöltük a π_2-t, és ez a konstrukció megy általában, egy fibrálással az alsó nemnulla homotopikus csoportot el tudjuk tűntetni.

Mikor tudunk egy $BSO(n)$-ből indukált nyalábot felemelni ebbe a most konstruált X térbe? Pont mint eddig, hogyha felemelhető $\kappa : M \to BSO(n)$ komponálva az $X \xrightarrow{RP^\infty} BSO(n)$ vetítésével nullhomotóp. Visszafelé is igaz. Ha nullhomotóp, akkor az előbb megadott univerzális nyalábra is vissza tudjuk húzni, hizsen pontrahúzható a totális tér, majd a visszahúzásnál ez is visszahúzódik

$p \in M$, és $f \circ \kappa$ felemelődik $*$-ba, $\tilde{f \circ \kappa}$, ez nyilván a kompozícióba vetül. Az f is $\kappa(p)$-t $f \circ \kappa(p)$-be viszi, vagyis $(\kappa(p), \tilde{f} \circ \kappa(p))$ egy pont a visszahúzott X-ben, vagyis vissza lehet húzni κ-t valóban X-re is.

Hasonló a helyzet mint az irányításoknál, pontosan akkor fogunk kapni felemelést, ha a kompozíciónk nullhomotóp "lent". $[f \circ \kappa] \in H^2(M, Z_2)$, ez reprezentálja azt, hogy felemelkedik-e a függvény. Nem meglepő módon, ez pont a $w_2(\kappa^* \tilde{\gamma}^n)$ lesz, tehát a κ által klasszifikált M feletti vektornyaláb második Stiefel-Whitney osztálya.

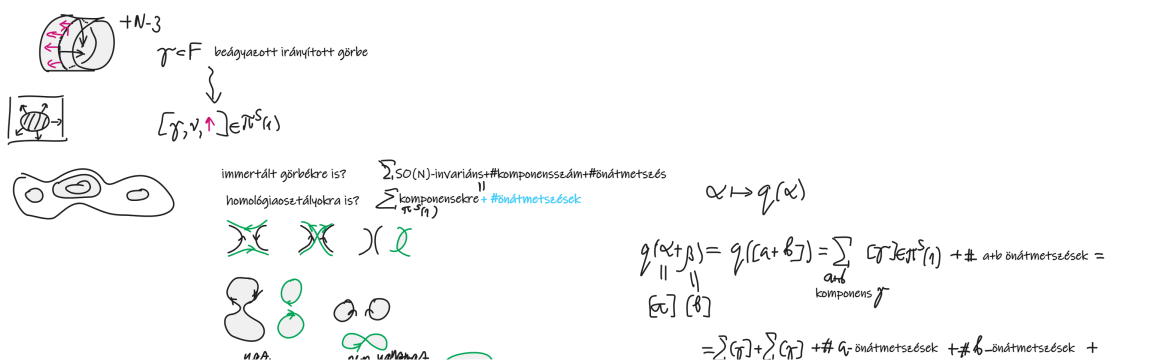
$BSO(n)$ klasszifikálja az n-rangú irányított nyalábokat, $K(Z_2, 2)$ pedig a $H^2(M, Z_2)$ elemeket klasszifikálja.

Ha feljebb akarunk menni, kellene ismerni például X kohomológiagyűrűjét, ez általában reménytelen. Megjegyezzük, hogy X-nek a konstrukció miatt az első két homotopikus csoportja triviális, de váratlan módon a harmadik is! Ez azt jelenti, hogy pontosan akkor emelhető fel κ, hogyha a 2-vázon nullhomotóp, hiszen minden magasabb dimenzióban mivel izomorfak a homotopikus csoportok mindegy, hogy X-ben akarok beterjeszteni egy függvényt, vagy $BSO(n)$-ben, de ott tudjuk hogy belehet, hiszen meg van adva már! Tehát az áthúzhatóság tovább azzal is ekvivalens, hogy $\xi = \kappa^* \tilde{\gamma}$ a 2-vázon triviális.

Megjegyzés, $X = BSpin(n)$, belőle azokat a nyalábokat húzhatjuk vissza, amik a 2-vázon trivializál*va* vannak. $Spin(n) \to SO(n)$ az univerzális fedés, erre ráeresztjük a B-t, mindenhol izomorfizmus marad, csak a fundamentális csoport, illetve a π_2 tűnik el.

Gömbök stabil homotopikus csoportjai

$\pi_0^S = Z \leftrightarrow Emb^{fr}(0, N)$, következő $\pi_1^S = Z_2 \leftrightarrow Emb^{fr}(1, N)$, a következő $\pi_2^S \leftrightarrow Emb^{fr}(2, N)$. Elegendő irányított felületeket nézni, mert egy nemirányítható felület érintőnyalábja sem irányítható, hiába adok hozzá egy nagy triviálisat, és persze fordítva, minden irányítható felület beágyazható és tüskézhető. Nadrágozással elérhetjük, hogy a reprezentáns összefüggő legyen. Minden beágyazás izotóp egymással, elegendő a standardot nézni. Az R^3 beli standard beágyazás plusz a tüskézés, plusz konstans tüskézés lesz a standardunk, az ettől való eltérések az $[F, SO(n)]$ osztályok, ezeket elég a homotopikus csoporton megadni a függvény hatását. Ezekből *potenciálisan* nagyon (végtelen) sok van sajnos. Mi történik egy ilyen osztállyal kobordizmus alatt? Minden kobordizmus az időirányban levetítve feltehetően Morse függvény lesz. Mi történik amikor egy ilyen "elemi kobordizmust" átlépünk (egy kritikus pontját ennek a Morse függvénynek)? A kobordizmus maga egy peremes 3-sokaság. Lehet lokális minimuma, 1, 2 indexűek, vagy lokális maximumok. Ezeknél vagy terem egy gömb, vagy S^0, illetve S^1 mentén csinálunk műtétet, illetve egy gömböt eltűntetnek. Gömbbel amúgy nem tudunk nem nulla elemet reprezentálni mert $\pi_2(SO(N)) = 0$. Mi történik a tüskézéssel?



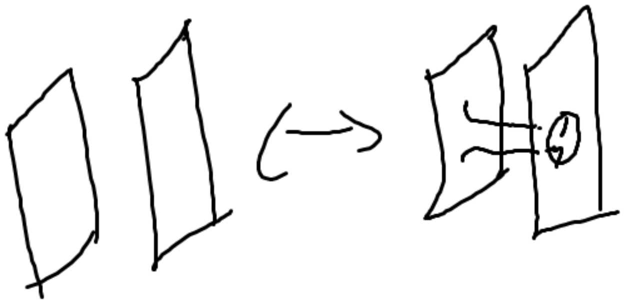
12.

Feületeknek tüskézett kobordizmusosztályait szeretnénk azonosítani still.

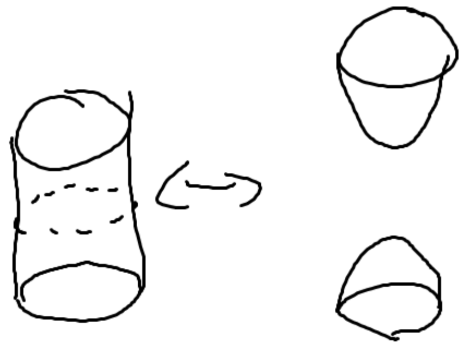
$\pi^2(2) = \lim \pi_{n+2} S^n$, pontosan a stabilan parallelizálható érintőnyalábú felületek lesznek reprezentánsok, az nem világos, hogy kobordizmusnál mi történik a tüskézéssel.

Ha 0 és 3 indexű kritikus ponton haladunk át akkor csak gömbök keletkeznek, és tűnnek el, ez nem ad nekünk semmit, mert a megfelelő homotopikus csoportja $SO(n)$-nek triviális.

Mi lesz az 1,2 indexűeknél? 1-nél még nagyjából menni fog minden. Két felület adott valamilyen normáltüskézéssel, közéjük ragad egy cső.



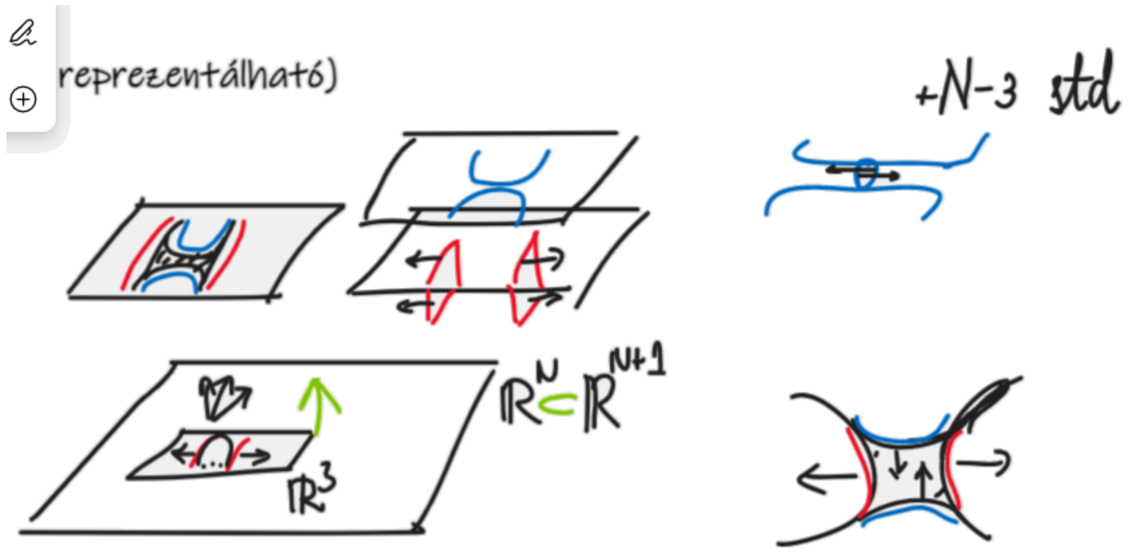
Műtét S^0 mentén



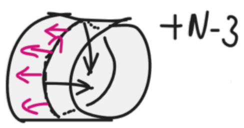
Műtét S^1 mentén

Ez lokálisan műti a felületeinket, csak egyszer kell megcsinálni ezt a műtétet, aztán ezzel azonosíthatjuk az indexátlépést.

A 2-indexű pontoknál egy körvonalon történik műtét. Erre ha duálisan gondolunk ez egy 1-indexnél berakott cső eltűntetése. A tüskézés a két felületdarabon standard, gyakorlatilag két $R^3 \subset R^n$, ezekben él a regasztás előtti és utáni állapot, a standard tüskézéssel plusz R^n bázisával a komplementerirányokban. Ehhez akarunk ragasztani egy újabb nyelet, beágyazzuk R^{n+1}-be és hozzávesszük a plusz egy irányt a normáltüskézéshez. A két ragasztórészen kívüli részt kitoljuk a +1-edik irányban, ez lesz a beragasztott cső. Ekkor az R^3 normáltüskézése befelé fog fordulni.



Tehát mikor lehet egy beágyazott csődarabot eltűntetni? Egy csőnek N-3 normáltüskéje a síkjára kifelé mutató, és a cső belsejébe mutatnak a normáltüskék, irányítsuk meg a középvonalát, és eszerint az iányítás szerint megadjuk, hogy merre halad a középkörhöz képest a cső, ez egy tüskézett kört ad valami magasdimenziós euklideszi térben, ergo egy $\pi^S(1) = Z_2$. Az kell nekünk, hogy ez nulla legyen, ergo hogy beterjedjen a körlapra.



Ha van egy ilyen körlapunk, kifújjuk R^3-ból. Ekkor a körlap tüskézése (mondjuk) kifelé fog mutatni a megmaradt körvonaltól.

> 💡 Egy tüskézett körről leolvasható hogy ő a nulla-e vagy sem kétféle módon, vagy $SO(n)$, vagy $SO(n-1)$-beli invariánssal, de ez a kettő fodítva határozza meg hogy melyik melyik!

Egy körvonalhoz vehetjük a tubuláris környezetét, ezt megfelelően standard alakra tudjuk hozni (kellően magas dimenzióban maybe) és elvégezhetjük a műtétet. Tehát ilyenekre fogunk vadászni.

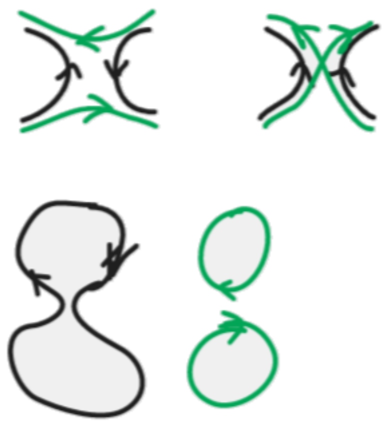
Elegendő a beágyazott homotópiaosztályait tekinteni a görbéknek, az invariánsunk nem változik erre. A beágyazott görbék izotópiaosztályainak a tere nem a legjobb, mi lenne ha ez az egész menne immertált görbére?

A megszorítás szépen megy, reguláris homotópia erejéig invariáns lesz ugyanúgy. Homológia erejéig is maybe?

Le kell ellenőrizni, hogy homológ görbékre hogyan változik az invariánsunk.

~~Terjesszük ki úgy több komponensre, hogy egyszerűen összeadjuk~~. Ekkor az első esetnél nem változik az invariánsunk.

A második esetben már változik az invariáns maga. Ez szomorú, azonban az önmetszések darabszáma is változik, ezért terjesszük ki úgy, hogy a komponensekre vett $\pi^S(1)$ összeg plusz a metszéspontok száma. Ezzel ekvivalensen tekinthetjük az $SO(N)$-ben a tüskézés által reprezentált hurok osztályát, hozzáadjuk a komponensszámot és az önmetszésszámot.



A Reidemeister 2 nem változtatja a komponensszámot, az önmetszésszám pedig 2-vel változik. Következésképpen ez invariánsa a homológiaosztályoknak.

Ez az invariáns $\alpha \mapsto q(\alpha)$ jelet viselje. Hogy viselkedik ez a vektortérstruktúrával? $\alpha = [a],\ \beta = [b]$, ekkor $q(\alpha+\beta) = q([a+b]) = \sum_{a+b \text{ komponens } \gamma} [\gamma] + \#a + b \text{ önátmeszések}$

$$q(\alpha+\beta) = q([a+b]) = \sum_{a+b \text{ komponens } \gamma} [\gamma] + \#\{a + b \text{ önátmeszések}\}$$

Az első tag egyszerűen összeadódik, hiszen szimpla uniót vettünk, a második tagban vannak a illetve b önmetszései, és vannak a vegyesek $a \cap b$. Ez tehát összességében $q(\alpha) + q(\beta) + [\alpha \cap \beta]$. A sapkaszorzat kényelmetlen, térjünk át kohomológiákra. $H^1(F, Z_2)$-ben $q(\alpha+\beta) = q(\alpha) + q(\beta) + \alpha \smile \beta([F])$, ez egy kb kvadratikus alak, de Z_2 felett jobbat úgysem tudunk.

Olyan osztályokra vadászunk amire ez az érték $0 \in Z_2$. Ha van egy ilyen osztályunk, akkor őt fogjuk is tudni reprezentálni beágyazott görbékkel, és lehet műteni (Z_2 felett vagyunk!).

13.

Ott tartottunk, hogy egy felületbe beágyazott görbe mentén akkor lehet műteni, ha ő a triviális elemet reprezentálja $\pi^S(1)$-ben, ezt kiterjesztettük homológiaelemekre is. Kaptunk egy $(H^1(F, Z_2), (\cdot), q)$ alakú objektumot, egy Z_2 vektortér, egy skaláris szorzás és egy kvadratikus alak. Ha fel tudjuk bontani a vektorterünket két merőleges altérre, akkor a kvadratikus alakok is felbomlanak merőleges direkt összegként.

$v \in < v >^\perp$ sajnálatos módon, vegyünk $w \in V \setminus < v >$-ből egy elemet, $< v, w >^\perp$ hogy is néz ki? Mivel a szorzásunk nemelfajuló, elegendő csak olyan altereket találni amik csak a nullában metszik egymást. $< v, w > \cap < v, w >^\perp = 0$? Leellenőrizzük, hogy a generált altérben nincs olyan nemnulla elem ami v-re és w-re is merőleges. Elég kevés eleme van ennek az altérnek, az egyetlen különböző nemnulla elem $v + w$, $(v, v) = (w, w) = 0$, azon múlik így a dolog, hogy $(v, w) \neq 0$ legyen, ilyen vektorkat pedig találunk, mert a skalárszorzásunk nemelfajuló. Kaptunk olyan vektorokat, hogy a merőleges kiegészítő direkt kiegészítő, lehasogatunk kétdimenziós altereket.

$V = H^1(F, Z_2) = V_1 \perp \cdots \perp V_g$. Minden altéren ugyanolyan a skalárszorzatunk, szimplektikus síkokat tekintünk, mit csinál ezeken a q? 4 különböző értéket kell felvennie, és tudnia a $q(a+b) = q(a) + q(b) + a \cdot b$ azonosságot. Behelyettesítünk dolgokat, látjuk hogy $q(0) = 0$, és $a = b$ helyettesítéssel látjuk hogy ez, illetve az $a + 0$ helyettesítésre is automatikusan teljesül az azonosság. Ha különböző elemeket helyettesítünk be, $q(v+w) = q(v) + q(w) + 1$, itt két esetünk van, vagy minden tag 1, vagy az első két tag 0, és a $+1$ megmarad, ezek az esetek lesznek $q_{\mp}$. Tehát $(H^1, \cdot, q)$ felbomlik $mq_+ \oplus (g-m)q_-$ alakban, vagy az egyik vagy a másik szerint, invariáns-e ez a felbontás? Erre egész kellemes választ kapunk.

Tény: $q_- \oplus q_- = q_+ \oplus q_+$, az izomorfizmust a hármas összegek feszítik az eredetihez képest.

Tehát a legtöbb amire számíthatunk az $m \mod 2$, hogy megmaradjon, és állítjuk hogy az meg is marad.

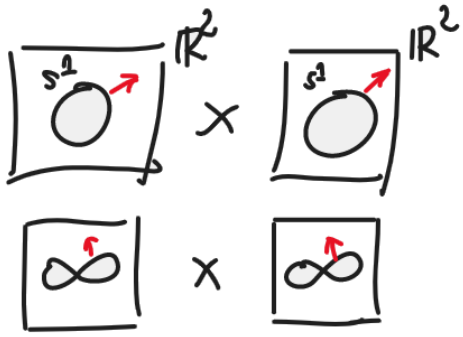
Tekintsük a $\#\{v \in V | q(v) = 1\} = \eta(q)$ számot. Hogy viselkedik ez a szám direkt összegre? $\eta(q \oplus Q) = \#\{(v, w) \in V^n \perp W^k | q \oplus Q(v, w) = 1\}$, a direkt összeg kvadratikus alak $q(v) + Q(w)$ lesz, tehát meg kell számolni hányféleképp lehet az egyikből 1-et, a másikból 0-t választani, vagy vice verza. $\eta(q)(2^k - \eta(Q)) + (2^n - \eta(q))\eta(Q)$ egy nem annyira szép dolog, mi történik a mi elemi komponenseink összeadásánál?

$q_+ \oplus q_+ (= q_- \oplus q_-)$, $\eta(q_+) = 1$, következésképp $\eta(q_+ \oplus q_+) = 1 * 3 + 3 * 1 = 6$, ha keresztbe megyünk $\eta(q_+ \oplus q_-) = 1 * 1 + 3 * 3 = 10$. A kicserélési tulajdonság miatt két esetünk lesz, csupa q_+ a direkt összegben, vagy egy darab árva q_- a végén. $\eta(q_+^{\oplus r}) = 1 * (2^{2r-2} - \eta(q_+^{\oplus r-1})) + 3 * \eta(q_+^{\oplus r-1}) = 2^{2r-2} + 2\eta(q_+^{\oplus r-1})$, kaptunk egy rekurziót, ezt megoldhatjuk könnyedén, $2^{r-1}(2^r - 1)$. Ebből megkapjuk a másik esetet is amikor egy q_- is van. $3(2^{2r-3} + 2^{r-2}) + 2^{2r-3} - 2^{r-2} = 2^{2r-1} + 2^{r-1}$, tehát valóban különböznek ezek az esetek, invariáns módon le tudjuk olvasni. Ezt hívjuk a kvadratikus alak *Arf invariáns*ának.

Amíg a felület egy darabban marad, a génusza egy műtét után 1-el csökken (az Euler karakterisztika kettővel nő minden műtét során). Ha nem nullhomológ görbe mentén műtök, akkor a felület egyben marad, ha szétesik, bármelyik felületrész egy határoló felületet (2-ciklust) ad a görbéhez. Ha $g \geq 2$ találunk megfelelő nem nullhomológ görbét, ami mentén lehet műteni, ergo minden stabil homotópiaelemet lehet (legfeljebb) 1-génuszú tüskézett felülettel reprezentálni. Kaphatjuk a q_+, és a q_--os tóruszt, ez lényegében megadja a tüskézést, a meridiánon s a longitúdón ismerjük, és ezekről kiterjed. Tehát ezek realizálódnak, és az imént megadott invariáns megkülönbözteti őket.

Ha van két standard módon beágyazott körünk a síkban, ezeket összeszorozva kapunk egy R^4-be beágyazott tóruszt. Mindkét kört megtüskézhetjük (sugárirányban) R^2-ben, a szorzat egy tüskézett

tórusz, a nullelem $\pi^S(2)$-ben, a szorzat két tagja a két generátor mindkettő a triviális elemet reprezentálja $\pi^S(1)$-ben. Ha a nemtriviális elemet reprezentáló köröket szorzunk össze, akkor pedig pont a másikat kapjuk, ezzel $\pi^S(2)$ ki van számolva, generátorostul szőröstül bőröstül.



A triviális, és a nemtriviális hurkok szorzata.

$\pi^S(3)$

Itt már nincs listánk a 3-sokaságokról, még az sem világos, hogy mit lehet gömbbel reprezentálni, ezzel kezdünk.

$S^3, \nu \hookrightarrow R^N$, standard helyzetbe tudjuk hozni, de a tüskézés állhat mindenféle módokon. A standard tüskézéshez mérhetjük, ez egy $\nu \sim\to \pi_3(SO(N-3))$ elemet ad meg. A standardot úgy választjuk hogy a triviális elemet reprezentálja a stabil csoportban. Fordítva, minden $\pi_3(SO(N-3))$ elemhez kapunk egy tüskézést, ergo egy leképezés $\pi_3(SO) \xrightarrow{J} \pi^S(3)$, ami homomorfizmus is lesz!

Általában is $\exists : \pi_n(SO(N)) \to \pi^S(n)(= Emb^{fr}(n, R^{N+n}))$, a leképezés az, hogy a standard gömb standard tüskézését megcsavarjuk az adott elemmel, és világos hogy homomorfizmus, a megcsavarások egymás után végeztetnek el. N-et kilőve kapjuk a *stabil* J-homomorfizmust.

$$0 \to \ker J \to \pi_3(SO) \xrightarrow{J} \pi^S(3) \to co\ker J \to 0$$

> 💡 $\pi_3(SO(3)) = Z \xrightarrow{n \mapsto (n,0)} \pi_3(SO(4)) = Z \oplus Z \xrightarrow{(n,m) \mapsto 2n \pm m} \pi_3(SO(5)) = Z$ alakú leképezések vannak valahogy (és ezután már stabilizálódik $\pi_3(SO)$).

Tehát J képe valami ciklikus dolog lesz, ha nem nulla, a magja akkor is egy Z lesz, kérdés hogy ez hogyan ágyazódik be $\pi_3(SO)$-ba.

Állítás: $\Omega_3^{spin} = 0$, a háromdimenziós spin kobordizmuscsoport nulla.

Állítás: $M^4_{irányított}$ sokasághoz $3\sigma(M) = p_1(TM)([M])$, ez minden esetre a CP^2-re stimmol.

14.

Volt nekünk egy J homomorfizmusunk, $\ker J \to \pi_3(SO) \xrightarrow{J} \pi^S(3) \to co\ker J \to 0$, a komagot nehéz geometriailag megfogni, helyette valami másik leképezést nézünk.

Nagydimenziós terekbe vannak beágyazva 3-sokaságaink, a kiegyenesítési lemmával tudjuk levetítgetni, kapunk beágyazott, illetve legalul immertált, tüskézett sokaságokat, ezzel $Emb^{fr}(3, N) = \cdots = Imm^{fr}(3, 1)$, tehát egy háromdimenziós sokaságunk van egy darab normáltüskével beimmertálva R^4-be. Egy immertált részsokaságnak legfeljebb többszörös pontjai vannak, tekintsük csak a kettőspontjai halmazát, ez egy felület R^4-ben. A tüskézés nem megy át a kettősponthalmazra, lehet hogy a két normálirány egy görbe mentén megcserélődik. A kimetsző felületrészekből kapunk egy normálirányt, a két vektor összege, mert az invariáns a sorrendre, a másik irányban lehet hogy megfordulunk, ergo $\epsilon^1 \oplus \gamma^1 \to RP^\infty$-ből van visszahúzva a normálnyaláb, meg van adva egy konkrét indukálása.

Kapunk tehát valamilyen $\pi^S(3) \to Imm^{\epsilon^1 \oplus \gamma^1}(2, 2)$ leképezésünk, a "valódi" normáltüskét kiegyenesíthetjük, $=$ $Imm^{(\gamma^1)}(2, 1)$-é. A γ^1 nem is igazán kell, minden vonalnyaláb onnan van visszahúzva.

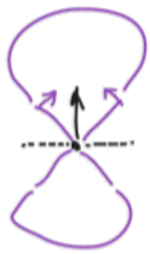
> 💡 $Imm(\dim, co\dim)$ jelölést alkalmazzuk.

Az még többé kevésbé világos, hogy ez a leképezés homomorfizmus.

Állítás: $Imm(2, 1) = Z_8$.

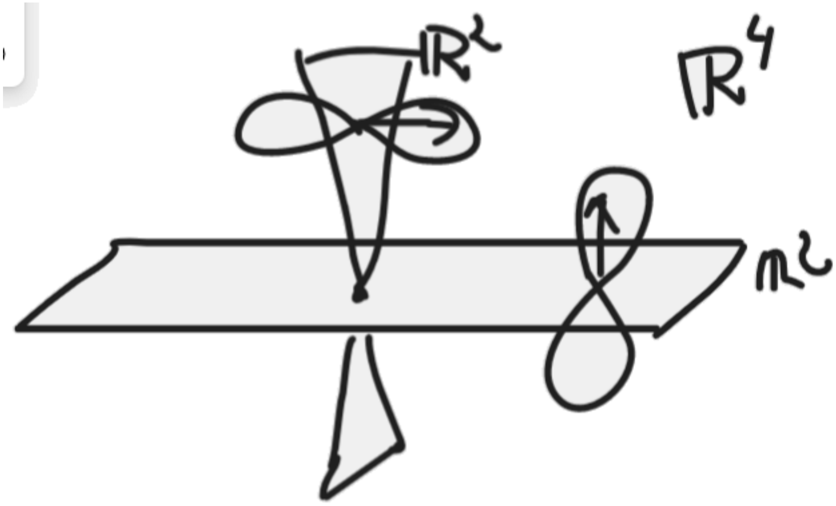
Állítás: az imént megadott $\pi^S(3) \to Imm(2, 1)$ leképezés szürjektív.

> Kapunk egy R^3-ba immertált felületet, szeretnénk, hogy immerzió kobordizmus után ez felemelhető legyen R^4-be egy normáltüskével.
>
> Azt még nem igazán tudjuk, hogy kik kobordánsak, próbáljuk meg enélkül felemelgetni. Jó lenne, ha fel tudnánk úgy emelni, hogyha önátmetszések nélkül tudnánk felemelni, de ezt nem lehet, pl a Boy felület ellenpélda. Mindenképpen lehetnek kettőspontok.
>
> Kis mozgatás után legrosszabb esetben izolált kettőspontjaink lesznek, és a felfelé mutató vektormező. Ez minden esetre lokálisan megadja a 3-sokaságot, úgy fogjuk tüskézni, hogy a két tüske összege a felfelé mutató legyen.



Ilyen módon becsukjuk a lokálisan megadott 3-sokaságot, ez a beágyazott felület normálnyalábjának egy stabilizáció utáni golyónyalábjának immerziója. Ez pont jó lesz, ha a felemelt felület beágyazott is.

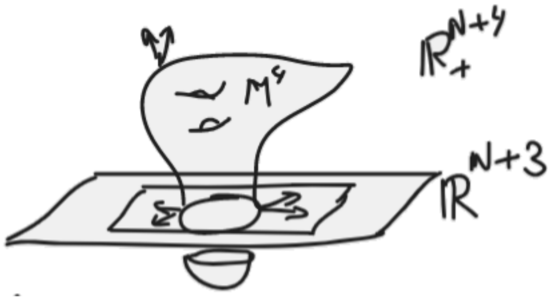
Ha vannak kettőspontok, akkor ezzel a konstrukcióval megjelennek egyéb kettőspontok is, nem csak maga a felület.



Lokális alak egy felületi kettőspont körül

Felkoordinátázzuk. $(x, y, 8)$ az egyik rész, (∞, z, w) a másik, egy immertált tóruszt kapunk! Valamiféle tüskézéssel adva, ezzel magával eljátszhatjuk ugyanezt a konstrukciót, kapunk egy tóruszt R^3-ban, állítjuk hogy ezt mindig fel lehet emelni beágyazásként R^4-be, meg kell oldani azt a házit, hogy tórusznál nem történhet meg ez az ágfelcserélős disznóság. Ezzel modulo immerzió le tudjuk vagdosni az extrán előálló immertált tóruszokat, és kapjuk amit akartunk. ■

Legyen most $\alpha \in \ker J$. Ő egy leképezés $S^3 \to SO(N)$, őt a J a nullába viszi, tehát a vele csavart tüskézésű gömb nullkobordáns, mint tüskézett sokaság. Van tehát $S^3 \hookrightarrow R^N \hookrightarrow R^{N+3}$ az α tüskézéssel, és létezik egy $M^4 \subset R^{N+4}_+$ tüskézett sokaság, aminek a pereme pont ez a gömb. Ez mindenképpen egy spinsokaság lesz, hiszen hozzáadva egy triviálisat az érintőnyalábjához triviálisat kapunk (minden SW osztálya 0). Ezt a sokaságot becsukjuk, $\hat{M} = M \cup D^4$.



A jelen szituáció

A ragasztásnál a normálnyalábok nem passzolnak, de egy 4-cella ragasztása nem változtat az első két homológián, tehát $\hat{M}$ is spin lesz. Most rekonstruáljuk a normálnyalábját $\hat{M}$-nak. Állítjuk, hogy létezik egy $\hat{M} \xrightarrow{f} S^4 \leftarrow \xi^N$ leképezés, és egy vektornyaláb S^4 felett úgy, hogy $\nu_{\hat{M}} = f^*\xi$.

A nyaláb úgy készül, hogy a két félgömbön vesszük a triviális nyalábot, és az α-val ragasztjuk össze őket. A függvény maga úgy készül, hogy az M^4-et egy kis gallér kivételével beleképezzük az északi sarkba, a gallér lesz a felső félgömb, a D^4 amit ragasztunk hozzá pedig lesz az alsó. Ez valóban visszahúzza a tüskézést, az alsó és felső félgömbön külön külön persze triviális, és a két rész között pontosan az α az áttérés.

Tehát $p_1(\nu_{\hat{M}}) = f^* p_1(\xi)$, kiértékeljük a fundamentális osztályon, $< p_1(\nu_{\hat{M}}, [\hat{M}] >=< f^* p_1, [\hat{M}] >=< p_1, f_*[\hat{M}] >= \deg f < p_1(\xi), [S^4] >$, mivel f az alsó félgömbön irányítástartó bijektív, a foka 1.

A Pontrjagin osztályra vonatkozó szorzatformulából $p_1(\nu\hat{M}) = -p_1(T\hat{M})$.

Definíció: $w_I(M) :=< w_I(TM), [M] >$, hasonlóan Chern és Pontrjaginra is.

15.

$0 \to \ker J \to \pi_3(SO) \xrightarrow{J} \pi^S(3) \to (Imm(2,1) = Z_8) \to 0$

A magot leképeztük Z-be a $-3\sigma(\hat{M})$ segítségével, $\pi_3(SO)$-t pedig $p_1(\xi)$-vel. Kell még, hogy J szürjektív, és hogy $3\sigma(M^4) = p_1[M^4]$.

Állítás: $p_1(\xi \xrightarrow{R^4} S^4)$ mindig páros.

Következik abból, hogy $p_1 \equiv w_2^2 \mod 2$.

Tehát képezhetünk $p_1(\xi)/2$-vel is, és a magból hasonlóan. A harmadik stabil homotopikus csoport tehát legalább 24 elemű, mert a magban ott a 3, és a faktor 8 elemű.

Állítás: $\exists \hat{M} : \sigma\hat{M} = -16$.

Azt állítjuk, hogy pontosan a spin sokaságok állnak elő egy trükkösen tüskézett S^3 nullkobordizmusának lezárásaként.

Kidobunk egy pontot, ekkor a maradék egy 3 dimenziós CW komplexussal homotóp ekvivalens. Az érintőnyalábból le tudunk vágni egy irányt, a spinség azt jelenti, hogy a 2-vázon triviális, és láttuk, hogy ekkor a 3-vázon, tehát az egész $\hat{M} \setminus D^4$-en is. A Hirsch tétel garantálja, hogy tudjuk immertálni ezt a kilyukasztott sokaságot trivializált normálnyalábbal, hiszen ha egy triviálishoz adunk még több triviális irányt, az is triviális marad, kellően magas dimenzióban ingyen beágyazás is lesz, sőt elég nagy dimenzióban $\partial(\hat{M} \setminus D^4)$ standard alakban lesz. A másik irány világos, ha be tudjuk ágyazni trivializált normálnyalábbal, akkor minden SW osztály eltűnik.

Legyártunk egy komplex felületet amire $(w_2 \equiv) c_1 = 0$, és megfelelő a szignatúra. $\{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in CP^3 : z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 0\}$ lesz a kandidáns. Ez minden esetre egy 1 komplex kodimenziós részsokaság. A szignatúra formulát akarjuk alkalmazni, a Pontrjagin osztály érdekel minket, ahhoz pedig az első 2 Chern osztály a $p_1 = c_1^2 - 2c_2$ formula szerint.

$TX \oplus \nu = TCP^3|_X$. A komplex projektív tér Chern osztályait már kiszámoltuk gyakorlaton $c_i = \binom{4}{i} a^i$, ahol $a \in H^2$ a generátor. A normálnyalábnak csak egy Chern osztálya lesz. Ezt úgy számolhatjuk, mint a Thom osztály megszorítását a bázisra. A Thom osztály kiterjed az egész CP^3-ra, hiszen a golyónyaláb peremén már nullaként értékelődik ki, ezzel kiterjeszthetjük. Állítás, hogy ez megegyezik $PD_{CP^3}[X]$-el. Ezt kiszámolandó vegyünk egy generikus egyenest, mint 2 láncot, és messük el X-el. Ez egy egyváltozós negyedfokú megoldását jelenti, tehát általában 4 metszéspontunk lesz. Következésképpen ez az osztály $4a$. Mostmár számolhatunk, $c(TX) = c(TCP^3)c(\nu)^{-1} = (1 + 4a + 6a^2 + 4a^3)/(1 + 4a)|_X = 1 + 0 + 6a^2$. Tehát az első Pontrjagin osztály $0 - 12a^2|_X$, ezt kiértékeljük $[X]$-en, $[X]$ a 4 *generátort reprezentálja H_4-ben, mint az előbb kiszámoltuk, tehát végeredményképp -48-at kapunk.

Mostmár látjuk, hogy $|\pi^S(3)| = 24$, eltaláljuk a 24et J-vel. A szignatúraformulát és a szürjektivitást nem csináltuk még meg. Utóbbival kezdünk.

$\Omega_3^{spin} = 0$, van egy tüskézésünk ezen a 3-sokaságon, ez ad egy spinstruktúrát rajta, veszünk egy spin nullkobordizmust. Ennek a hártyának is triviális a normálnyalábja, kérdés, hogy a peremen hozzáragad-e M tüskézéséhez. A két trivializáció közötti áttérés nullhomotóp lesz a peremen, pont ezt jelenti spin kobordizmusnak lenni, hogy a megszorítás a peremre megegyezik a perem spinstruktúrájával. Tehát minden reprezentáns $\pi^S(3)$-hoz tüskézett kobordáns S^3-ak diszjunkt uniójával, ez a 4-cellák kiszúrásával látszik, ami amúgy is kell, mert nem biztos hogy kiterjed a tüskézés a 4-cellára.

A szignatúraformulához be fogjuk látni, hogy $\Omega_4 = Z$, és mindkét oldala az egyenlőségnek homomorfizmus, majd kiszámoljuk egy nem nulla elemen, hogy megegyeznek.

16.

Kobordizmusokat akarunk számolni.

> 💡 Kobordizmusgyűrűben ekvivalenciareláció a kobordizmus, diszjunkt unió az összeadás, direkt szorzat a szorzás.

Állítás: Ha TM kobordáns triviális nyalábbal, akkor M nullkobordáns.

Ez azt jelenti, hogy létezik egy kobordizmus M és valami N között, és fölötte egy vektornyaláb, ami M-re TM-ként szorul meg, N fölött pedig triviálisként.

Állítás: Pontosan akkor nullkobordáns egy sokaság, ha minden SW-száma nulla.

Az egyik irányt meggondoljuk, a másikat valaki előadja szünet után.

$\Omega_n = \{\text{irányított n-sokaságok}\}/\text{ir. kobordizmus}$, az a konvenció, hogy a perem irányítása + a "kifelé mutató normális" egyezzen a kobordizmus irányításával, tehát hogy ez jól működjön azt kell megkövetelnünk a kobordizmustól, hogy a pereme M és $-N$ között létesítsen kobordizmust, így lesz valóban ekvivalenciareláció.

Az irányított kobordizmusgyűrűt Ω_*-al, az irányítatlant $\mathfrak{n}$-el jelöljük.

Bizonyítás: Legyen $TM = \epsilon^n$, húzzunk egy hártyát $M \times RP^{n-1}$-re. $M \times M$-ben ott ül az eredeti sokaság átlósan.

Állítás: Ennek az átlónak az normálnyalábja izomorf TM-el.

Vegyünk egy Riemann metrikát M-en, ekkor azok a pontok lesznek közel az átlóhoz, amiknél a két koordináta közel van egymáshoz. Azok az irányok érintik az átlót, amiknek mindkét komponensre vett vetülete megegyezik. A komplementeraltér azon iránypárokból fog állni, amiknek a vetületei ellentettjei egymásnak, vagyis $T(M \times M)|_M = TM \oplus \nu$, ahol TM a (v, v) alakú vektorokból áll, ν pedig a $(v, -v)$ alakúakból.

Látjuk tehát, hogy a normálirány reprezentánsai geodetikus szakaszok felezőpontjaiból állnak, ez pedig világos módon izomorf TM-el, az első koordinátára való vetítés izomorfizmus.

Kitörölve az átló egy környezetét, mivel az triviális normálnyalábbal ül a szorzatban, a peremen egy $S^{n-1} \times M$-et látunk, a két koordináta felcserélése mostmár szabad Z_2 hatást eredményez. Faktorizálás után kapunk valami Y peremes sokaságot, ennek a pereme pont $M \times RP^{n-1}$ lesz, a koordinátacsere pont felcseréli a peremen a gömb átellenes pontjait. Leképezzük ezt az egész hóbelevancot valami RP^N-be. Az egész $M \times M \setminus \{U_{átló}\}$-ról létezik egy Z_2 ekvivariáns leképezés valami S^N-be.

> 💡 Ha van egy celluláris szabad Z_2 hatásunk valami CW komplexuson, beképezhetjük ekvivariáns módon a 0-vázat valamilyen S^N-be úgy, hogy egy pontot elküldünk valahova, a hatás szerinti párját az ellentettjébe. Ezt megpróbáljuk kiterjeszteni, az 1-cellák végpontjai már le vannak képezve, összeköthetjük ezeket a pontokat, a hatásnál vett képe az 1-cellának pedig megint ennek az útnak a -1szerese legyen. Ezt folytathatjuk, mindig egy $\pi_{n-1}(S^N)$ elem lesz a perem képe, kellően nagy N-re ez beterjed, és ekvivariáns módon kiterjeszthetjük.

Tehát vesszük ezt a leképezést, elvégezzük a fatorizációt, az egyik oldalon visszanyerjük az Y-t, a másikon az RP^N-et, feltehetjük, hogy a peremet megadó S^{n-1} valamilyen standard módon képeződik S^N-be, és így a perem RP^{n-1}-e valamilyen standard módon, mondjuk egy projektív altérbe képeződik az RP^N-ben. Ennek az altérnek van egy szép geometriai duálisa, egy RP^{N-n+1}. A konstrukcióban igazából feltehető, hogy az egész perem úgy képződik RP^N-ben, hogy levetítjük a második koordinátára, és azt valami standard módon beágyazzuk. Kis mozgatással elérhetjük, hogy a kép transzverzális legyen erre a duális altérre úgy, hogy a peremen ne változtassunk rajta, a duális altér őse ekkor, mivel 1 pontban metszi a perem képét, ad egy M peremű részsokaságot, pont ahogy akartuk.

Ha TM csak kobordáns egy triviális nyalábbal, akkor is valami hasonlót lehet elvégezni, az $N \times N \setminus U_{átló}$-ban még beszúrjuk a kobordizmust *valahova*.

Állítás: Ha M nullkobordáns, akkor minden SW száma nulla, továbbá $M \mapsto w_I[M]$ egy $\Omega_* \to Z_2$ homomorfizmus.

Ha van egy hártya M-en, akkor az érintőnyalábot ki lehet fejezni a hártya érintőnyalábjának a megszorításaként, stabilizálva egy normáliránnyal, $TM \oplus \epsilon^1 = TW|_M$. Tehát a karakterisztikus osztályok meg fognak egyezni, vagyis $w_I(TM) =$

$w_I(TW|_M) = i^* w_I(TW)$, ahol $i : M \hookrightarrow \partial W \subset W$. Most ezt kiértékelve $w_I[M] =< w_I(M), [M] >=< i^* w_I(W), [M] >=< w_I(W), i_*[M] >=< w_I(W), 0 >= 0$.

A másik irányhoz Bonn, Christian és Hakon bizonyítását nézzük majd meg.

Minden dimenzióban véges sok SW számunk van, minden sokaságra ezeket az értékeket meghatározhatjuk, és eldönthetjük, hogy ki nulla, és ki nem. Az előző állítás második felét is megkapjuk, mert a SW osztályok diszjunkt unióra összeadódnak diszjunkt tartókon, és amit meggondoltunk a jóldefiniáltságát adja meg.

Felületeknél w_1^2, és w_2 a két kandidátusunk. Minden irányítható nullkobordáns, hiszen az érintőnyalábjuk stabilan triviális. RP^2-nek a w_1-e a nemtriviális elem, a négyzete is a megfelelő grádicson. $w_2[RP^2] \equiv \chi(RP^2) \mod 2 = 1$, tehát ezek lineárisan összefüggenek.

Állítás: Azon az RP^i-k, ahol az $i \neq 2^k - 1$ egy szabad polinomrészgyűrűt fognak alkotni $\mathfrak{n}_*$-ban.

17.

Múltkor ha nullkobordáns, akkor minden karakterisztikus szám nulla, most irányított kobordizmuscsoport 4. és 8. lépcsője.

> 💡 A komplex kobordizmusgyűrűben (M, I)-k élnek, ahol $I : TM \oplus \epsilon^N \to TM \oplus \epsilon^N, I^2 = -1$, modulo stablian majdnem komplex kobordizmus, ami kompatibilis a megszorítással a peremre. Nem lehet valódi komplex kobordizmust csinálni dimenzionális okokból, azt lehetne esetleg, hogy leképezzük CP^1-be és nézzük a fibrumokat, de nem működik annyira szépen.

Tétel: $\Omega_*^U \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[CP^1, CP^2, \dots]$ ($\forall c_I[M] = 0$, akkor $M \sim 0$-t feltéve még mindig).

Bizonyítás: Legyen $s_I(x_1, \dots, x_m) := \sum_{\sigma \in \{[r] \to [m]\}} \prod_{i=1}^r x_{\sigma i}^{i_j}$, ahol $I = (i_1 \dots, i_r)$. Vegyük észre, hogy $s_{1,\dots,1} = \sigma_r$, ha r darab egyes van, továbbá $s_{(k)} = \sum x_j^k$. A szimmetrikus polinomokból tudjuk származtatni a megfelelő számokat oly módon, hogy felbontjuk vonalnyalábok összegére, és kiértékeljük $\sigma_r(c_1(\ell_1), \dots, c_1(\ell_r)) = c_r(\ell_1 \oplus \dots \oplus \ell_r)$. Most definiáljuk $s_I(\xi) = s_I(c_1(\ell_1), \dots, c_1(\ell_r))$, ahol $p^*\xi = \ell_1 \oplus \dots \oplus \ell_r$.

$s_{(k)} - s_{(k-1)} s_{(1)} + s_{(k-2)} s_{(1,1)} - \dots + (-1)^k k s_{(1,\dots,1)} = 0$. Ezeket az s_I osztályokat el is találja a p^*, mert a természetes leképezésnél pont a szimmetrikus polinomok felelnek meg a Chern osztályok képének, ezt pedig a szimmetrikus polinomok alaptételéből felírhatjuk.

$s_{(k)}[CP^k] = k + 1$-et láttuk már ezek szerint. Mi történik szorzatokkal? $s_{(k)}[A \times B] =< s_{(k)}(pr_A^* TA \oplus pr_B^* TB), [A \times B] >$, annak örülünk, hogy a hatványösszegek egyszerűen összeadódnak, tehát ez a formula egyszerűen a két osztály összegét eredményezi $=< s_{(k)}(pr_A^* TA + pr_B^* TB), [A \times B] >=< pr_A^* s_{(k)} TA, [A \times B] > + < pr_B^* s_{(k)} TB, [A \times B] >= 0$ dimenzionális okokból, az egyik osztály csak $H^*(A)$-ban él, a másik csak a B-ben, tehát nullaként értékelődik ki. Tehát ez az osztály detektálja a CP^k-kat. Általában is $s_I[A \times B] = \sum_{I = J \sqcup K} s_J[A] s_K[B]$. Ezzel meg tudjuk különböztetni a szorzatokat, csak akkor lesz egy ilyen szám nem nulla, hogyha pont eltaláljuk a megfelelő dimenziókat a partícióban, s hasonlóan a többszörös szorzatokra. Felírunk egy mátrixot, az egyik irányban $(k), (k-1, 1), \dots, (k-1, 1, 1) \dots$ a különböző egyes, kettes, hármas stb partíciókkal, a másik irányban $CP^k, CP^{k-1} \times CP^1, \dots, CP^{k-2} \times (CP^1)^2 \dots$, és az eddigi meggondolások miatt ez felsőháromszög lesz.

Ezen a ponton van szükségünk arra, hogy $\mathbb{Q}$ felett vagyunk, ez garantálja, hogy ez a mátrix amit kapunk invertálható legyen, és tényleg bármit ki lehessen keverni belőlük, a függetlenség is világos, továbbá mivel a dimenziószám $p(k)$ a k. grádicson, izomorfizmus.

Hasonlót szeretnénk irányított kobordizmusokra. Irányítatlan esetben nem fog működni a dolog, hiszen $s_{(2)} = s_{(1)}^2$ és nem generálják a megfelelő szintet.

Most azt halucináljuk, hogy a Pontrjagin osztályok is valami formális változók elemi szimmetrikus polinomjaiként állnak elő. Minden működni fog szépen, meg kellene gondolni, hogy ${}^p s_{(k)}[CP^{2k}] =$ mennyivel. Azt tudjuk, hogy $p(TCP^{2k}) = (1 + a^2)^{2k+1}$, ezért ${}^p s_{(k)}[CP^{2k}] = 2k + 1$.

Másik megközelítés, először irányítatlan esetben. $\mathfrak{N}_n = \pi_{n+N}(MO(N))$, ahol $MO(N) = T\gamma^N$, az univerzális nyaláb Thom tere. Hasonlóan $\Omega_n = \pi_{n+N}(MSO(N))$ irányítottan. Tenzorozunk Q-val, van egy "racionális Hurewicz", és $\Omega_n \otimes Q = H_{n+N}(MSO(N); Q)$, ha $N \geq n + 2$.

$MSO(N) \approx_{\mathbb{Q}} K(Z, N) \times K(Z, N+4) \times K(Z^2, N+8)\dots$ racionálisan $< 2N$ dimenzióig homológiákon, és majd ebből következni fog izomorfizmus a homotopikus csoportokon is. $H_{n+N}(MSO(N); Q) = H_n(MSO(N); Q)$ a Thom izomorfizmus miatt, ezt a teret pedig a pontrjagin osztályok generálják. Következni fog, hogy a 4-dienziós részt CP^2, a 8-dimenziós részt $CP^2 \times CP^2$ és CP^4 generálják racionálisan.

18.

Egzotikus gömbök ❤️

Vegyünk egy $\xi^4 \to S^4$ vektornyalábot, amire $p_1(\xi) = 6u$, és $e(\xi) = u$. Ennek tekintsük a gömbnyalábját, ez persze S^4 felett S^3 fibrumú fibrálás, ami nem triviális.

> 💡 Egy ilyet ismerünk, az általánosított Hopf.

Állítás: $H^*(S\xi) = H^*(S^7)$

> Gysin sorozattal látszik könnyen, ebben pont a gömbnyaláb, és a bázis homológiái vannak, eltologatva. Az Euler osztállyal való szorzás izomorfizmus majdnem mindenhol, kivéve $r = 0$-ban, és 8-ban. A nullás helyen a gömbnyaláb összefüggő, megkapjuk hogy a $H^0(S\xi) = Z$. Mivel az Euler osztállyal való szorzás $H^4 \to H^8$ a nulla leképezés, a magnak kell megjelennie előtte, vagyis $H^7(S\xi) = Z$.

Szeretnénk, hogy homotóp ekvivalens S^7-el, találjunk egy leképezést, ami ezt a kohomologikus izomorfizmust indukálja. Veszünk egy elemet $\pi_7(S\xi)$-ben, ez pont egy S^7-ből menő leképezés a terünkbe, konkrétan valamelyik generátort tekintsük. Hurewicz miatt valóban Z ez a csoport. Világos, hogy ez homológiákon izomorfizmust indukál, és lineáris dualitás miatt a $H^7(S\xi)$-n is izomorfizmust indukál $H^7(S^7)$-be.

> f_* izomorfizmus, π_7-en és H_*-on. $H_7(S\xi)$ generátorán (a) $H^7(S\xi)$ generátora (α) 1-ként értékelődik ki. Ez a generátor az S^7 fundamentális osztályának előrelökése f-el, vagyis $\alpha(f_*[S^7]) = f^*\alpha[S^7] = 1$.

Állítás: ha $f : X \to Y$ homologikus izomorfizmus, mindenki 1-öf, akkor homotopikus izomorfizmus is, és Whitehead miatt homotopikus ekvivalencia is.

Kellene mostmár, hogy $S\xi$ homeomorf is S^7-el. Morse-elméletet alkalmazunk, $S\xi$-n veszünk egy Morse-függvényt egy minimummal egy maximummal, és dolgokkal közben. Ez egy kobordizmus a minimumhely egy környezete, és a maximumhely egy környezete között. Ez az egész homológiái a hengerrel izomorfak, tehát a h-kobordizmus miatt homeomorf a hengerrel, a sapkákat pedig valami homeomorfizmussal visszaragasztjuk.

Mayer Vietoris mutatja, hogy a két gömb kidobása után valóban a henger homológiáit látjuk, a peremek beágyazása valóban izomorfizmust indukál, és mindenki egyszeresen összefüggő, tehát alkalmazható a h-kobordizmus valóban. Nemcsak homeomorf, diffeomorf $S^6 \times I$-vel, majd a két végét valami diffeomorfizmusokkal beragasztjuk D^7-ekkel. A terünk tehát mindenképp homeomorf így S^7-el.

Ha ez egy standard S^7 lenne, akkor ő pereme D^8-nak. Ekkor $D\xi \cup D^8$ egy sima 8-sokaság, számoljuk ki a szignatúráját. Ennek az X^8 sokaságnak a H^4-e Z, hiszen $D\xi \sim S^4$, és egy 8-fogantyú van hozzáragasztva, ebből látjuk összességében is, hogy $0, 4, 8$-ban Z, másutt nulla, azt akarjuk megérteni, hogy a H^4 generátor négyzete hogy viszonyul H^8 generátorához. Megkeressük a Poincaré duálisát, ami pont ξ nullszelése lesz, egy S^4, a ragasztás előtt ez volt a generátor, a 8-fogantyú beragasztása ezen nem változtat. A négyzethez az önmetszésszámot kell meghatároznunk, ez ξ konstrukciója miatt (és definíció szerint) pont az Euler osztály lesz. Tehát az S^4 önmetszése az 1-et adja meg $H_0(D\xi)$-ben (mert feltevés szerint a nyaláb Euler osztálya a generátor). Ez Poincaré dualitás miatt dualizálódik, és látjuk, hogy a H^4 generátor négyzete a H^8 generátora, vagyis valóban 1 a szignatúra.

$p_1(TX)$-et is meg tudjuk határozni, sőt elegendő ezt az S^4-re megszorítva megadni. Ez a $TX|_{S^4}$ nyaláb két komponensre bomlik $TS^4 \oplus \xi$. Továbbá mivel TS^4 stabilan triviális, ezért az hogy ő hozzá lett adva ξ-hez, az nem változtat a karakterisztikus osztályokon, tehát $p_1(TX) = p_1(\xi) = 6u$. Következik, hogy $p_1^2[X] = 36$. $\sigma = \frac{7p_2 - p_1^2}{45}$ a szignatúraformula, eszerint $45 = 7p_2 - 36$, ami lehetetlen, hiszen $p_2[X]$ egy egész szám, és $7 \not| 81$. Az egyetlen feltevésünk amit használtunk, hogy egy D^8-at hozzáragasztva sima sokaságot kaptunk, következésképpen ez az $S\xi$ nem lehet a standard S^7.

Nem tudjuk, hogy S^4-en hány diffható struktúra van, CP^2 három pontban felfújva már birtokol egzotikus struktúrákat. R^4-en kontinuum sok van, stb. Fix dimenzióra az egzotikus gömbök összefüggő unióra egy kommutatív (fél)csoportot alkotnak természetes módon, 7-re ez egy Z_{28} 😱.

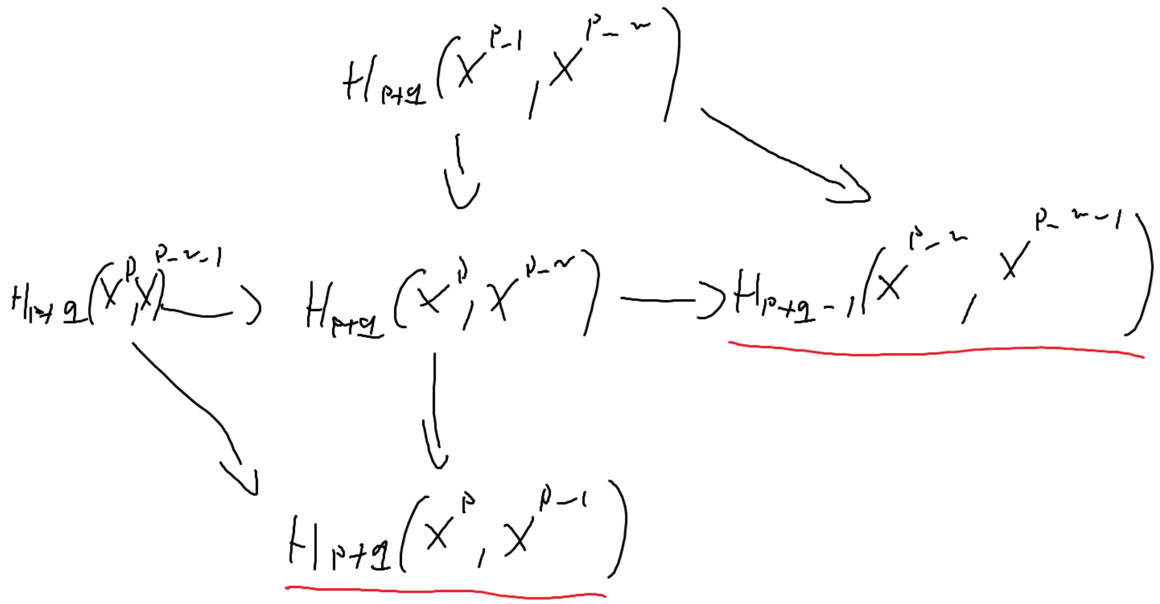
19.

$\emptyset = X^0 \subset X^1 \subset \dots$ filtrálás, relatív láncokat nézünk. Definiáljuk $Z^r_{pq} = im(H_{p+q}(X^p, X^{p-r}) \to H_{p+q}(X^p, X^{p-1}))$ és $B^r_{pq} = im(H_{p+q+1}(X^{p+r-1}, X^p) \to H_{p+q}(X^p, X^{p-1}))$, vagyis azokat a láncokat nézzük, amiknek a pereme alacsonyról jön, illetve azokat, melyeknek a pereme valami magasról jön. A leképezések az (X^p, X^{p-1}, X^{p-r}) és a $(X^{p+r-1}, X^p, X^{p-1})$ hármasok egzakt sorozatából jönnek.

$E^r_{pq} = Z^r_{pq}/B^r_{pq}$. Minél kisebb az r annál nagyobb a szabadság Z^r_{pq}-ban, csökkenő láncot alkotnak $Z^1 \supset Z^2 \supset \dots$, és fordítva a B^r-ek növekednek, ahogy r növekszik, egye fentebbről jöhetnek peremek. Állítjuk továbbá, hogy az összes B benne van az összes Z-ben. A B-t definiáló leképezések mind áthúzódnak $H_{p+q}(X^p)$-n a térpár egzakt sorozata miatt, ezek pedig mind benne vannak a Z-kben, mint állítottuk, definiálhatjuk $\cup B^r_{pq} = B^\infty_{pq} \subset Z^\infty_{pq} = \cap Z^r_{pq}$-t.

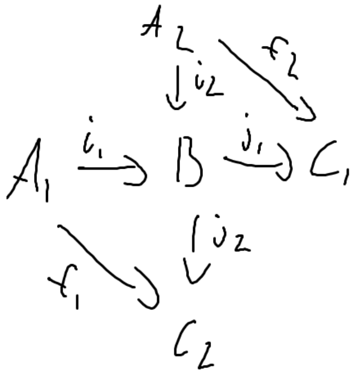
Ebből pedig $E^\infty_{pq} = Z^\infty_{pq}/B^\infty_{pq}$. Most ezek között is csinálunk leképezéseket.

$Z^r_{pq}/B^r_{pq} \to Z^r_{pq}/Z^{r+1}_{pq}$ szürjektív leképezés létezik a tartalmazás miatt.



A térhármasok egzakt sorozatai, a két aláhúzott részben a két leképezés képének a faktorai egyenlőek a pillangó(?) lemma miatt.

Állítjuk, hogy $imj_2/imf_1 = imj_1/imf_2$, legyen $\alpha + imf_1$ egy elem az első faktorból. Ez bennevan a j_2 képében, $\alpha = j_2(\beta)$, lökjük ezt előre $j_1(\beta)$-ként, kellene hogy ez jóldefiniált, izomorfizmus. Elegendő a jóldefiniáltságot ellenőrizni, a többi kb automatikus. $j_2(\beta) - j_2(\beta') \in imf_1$, tehát előáll $j_2 \circ i_1(\lambda)$ alakban. Előrelökjük, és megnézzük, hogy mennyiben különböznek. $j_1(\beta - \beta')$, függőleges egzaktság miatt $\beta - \beta' - i_1(\lambda) = i_2(\mu)$ valamilyen $\mu \in A_2$-re. Erre alkalmazzuk a j_1-et $j_1\beta - j_1\beta' = j_1(i_1\lambda + i_2\mu) = j_1 i_2 \mu = f_2\mu$, az utolsó sor definíció szerint az f_2.



A diagram kicsit kevesebb betűvel, a vízszintes és függőleges rész egzakt

Mostmár folytatva az előző egyenlőséget $Z^r_{pq}/Z^{r+1}_{pq} = B^{r+1}_{p-r,q+r-1}/B^r_{p-r,q+r-1}$, és innen injektíven képezhetünk $Z^r_{p-r,q+r-1}/B^r_{p-r,q+r-1} = E^r_{p-r,q+r-1}$-be a "nevező" kicserélésével. Ezt a kompozíciót hívjuk $d^r_{pq} : E^r_{pq} \to E^r_{p-r,q+r-1}$-nek. Ez valóban egy differenciál lesz, kiszámolhatjuk a homológiát jee. $ker\ d^r_{pq} = Z^{r+1}_{pq}/B^r_{pq}$, csak a szürjektív résznél csökkenhet a mag a kompozícióban. A kép pedig $im\ d^r_{p+r,q-r+1} = B^{r+1}_{pq}/B^r_{pq}$, csak az injektíves résznél csökkenhet a kép a kompozícióban, a fakorizációt elvégezve látjuk, hogy $ker\ d^r_{pq}/im d^r_{p+q,q-r-1} = E^{r+1}_{pq}$ a homológia pont a kövekező lap megfelelő eleme! A differencálok egyre messzebbre nyúlnak, a pozitív negyedsíkon kívül a mi esetünkben nullák vannak, tehát véges idő után a homológiája stabilizálódik, ez adja az E^∞ lapot.

$F_{pq} = im(H_{p+q}(X^p) \to H_{p+q}(X))$, tehát hogy p magasságból "mennyit látunk". Állítjuk, hogy $E^\infty_{pq} = F_{pq}/F_{p-1,q+1}$.

$$\begin{tikzcd}
 & H_{p+q}(X^{p-1}) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
H_{p+q-1}(X,X^p) \arrow[r] \arrow[dr] & H_{p+q}(X^p) \arrow[r] \arrow[d] & H_{p+q}(X) \\
 & H_{p+q}(X^p, X^{p-1}) &
\end{tikzcd}$$

Erre a diagramra is alkalmazhatjuk a pillangó lemmát.

Példa alkalmazásra a Gysin. $S\xi \xrightarrow{S^n-1} B$, az E^1 lapon a sorokban a bázis, az oszlopokban a fibrum homológiáját látjuk ha a bázis egy filtrálását emeltük fel.

Ugyan ez a konstrukció megy kohomológiákkal is, csak a nyilak megfordulnak, és az indexek elcsúsznak, ezeket fordítva szokás indexelni, hogy megkülönböztessük. A gyűrűstruktúra nem marad meg, mert a kohomológiát is szét kell szedni szintekre. Fibrálásnál legalább annyi megmarad, hogy modulus a bázis kohomológiája felett, ez kompatibilis a térhármasos dolgokkal.

Ez bármilyen, akár extraordináris (ko)homológiaelméletre működik. Például a vázfiltrálás a bordizmus homológiaelméletben a második lapon $E^2_{pq} = H_p(X, \mathfrak{N}_q)$ fog látszani, és a végtelen lapon $\mathfrak{N}_*(X)$-hoz fog konvergálni.

20.

Hogy néz ki az Eilenberg-McLane terek kohomológiája?

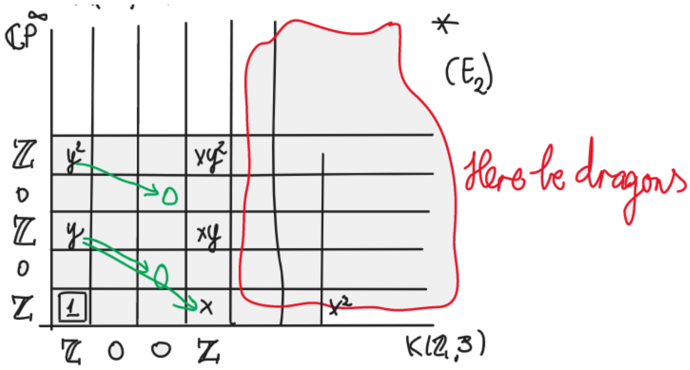
$K(Z,1) = S^1, K(Z,2) = CP^\infty, K(Z_2,1) = RP^\infty$-ket ismerjük, a kohomológiájukat is persze. Közöttük vannak mindenféle összefüggések. Korábban már láttunk példát erre, $* \xrightarrow{\Omega K(Z,n) \sim K(Z,n-1)} K(Z,n)$ fibrálásunk van.

Elkezdjük felírni a spektrális sorozatot $K(Z,3)$-ra. Mi van mondjuk az E_2 lapon? A Hurewicz miatt a kezdetet látjuk, $Z, 0, 0, Z$, mert összefüggő, és 2-szeresen összefüggő. A fibrum CP^∞-nek is ismerjük a kohomológiáját, $Z, 0, Z, 0, \ldots$, a végtelen lapon pedig a pont kohomológiáját kell látnunk.

CP^∞							
	y^2			xy^2			
	y			xy			
	1			x			x^2
							$K(Z,3$

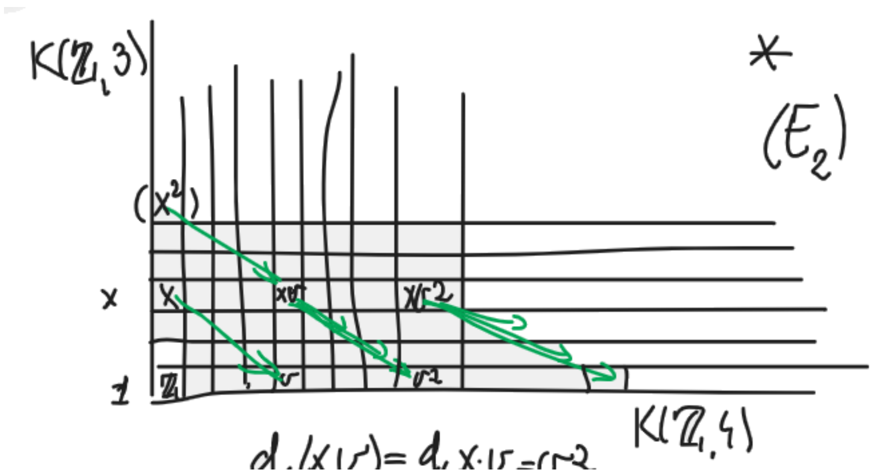
Az y által generált csoportot meg kell hogy ölje a d_3, ami counterintuitive módon azt kell hogy jelentse, hogy $d_3 y = \lambda x$ nem nulla λ-ra, hiszen **őt** faktoráljuk. Az x-be d_2 szerint az $1,1$-es cella jön ahol 0 van, a negyedik lap után pedig már csak nullák jönnek bele, tehát ezt is a d_3-nak kell megennie, ehhez szürjektívnek kell lennie rá, tehát $d_3 y = \pm x$, a generátor ambiguitása miatt feltehető, hogy ez az együttható pont $+1$. Az y-hatványokon is nullába megy és nullából jön a d_2 differenciál. Handwaving time, mivel d_3 differenciál, ezért $d_3(y^2) = 2d_3 y \cdot y = 2xy$ a Leibniz szabály szerint. $d_3(xy) = d_3 x \cdot y + x \cdot$

$d_3 y = x^2$. Az $E_4^{3,2}$ elem tehát így vagy egy Z_2, vagy nem marad semmi, attól függően, hogy az x^2 nulla-e, vagy sem, és a négyes lap után már nem változik ez a cella, ott pedig nullának kell lennie hiszen a pont kohomológiáit kell látnunk, vagyis x^2 nem nulla, de 2-torzió. A továbbiakban $y^k \xrightarrow{d_3} kxy^{k-1}$, s így tovább, $xy^{k-1} \xrightarrow{d_3} (k-1)x^2y^{k-2}$.



A kettes lap alsó sarka a sárkányokkal együtt

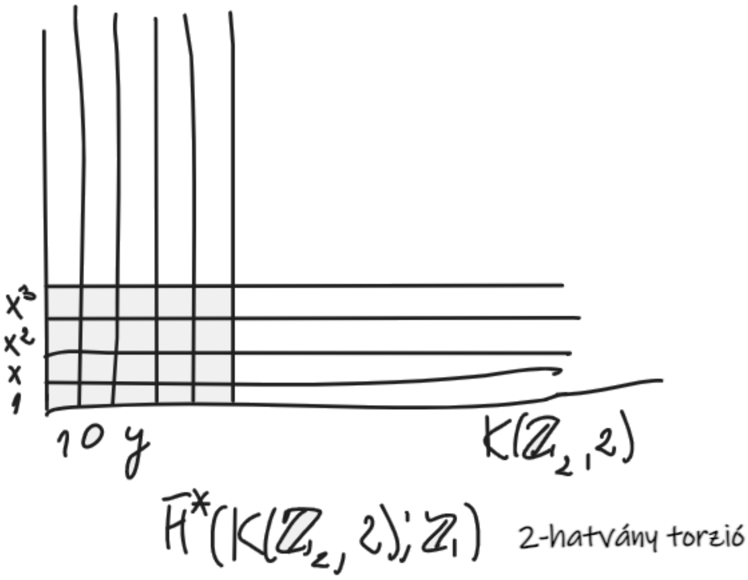
A piros részről sokat nem látunk, legfeljebb annyit, hogy mindenki aki beleérkezik 2-torzió, így a négyes lapon legfeljebb egy Z_2-vel módosultak a csoportok. Milyen lenne egy nem torzió és nem x elem a $K(Z,3)$ kohomológiáiban? Fölötte akkor látnánk egy oszlopot az y hatványaival vett tenzorszorzatokból. Ha egy differenciál beérkezik ebbe az u-ba például a piros részről, akkor az csak torziócsoportból jöhet, mert ő volt az első nemtorzió elem a piros részben, ha az első négy oszlopból jön, akkor a negyedik lapig ez nem történhetett meg, mert nem ér el oda differenciál, majd pedig már az első négy oszlopban torziócsoportok vannak csak. Tehát ezt az u elemet nem találjuk el soha, és a belőle kimenő differenciálok persze mind nullába mennek, tehát ő minden lapon ottmarad, tehát a végtelenedik lapon is, ez lehetetlen, tehát a piros részben minden elem torzió. Tehát minden esetre a 3. grádics után torziócsoportok vannak csak, $H^*(K(Z,3);Q) = \Lambda < x >$, egy elem által generált szabad alternáló algebra (ahol $grad\ x = 3$).



A $3 \to 4$ eset.

Next step $K(Z,4)$, ennek az első 4 szintjét tudjuk, illetve függőlegesen $K(Z,3)$, amit csak racionálisan tudunk. x mellett generálja v a $H^4(K(Z,4))$-et. Ha torziót képzünk Z-be, a kép nulla, ha Z-ből képzünk torzióba a mag még mindig Z, tehát ahol Z-t látunk, tehát x és v által generált rész minden esetre a negyedig lapig túlél, itt pedig x-nek muszáj a v-t eltalálnia, méghozzá a ± 1szeresét, hogy az a két cella megszűnjön. xv hasonlóképpen megmarad az E_4-ig, ha itt nem szűnik meg, akkor már nincs is aki eltűntesse, mert aki bele érkezik x^2 az torzió az előbbi számolás szerint. $d_4(xv) = v^2$ ismét a Leibniz szabály szerint, neki és xv-nek is most kell eltűnnie, tehát ő nem torzió, $H^8(K(Z,4);Q) = Z < v^2 >$, és előtte nem tud nem-torzió csoport lenni. xv^2-től balra-fel csak torzió van, onnan nem jön semmi érdekes, belőle kiinduló differenciál is csak a 4-es érdekes, és itt el is kell tűnnie, ergo $d_4(xv^2) = v^3$ egy nem torzió elem, kapunk egy újabb racionális generátort, $H^{12}(K(Z,4);Q) =< v^3 >$, s így tovább. Következik, hogy $H^*(K(Z,4);Q) = Q[v]$, a következő lépés innen teljesen hasonló, mint a $2 \to 3$ lépés, az ötödik oszloptól jobbra csak torzióelemeket kapunk, $H^*(K(Z,2n);Q) = Q[x_{2n}]$, és $H^*(K(Z,2n+1);Q) = \Lambda < x_{2n+1} >$.

Mivan az RP^∞-el? $K(Z_2, 2)$ összes kohomológiája valamilyen 2-hatvány torzió kell legyen, mert RP^∞ kohomológiagyűrűjében mindenki az. Egy lehetséges járható út, hogy mindent beszorzunk a 2-adikus számok testével, ez megőrzi a 2-hatvány torziót, a szabad részt is le tudjuk követni, minden mást eltűntet.



Felírva a következő spektrális sorozatot $K(Z_2, 2)$-ről $K(Z_2, 3)$-ra látjuk, hogy itt is csak 2-hatvány torzió jelenhet meg (a nulladik fokot kivéve), s így tovább minden n-re.

Megpróbálhatjuk például $K(G, 1)$-re, ami látszik szépen, hogy folyamatosan véges csoportokat kapunk, ha G véges.

Állítás: Ha G véges, akkor $\bar{H}^*(K(G, 1); Z)$ mind torzió.

> A szokásos konstrukciója ennek a térnek, hogy van fölötte egy G fibrumú fedés a végtelen joinos trükközésből, $EG \to K(G, 1)$. Ez a függvény a pont homológiáját beleképezi a $H_*(K(G, 1))$-be valamilyen módon, azt szeretnénk, hogy ez racionális izomorfizmus legyen, megpróbálunk inverzet gyártani neki. Nem elegendő szimplexenként felemelni, mert ciklus felemeltje nem lesz ciklus, ehelyett a teljes ősképet vesszük. $C_*(BG) \to C_*(EG)$, minden szimplexet a teljes ősével helyettesítünk, a két leképezés kompozíciója a rétegszámmal való szorzás, racionális együtthatókkal ez valóban invertálható leképezés lesz.

💡 Torzió+végesen generált=véges

Minden esetre ezekből a végesen generált Abel-csoportokra értjük, hogyan néz ki a kohomológiagyűrű, legalábbis racionálisan.

Tétel (racionális Hurewicz, Serre): Ha X k-összefüggő, akkor $H_n(X; Q) = \pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}$ ha $n \le 2k$.

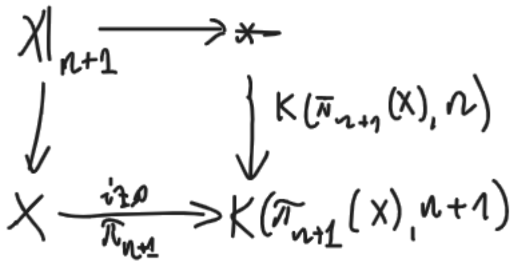
> $X|_n \to X$ fibrálás, a totális terének ugyanazok a homotopikus csoportjai, kivéve az n., amelyik nulla, s így tovább építjük fölé a tornyot, spektrális sorozattal lekövetjük majd, hogy hogyan változnak a homológiák.

21.

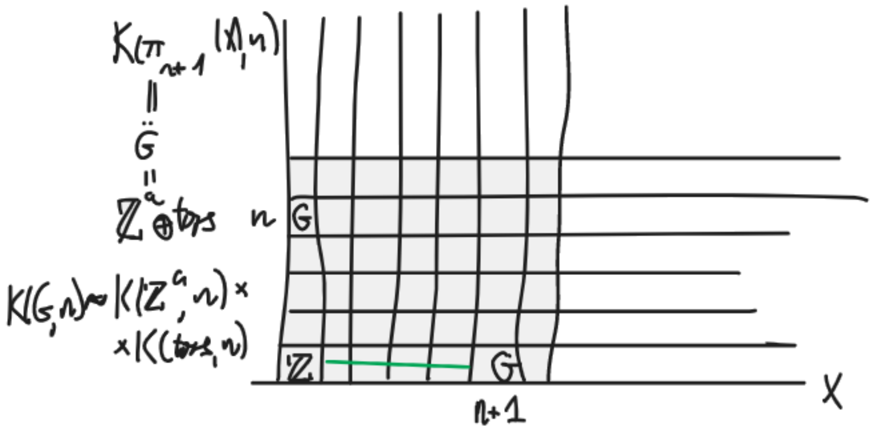
Racionális Hurewicz

Tétel (Serre): Ha X n-szeresen összefüggő, akkor $\pi_k X \otimes Q = H_k X \otimes Q$ minden $k < 2n$-re.

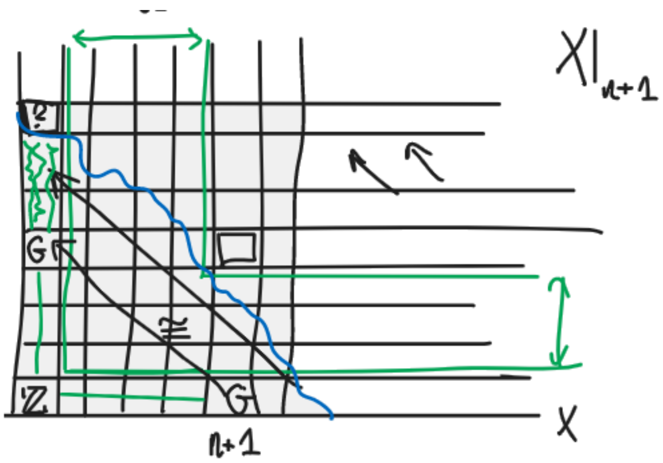
> Csinálunk egy fibrálást ami kiöli az n. csoportot



Felírjuk a fibrálás spektrálsorozatát



Most $K(\pi_{n+1}(X), n) = Z^a \oplus$torzió, így $K(G, n) = K(Z^a, n) \times K(tors, n)$. Ebből az egész homológiagyűrű mint a múlt órán meggondoltuk $H_*(K(G, n)) = Z[u_1, \dots, u_a] \oplus$torzió ha n páros, és $\Lambda < u_1, \dots, u_a > \oplus$ torzió ha páratlan. A sarokban Z-t kivéve az első $n \times n+1$-es négyzet csupa nulla a tér magas összefüggősége miatt, sőt egy egész sávban.



Az első érdekes differenciál a lenti G-t köti a fentihez izomorf módon. Azért izo mert a végeredmény $n+1$ összefüggő konstrukció szerint, tehát el kell tűnnie az n. átlónak.

Az $n+1$. oszlop után csak véges csoportok vannak, tehát az ide jövő differenciálok csak valami véges indexű részcsoportra tudják kicserélni a 0. sor elemeit, ez a szabad rész dimenzióján nem változtat.

Emiatt $H_k(X|_{n+1}) \otimes Q = H_k(X) \otimes Q$ minden $n+1 < k < 2n$ esetén, a homotopikus csoportokra pedig $\pi_k(X|_{n+1}) = \pi_k(X)$ minden $n+1 < k$-ra. Ezt most ismételjük, $H_k(X|_{n+2}) \otimes Q = H_k(X|_{n+1}) \otimes Q$ minden $n+2 < k < 2n+2$, és ez egyenlő $H_k(X) \otimes Q$ minden $n+2 < k < 2n$-re. Kiöljük a megfelelő sok homotopikus csoportot, és aztán alkalmazzuk a valódi Hurewiczet, ha két csoport izomorf, akkor a szabad részük is izomorf, a homológia torziórésze valahogyan változhat, ezért azt kidobjuk.

Következmény: $rk\ \Omega_{4n} = p(n)$, és 0 máshol.

$\Omega_n = \pi_{N+n}(MSO(N)),\ N >> n$. A Serre tétel szerint, mivel $MSO(N)$ $N-1$-szeresen összefüggő, ezért racionálisan ez megegyezik a homológiacsoporttal $H_{N+n}(MSO(N); Q)$ ha $N+n < 2N-2$. Ez teljesül, ha N-et kellően nagynak vesszük ($N > n+2$). $MSO(N)$ egy Thom-tér, tehát neki ugyanazok a homológiái, mint a bázisának, csak elcsúsztatva a ranggal. $H_n(BSO(N); Q)$, ennek tudjuk, hogy a Pontrjagin és/vagy az Euler osztályok generálják, stabilizálódás után csak a Pontrjagin osztályok maradnak meg. $H^*(BSO(N); Q) = Q[p_1, \ldots, p_{N/2-1}]$, vagy $Q[p_1, \ldots, p_{N/2-1}, e]$, racionálisan mindegy hogy homológia vagy kohomológia, a pontrjagin osztályok szabadon generálnak itt, pontosan annyiféle szorzatuk/hatványuk lesz a megfelelő szintben, mint amennyi az n partícióinak a száma.

Hasonlóan az $MU(N)$-et tekintve megkaphatjuk a komplex kobordizmusgyűrűt racionálisan, ennek a homológiáit a Chern osztályok (duálisai) generálják szabadon, nem 4, hanem 2-es szorzóval. Az irányítatlan esetben persze nem kapunk semmi újat, hiszen minden elem torzió.

El tudjuk-e ugyanezt mondani a szabad rész helyett Z_2-es részekkel? Nem jó csak naivan kidobni mindent ami nem 2-torzió, hanem a 2-adikus egészekkel kell tenzorozni, erre vannak az approximációs tételek, de ezt később.

And now for something completely different.

<u>Állítás</u>: A szignatúra kobordizmusinvariáns

Vegyük $M-N$ egy W^{4n+1} nullkobordizmusát (tehát egy kobordizmust közöttük, elhajtva). Az N-nek volt valami metszetformája $H^{2n} \times H^{2n} \to H^{4n}(N) = Z$, az irányítást megváltoztatva a H^{2n} nem változik, H^{4n}-et pedig a -1-es szorzással azonosítjuk Z-vel. Tehát a metszetforma mátrixát elemenként meg kell szorozni -1-el, vagyis $\sigma(-N) = -\sigma(N)$, diszjunkt unióra pedig összeadódik, hiszen a metszetformák is direkt összeadódnak. $\sigma(M \sqcup -N) = \sigma(M) - \sigma(N)$, azt kellene látni tehát, hogy irányított nullkobordáns sokaság szignatúrája 0 (a továbbiakban $\partial W = M$). Erre látványos bizonyíték egy fél dimenziós *izotróp* (amire megszorítva azonosan nulla a forma) altér megadása $H^{2n}(M)$-ben. Ha két osztály a W-ből jön, azoknak a metszete biztosan nulla, $H^{2n}(W) \to H^{2n}(M)$, ez a leképezés pedig beleillik a hosszú egzakt sorozatba. A háttérben csendben mindent Q együtthatókkal nézünk, ez a szignatúrán persze nem változtat. $H^{2n+1}(W)$ Poincaré dualitás miatt egyenlő $H_{2n}(W, M)$, stb a HES elemeire. Ez annyira természetes dolog, hogy a kohomologikus egzakt sorozatból pont a homologikusat kapjuk meg, és ha a leképezést a PD-vel csináljuk egzakt marad a diagram.

$$(Q)$$

$$\begin{tikzcd}
{} & H^{2n+1}(W) \arrow[l] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] & H^{2n+1}(W,M) \arrow[l] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] & H^{2n}(M) \arrow[l] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] & H^{2n}(W) \arrow[l] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] & H^{2n}(W,M) \arrow[l] \\
{} & H_{2n}(W,M) \arrow[l] & H_{2n}(W) \arrow[l] & H_{2n}(M) \arrow[l] & H_{2n+1}(W,M) \arrow[l] & {} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$H^{2n}(M) \xleftarrow{\phi^*} H^{2n}(W)$, és $H_{2n}(W) \xleftarrow{\phi} H_{2n}(M)$ lesz a kedvenc dulális leképezéspárunk. Állítjuk, hogy $rk\phi = \dim\ H_{2n}(M)/2$. Egzaktság miatt $ker\phi = im\phi^*$ a Poincaré dualitással áthúzva, mivel ez a két leképezés duális párok,

$dim\ im\phi = dim\ H_{2n}(M) - ker\phi$, és kész vagyunk mert függvénynek és duálisának ugyanaz a rangja. Világos végül, hogy $im\phi^*$ egy izotróp altér lesz, mert a W-ből jövő osztályok metszete nulla lesz. $< i^*\alpha \smile i^*\beta[M] >$, ahol i a perem beágyazása. Tekintsük a szorzatot, és értékeljük ki M-en. $< i^*(\alpha \smile \beta), [M] >=< \alpha \smile \beta, i_*[M] >=< \alpha \smile \beta, 0 >$, hiszen $[M] = \partial[W]$.

22.

Approximációs tételek, kézírott jegyzet 4. kötet 66.o.

Tétel (mod c Hurewicz): Ha $\pi_1(X) = 0$ $k < n$-re, és $\pi_k(X) \in \mathcal{C}$ akkor $H_k(X) \in \mathcal{C}$ ugyanekkor, és $\pi_n(X) \to H_n(X)$ $\mathcal{C}$-izomorfizmus, ahol $\mathcal{C}$ egy osztálya Abel csoportoknak, amely teljesíti a lenti 1,2a,3 tulajdonságokat.

Definíció: $f : A \to B$ egy $\mathcal{C}$-izomorfizmus, ha $ker\ f, coker\ f \in \mathcal{C}$.

$\mathcal{C}$-ről feltesszük, hogy leszálló például, illetve "elhanyagolható" csoport faktora is legyen az.

1. Ezt egyszerűbben úgy mondhatjuk, hogy $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ bővítésnél $A \in \mathcal{C}$ pontosan akkor ha $A', A'' \in \mathcal{C}$.

Az elhanyagolhatósági analógiát folytatva szeretnénk, hogy elhanyagolható terek szorzatára is elhanyagolható csoportokat kapjunk.

2. a. változat $A, B \in \mathcal{C}$ akkor $A \otimes B \in \mathcal{C}$, és $Tor(A, B) \in \mathcal{C}$
   b. változat $A \in \mathcal{C}$, akkor $A \otimes B \in \mathcal{C}$
3. $A \in \mathcal{C}$, akkor $H_*(K(A, 1); Z) =_{\mathcal{C}} H_*(*)$ (az egyenlőség $\mathcal{C}$-izomorfizmust jelent).

A relatív mod C Hurewiczhez a 2b feltétel kell!

Tétel (mod C Whitehead): X, Y 1-összefüggő, $f_* : \pi_2(X) \to \pi_2(Y)$ szürjektív, akkor ekvivalens:

- $H_k(f)$ $\mathcal{C}$-izomorfizmus $k < n$-re, epimorfizmus $k = n$-re.
- $\pi_k(f)$ $\mathcal{C}$-izomorfizmus $k < n$-re, epimorfizmus $k = n$-re.

Példák: $\mathcal{C} = \{0\}$ gyönyörűen teljesít mindent, erre visszakapjuk a klasszikus tételeket. $\mathcal{C}_{FG}$:={végesen generált csoportok}, a generátorszám szubadditív, a 2a teljesül, a 2b viszont nem, egy végtelenül generált csoporttal tenzorozva elronthatjuk. A hármas is teljesül, $K(A, 1)$ végesen generált lesz a konstrukciót tekintve.

Itt alkalmazva a mod C Hurewiczet, már látunk valami újdonságot, nevesül hogy egy egyszeresen összefüggő CW-komplexus homotopikus csoportjai végesen generáltak. Ha kivesszük az egyszeres összefüggőséget kidobva nem is igaz az állítás, például S^1 és S^2 csokrának π_2-je egy Z^∞.

Továbbá $\mathcal{C}_p$ ={p-hez relatív prím exponensű csoportok}, ahol p prímszám. Egy bővítésben az elemrendek a részcsoport és a faktor elemrendjeiből szorzódnak össze (és esetleg ennek valami osztóját vesszük), tehát a rész és a faktor exponensének a szorzata többszöröse a bővítés exponensének, és visszafelé, a rész és faktor elemrendjei a bővítés elemrendjeinek osztói, tehát valóban 1 teljesül. Tetszőleges csoporttal való tenzorszorzás nem tudja az exponenst növelni persze, nem csak 2a, hanem 2b is teljesül. a hármashoz megint a kontrukciót tekintsük, ha A-ban van egy Z_q direkt összeadandó, akkor az egész homológia úgy fog kinézni hogy minden pozitív fokban Z_q-kat látunk.

> 💡 S^3-on hat Z_p szabadon, kapjuk az $L(p, 1)$-et faktorként, a faktorizáció celluláris lesz és kapjuk hogy a homológiák a megfelelőek. Ezt továbbtolva S^∞ kellően pontrahúzható, ezzel eljátszva ugyanezt kapjuk a $K(Z_p, 1)$-et.

Definiálhatjuk még $\mathcal{C}_0$-t, mint az összes véges exponensű csoportot, erre is megy minden (vehetnénk csak a véges csoportokat, de az nem hasznos nekünk).

Most jöjjenek a bizonyítások, mod C Hurewicz először.

A $\mathcal{C}$-beli csoportok helyére nullákat akarunk írni. Tegyük fel, hogy $\pi_k(X) = 0$ $n < m$-re tudjuk az állítást ($m = n$-re ez a standard Hurewicz). Indukciós lépés hogy $\pi_1 = ... = \pi_{m-2} = 0$. Csináljuk a kiölős fibrálást $X|_{m-1} \to X \to K(\pi_{m-1}(X), m-1)$, mi történik a homológiákon? Felrajzoljuk a spektrális sorozatot, az X homológiáit látjuk, illetve a fibrum, $K(\pi_{m-1}, m-2)$-éit. X-nek az m-1. helyen van egy C-beli dolog, a végtelen lapon, mivel indukció szerint $X|_{m-1}$ homológiáiban csak C-beli csoportot kapunk az n. fok alatt, hiszen ezek az átlók egy bővítés láncát adják a megfelelő homológiáknak. Mit látunk az n. fokban? Megjelenik $\pi_n(X)$ úgy ahogy van indukció szerint. Azt állítjuk/kapjuk hogy $H_i(X|_{m-1}) =_{\mathcal{C}} H_i(X), i \leq n$.

<u>Lemma</u>: Ha $ker\ d/im\ d \in \mathcal{C}$ egy $A' \to A \to A''$ félig egzakt sorozatban ahol $A \notin \mathcal{C}$, akkor vagy $A' \notin \mathcal{C}$, vagy $A'' \notin \mathcal{C}$.

<u>Lemma</u>: Ha $A \in \mathcal{C}$, akkor $H_*(K(A,n); Z) = H_*(*)$.

> Teljes indukció n-re, a $* \to K(A,n)$ fibrálást tekntsük, a fibrum $K(A, n-1)$. Felírjuk a spektrális sorozatot, a nulladik oszlopban csupa C-belit látunk, keressük meg a nulladik sorban az első nem C-beli elemet, előtte mindenki C-ben van, ezért az összes oszlop is C-ben van (a cellákban a homológiák tenzorszorzatai lesznek, ez két C-beli szorzata, tehát C-beli), a belőle menő differenciálok C-beli csoportokba mennek, tehát abban a cellában megmarad a nem C-beli csoport egészen a végtelen lapig, ugyanakkor ott a ponttal C-izomorf dolgot kellene látnunk, ellentmondás.

Ebből kifolyólag ha a végén nem látunk nem C-beli csoportot a végtelen lapon, azt már a kettes lapon is látnunk kellene, tehát az n-1. fokig X homológiái C-beliek, és az első n oszlop C-beli, a végtelen lap n,0 eleme pont a fibrálás totális terének H_n-jéből a vetítés által indukált képe a $H_n(X)$-ben, a különböző lapokon ezen az indexen egymásba ágyazott csoportokat látunk, amik C-izomorfak egymással, hiszen a mag nulla, a faktor pedig C-beli ,tehát $H_n(X) \leftarrow H_n(X|_{m-1}) =_C \pi_n(X)$, ahol a nyíl egy C-izomorfizmus.

23.

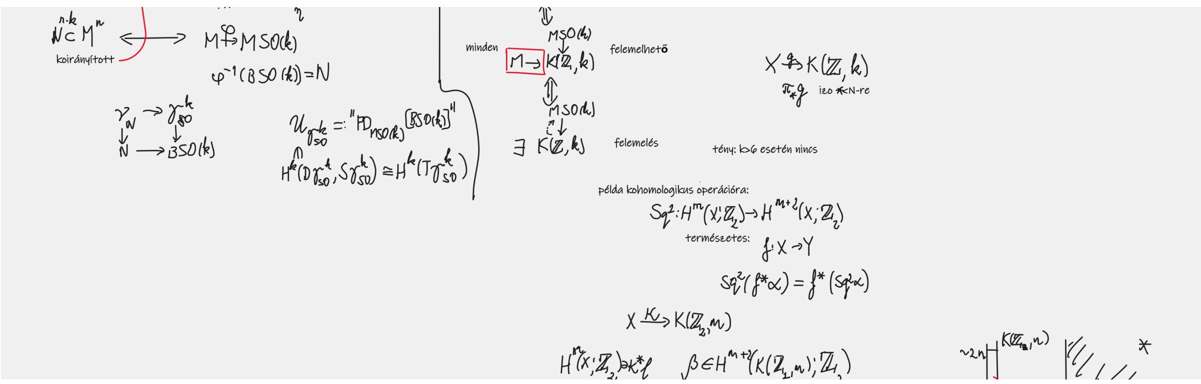
$Imm(2,1) = Z_8$-et állítjuk. Kvadratikus alakokat nézünk, de most $q : (V, (.)) \to Z_4$, és a skaláris szorzattal $q(x+y) = q(x) + q(y) + 2(x,y)$ azonosság teljesül.

Ha van egy $(V_1, q_1) \oplus (V_2, q_2) = (V, q)$ a q összeadással származik q_1, q_2-ből, ezért egy félcsoportot alkotnak. q-t neutrálisnak hívjuk, ha létezik $H \leq V$ amire $\dim H = \dim V/2$, és $q|_H \equiv 0$. Ezekkel kifaktorálhatunk, és csoportot kapunk! $(V,q)^{-1} = (V, -q)$ lesz az inverz. Jelöljük $WQ(Z_2, Z_4)$-el. Ezekhez Braun kitalált valami függvényt, $\gamma(q) = \sum_v i^{q(v)} \sqrt{2}^{-\dim V}$-ként. Erre teljesül, hogy

1. direkt összegre szorzattá bomlik
2. ha q neutrális, akkor $\gamma q = 1$
3. Ha V skaláris szorzása nem izortóp, akkor $V = V_1 \oplus ... \oplus V_n$ 1-dimenziósak összege
4. $4q \simeq -4q$

Ezekből következik, hogy $\gamma : WG(Z_2, Z_4) \to Z_8$ homomorfizmus, sőt izomorfizmus.

1. $\gamma q = \sum_{V_1, V_2} i^{q_1 v_1 + q_2 v_2} \sqrt{2}^{-\dim V_1 + \dim V_2}$, és ez pont szétesik szorzattá.
2. $V = H \oplus L$, hogy $q|_H \equiv 0$, és H fele dimenziós. $\gamma q = \sum_{H,L} i^{qh+ql+2(h,l)} \sqrt{2}^{-\dim V}$. Legyen $l \neq 0$ fix, akkor $\sum_H i^{qh+2(h,l)} = 0$, és $h \mapsto hl$ egy nemelfajuló lineáris forma lesz, ezért az összegben összeadunk ugyanannyi darab 1est, és -1est, és így $ql = 0$. Mostmár az összegben csak az $l = 0$ tag érdekes, ezt kiösszegezve $|H|/2^{\dim V/2} = 1$ lesz.



24.

Hogyan tudunk, illetve lehet-e kohomológiaosztályt részsokasággal reprezentálni?

$\alpha \in H^k(M, Z)$ megfelel egy $M \to K(Z, k)$ leképezésnek, konkrétan $\alpha = f^*l,\ l \in H^k(K(Z, k), Z)$ a fundamentális osztály visszahúzottja. Valóban minden osztály előáll, a gömbre megmondjuk hogy minden szimplexet a cellafelbontásban jó fokkal képezzen, és leellenőrizhető hogy ez kiterjed az egész Eilenberg-McLance térre (ld alábbi konstrukció).

> 💡 $\pi_k S^k = Z, \pi_{k+1} S^k = Z_2$, ezt a csoportot kiölhetjük egy $D^{k+2} \cup_\eta S^k$ ragasztással, a generátor mentén ragasztjuk be a golyót, s így tovább kiölhetünk minden homotopikus csoportot.

Egy k dimenziós kohomológiaelemhez egy k kodimenziós részsokaságot szeretnénk keresni, erre Pontrjagin-Thom. $N^{n-k} \subset M^n$, koirányított, ergo a normálnyalábja visszahúzható $BSO(K)$-ből, a konstrukció pedig ezt megfelelteti egy $M \to MSO(k)$ leképezésnek, a $N = \phi^{-1}(BSO(k))$ képlet adja vissza a részsokaságot (bordizmus erejéig).

> 💡 MSO a $\gamma^k_{SO} \to BSO(k)$ fibrálás Thom tere.

$M \xrightarrow{f} K(Z, k)$, ezt szeretnénk valahogy áthúzni az $MSO(k)$-n. Most megpróbáljuk értelmezni a Poincaré dualitást az MSO(k)-n belül, ez nem teljesen evidens, mert nem sokaságok. $PD_{MSO(k)}[BSO(k)]$ úgy lesz megmondva, hogy $:= u_{\gamma^k_{SO}}$, tehát a Thom osztály, ami $H^k(D\gamma^k_{SO}, S\gamma^k_{SO}) = H^k(T\gamma^k_{SO})$-ban él. Ez olyan értelemben jó definíció, hogy ha a tárgyalás alatt lévő tereket sokaságokkal approximáljuk, akkor a valódi Poincaré dualitásból jött képek "tartanak" ehhez valamilyen értelemben. A CW approximáció után beágyazhatjuk valami magas dimenziós euklideszi térbe, majd itt a csőszerű környezet már egy peremes sokaság, homotóp ekvivalens a térrel és az itt kapott valódi PD az ennek az osztálynak a visszahúzottja.

Ennek a Thom osztálynak a visszahúzottja lesz az a $PD_M(\phi^{-1}BSO(k)_0) = \phi^* u$ kohomológiaosztály, amit reprezentál az $M \xrightarrow{\phi} MSO(k)$ által klasszifikált N^{n-k}. $u \in H^k(MSO(k), Z)$, neki megfelel egy leképezés a $K(Z, k)$-ba ami őt klasszifikálja. Ezzel az egész történet redukálva van arra, hogy tudunk-e olyan ϕ-t produkálni, amire ezzel az u-t klasszifikáló leképezéssel prekomponálva eltaláljuk az adott α klasszifikáló leképezését, ergo hogy ez a leképezés felemelhető-e $MSO(k)$-ba?

Ez nem ad sok okot reményre. Mi van akkor, ha mindenki reprezentálható lenne? Ugye minden $M \to K(Z, k)$ leképezés felemelkedik ekkor $M \to MSO(k) \xrightarrow{\text{u klassz}} K(Z, k)$. Ez ekvivalens lesz azzal is, hogy létezik-e ennek az u-t klasszifikáló leképezésnek egy egyoldali homotopikus inverze. Merthogy ha van a $K(Z, k)$-nak valami X approximációja ami tudja azt, hogy az első pár (sok) homotopikus csoporton izomorfizmusokat indukál, akkor akárhogy van leképezésünk $K(Z, k)$-ba egy kis dimenziós sokaságba, akkor ezt vissza tudjuk húzni ebbe az X approximációba.

Algebrai topológiával leellenőrizhetjük, hogy van-e akadálya egy ilyen leképezés létezhet-e.

<u>Fact</u>: $k > 6$ esetén nem lesz ilyen.

A kohomológiagyűrűt nézzük, a gyűrűstruktúra még okés lenne, de a kohomologikus operációk elrontják.

Példa kohomologikus operációra: $Sq^2 : H^m(X, Z_2) \to H^{m+2}(X, Z_2)$ természetes, vagyis ha van egy $f : X \to Y$ folytonos leképezésünk, akkor ez kompatibilis a visszahúzással $Sq^2 f^* \alpha = f^* Sq^2 \alpha$. $\alpha \in H^n(X, Z_2)$ egy eleme megfelel egy $X \to K(Z_2, m)$ függvénynek. Ezért ha van egy $Sq^2 \in H^{m+2}(K(Z_2, m), Z_2)$ kohomológiaelemünk, akkor az α-t klasszifikáló leképezéssel ezt is visszahúzhatjuk és kapunk egy $H^{m+2}(X, Z_2)$ elemet.

<u>Fact</u>: $K(Z_2, m)$ kohomológiáinak $(Z_2 felett)$ az alsó része mindenhol ugyanúgy indul, vagyis $\dim H^{m+r}(K(Z_2, m)) = \dim H^{n+r}(K(Z_2), n)$ ha $r < n, m$, és az elemek valahogy megfelelnek egymásnak.

Ezt az m=n+1 esetben egész könnyen láthatjuk is a fibrálás spektrális sorozatából. $* \xrightarrow{K(Z_2,n)} K(Z_2, n+1)$-re.

Ezért ha valahol találunk egy Sq^2 nevű elemet, akkor az egyel magasabbban is, és ezeket mind vehetjük egy kalap alá így.

Van egy másik konstrukció is ami elkerüli ezt a dimenziótologatást, $X \times X$-en hat a Z_2, de nem szabadon, $X \times X \times S^\infty$-n már szabad azonban, és ezzel kell babrálni.

Z_2 felett ezek lesznek *a* kohomologikus operációk, nem jelenik meg semmi egzotikus bs.

Z felett mindez nem igaz, a kohomologikus operációk nem szépek stabilan, nem mindig lehet így eltologatni őket.

Ha egy osztály egydimenziósaknak a szorzata, akkor ez az Sq^2 osztály azt csinálja, hogy mindenféleképpen kiválaszt kettőt, négyzetreemeli és a teljes szorzatot (ami valóban m+2 fokban lesz persze) összeadja az összes lehetséges módon.

A Stiefel Whitney osztályokra például, ha úgy gondolunk rájuk hogy ők a gyökök szimmetrikus polinomjaiként állnak elő, amikor vonalnyalábok összegére húzzuk vissza, akkor pl $Sq^2(w_8) = Sq^2(\sum xi_1 ... xi_8) = \sum ...^2 ...^2 .. \neq w_8 w_2$, de persze csaltunk, lehet hogy az indexek nem jól állnak össze, lehet 9 elem összeszorozva, és egy csak négyzetreemelve, illetve hogy tíz tagú szorzatok vannak mindenféle módon, ez még pont a w_{10}-et adja, tehát a valódi eredmény $Sq^2(w_8) = w_8 w_2 + w_{10}$. Tehát például ha a $w_8 = 0, akkor\ w_{10}$ is nulla.

25.

immerziócsoport folytatás.

Ha nem izotróp a skaláris szorzat a vektorterünkön, akkor a vektorterünk felbomlik egydimenziósak összegére. Ha alapból nem 1 dimenziós volt, akkor veszünk egy nem nulla x vektort, aminek a "hossza" egy, akkor a merőleges kiegészítője az $y \mapsto < y, x >$ leképezés magja. Az $x \mapsto < x, x >$ lineáris funkcionált reprezentálhatjuk $< c, x >$ alakban valami fix c-re, és megnézzük hogy ennek a hossza 1-e vagy sem.

A négyes állításhoz $q^{\oplus 4} \sim (-q)^{\oplus 4}$ kellene. Legyen e négyszeres összeg $V \oplus \ldots \oplus V = W$, és tekintsük azt a $V \to W$ függvényt, ami $\phi_1(x) = (0, x, x, x)$. $q^{\oplus 4}(\phi_1(x)) = 3q(x) = -q(x)$ teljesül hiszen Z_4-be megyünk. $q^{\oplus}(a, b, c, d)$ hogy néz ki? Legyen $x_1 = b + c + d, \ldots, x_4 = a + b + c$, és $\sum \phi_i(x_i) = (a, b, c, d)$ mert a kételemű test felett vagyunk. Ezért $q^{\oplus}(\sum \phi_i(x_i)) = \sum q^{\oplus}(\phi_i(x_i)) = \sum -q(x_i) = (-q)^{\oplus}(x_1, .., x_4)$, pont ezt akartuk.

Az első két állítás miatt a γ leképezés homomorfizmus, és a négyesből látjuk hogy a képe $\subset Z_8$. Ez azért van, mert alkalmazva a lemmát $(V, q)^{\oplus 8} = (V, q)^{\oplus 4} \oplus (V, -q)^{\oplus 4}$, és ez neutrális, ergo nulla a faktorban. $q_+ : Z_2 \to Z_4$ amire $q_+(1) = 1$ generálja is a Z_8-at, izomorfizmust kaptunk, a $WQ(Z_2, Z_4) = Z_8$.

$Imm(2, 1)$-hez veszünk $F \to R^3$ immertált felületet. Ennek az 1-váza is be van immertálva persze, ha ezt látjuk, egy kis környezetre a D^2-jét rá tudjuk képezni a peremnél fogva hogy becsukjuk. A_p-nek van $2p$ hurka, az A'_q-nak pedig q darab az egy vázában. Ezek persze a $H_1(F; Z_2)$ generátorai. A sakálris szorzat a metszet lesz. A szalag az 1-váz körül a nullának felel meg, az övtrükkel eltűntethetjük. Ezért legyen $q(\alpha) =$ hányszor fordul meg a szalag (mod 4).

Kellene hogy ez az összegformulánkkal kiterjed mint kvadratikus alak. $\alpha + \beta$ reprezentálható metszés nélkül, ha volt neki eredetileg, és egy ilyen tekeredés után pont két félfordulatot tesz meg a szalag, vagyis valóban kétszer a mod 2 metszésszámot rendeljük hozzá. Ha nincs metszés akkor persze nem történik semmi. De még nem tudjuk hogy ez homológiainvariáns-e. Az kell hogy ha határral változtatjuk a reprezentánsunkat akkor a q érték nem változik. Ezt elég 1-1 kis szimplexre leellenőrizni, három eset van, vagy diszjunktan vesszük hozzá a szimplexet, akkor nem történik semmi, vagy az egyik éle hozzákerül a reprezentánsgörbénkhez, vagy pedig két ágat köt össze, ezesetben létrejön két új metszéspont ami pont 4-el változtatja meg az étréket, ergo invariánsan hagyja.

Most kobordizmusinvariancia. W kobordizmus F_f, F_g között. $R^3 \times I$-be immertálva. Ezen veszünk egy Morse függvényt. Kritikus pontok között ez végig reguláris homotópia, vehetünk végig immertált reprezentánst minden bázisgörbéhez. Mi történik kritikus pontoknál? Ha $0, 3$ az index akkor diszjunkt uniót csinálunk egy S^2-vel a szintben, q nem változik. Ha 1 az index, akkor egy csövet ragasztunk be. Ha különböző komponensek között megy ez, akkor csak összefüggő unió történik, a H_1 -ek összeadódnak. Ha azonos komponensek ragadnak össze akkor létrejön két új homológiaelem α, β. Ha a γ leképezést tekintjük akkor négyfajta elemünk lesz, $x, x + \alpha, .., x + \alpha + \beta$, ezek rendre $q(x), q(x) + q(\alpha) + 2 < x, \alpha >$, a $q(\alpha)$ nulla, mert a szalag körülötte nem forog, ha kitoljuk a ragasztási rész peremére, a metszete pedig minden eredeti homológiaelemmel nulla, hiszen diszjunktnak is választható tőlük. A β-val lehetnek gondok, ő metszheti a régi elemeket, de mivel nemelfajult a metszetforma van olyan régi y homológiaelem, ami ugyanúgy metszi a régi ohmológiaelemeket, mint β, tehát az $y + \beta$ nullaként metsz mindenkit, őt választjuk inkább reprezentánsnak, és akkor ott is eltűnik, a harmadik elem is invariáns, a negyediknél bejön $2 < \alpha, \beta >= 2$. Írjuk ezt be a γ deiníciójába.

$$\frac{1}{2^{(\dim H_1 + 2)/2}} \sum i^{q(x)} + i^{q(x)} + i^{q(x)+q(\beta)} + i^{q(x)+q(\beta)+2}$$

A második két tag kiöli egymást, az első két tag pedig ugyanaz, leosztunk kettővel és látjuk hogy a γ invariáns. A kettő indexűnél ugyanez történik csak fordítva kell nézni. Kell még, hogy ha valakinek a γ-ja nulla, akkor immerzió-nullkobordáns is, ez is hasonló szálak mentén megy mint az előbb.

A fentebb megadott q_+ a Boy-felülethez tartozik, illetve a hasonló módon megadható q_- a tükörképe, ők a generátorok.

Most, ha az összes SW szám nulla, akkor nullkobordáns valaki.

Lemma: $\forall \tilde{w}(TM)([M]) = 0$ ekvivalens azzal, hogy $(\tau_M)_*[M] = 0$, az érintőnyaláb klasszifikáló leképezésénél az M fundamentális osztályának előrelököttje nulla. $\tilde{w}$ pedig valami top dimenziós SW monom.

A $\tilde{w}$ is visszahúzódik persze az univerázlis nyalábból, ezért ha a fundamentális osztály képe nulla, akkor a természetesség miatt kapjuk hogy minden SW szorzat nulla lesz.

A másik irányban használjuk hogy ha F test, akkor $Hom_F(H_n(X;F),F) = H^n(X;F)$, ez az univerzális együttható tételből látszik. Mivel a SW osztályok szabadon generálják a Grassman kohomológiáit, és ezeken kiértékelve mind nullákat látunk, készen vagyunk.

n szerinti indukció. M^n sima zárt sokaság. $n = 1$-re S^1 van csak, ő nullkobordáns persze, a $\tau_{M*}[M] = 0$ feltételből akarunk lépdelni. $\tau_M : M \to BO(n)$. Celluláris approximációt használunk? $Gr(n) \hookrightarrow Gr(K)$, szeretnénk valami szép nagy térben dolgozni. Az approximáció miatt feltehetjük hogy $\tau_M : M \to sk_n X$, ahol $X = Gr(K, N+K)$. Saard lemma, kritikus értékek halmaza nullmértékű. E^n cella középpontja feltehetően reguláris érték, $\tau^{-1}(\hat{e}) = \sqcup pontok$ a dimenzió miatt. $i : sk_n X \hookrightarrow X$ által indukált leképezés a homológiák n. grádicsában is izomorfizmust indukál, ezt a konkrét Schubert-cellafelbontásból lehet látni, $p(n)$ darab cella van a grádicsban és a nagy homológiában pont ugyanennyi.

$\tau_{M*}[M] = 0$

Lemma: $\tau_M^{-1}(\hat{e})$ páros sok pontból áll.

A homologikus fok miatt kb világos.

Lemma: τ_M és valami $f_1 : M_1 \to sk_n X$ bordánsak, ahol f_1 már az $n-1$ vázba képez.

$\tau^{-1}(\hat{e})$ páros sok pont, tehát a határa valami R-nek. $D^n \ni \hat{e}$, beleképződik ez a páros sok pont, parbaállítva szakaszokkal, műtét ezen az 1-sokaságon kikergeti a cellaközéppontokból a függvényünket, ezt ismételgethetjük.

Állítás: $V^{n-k} = f_1^{-1}(\tilde{e}_k)$ ahol a pont valami k dimenziós cella középpontja $k < n$-re (és reguláris érték), állítjuk hogy ez nullkobordáns.

Most használjuk az indukciós feltevést, elegendő velátni hogy az érintőnyaláb klasszifikáló leképezése nullába viszi a fundamentális osztályát. Belátjuk hogy minden kohomológiaelem visszahúzása kiértékelve $[V]$-n nulla.

$\tau_V = \tau_M \circ j$, ahol j a beágyazása $V \hookrightarrow M$. Δ az a kohomológiaelem ami $\tilde{e}_k$ celláján 1 máshol nulla,