1.

Affin sokaságok: k algebrailag zárt test, polinomgyűrű hozzá. Mindne I ideálhoz tekinthetjük azon pontokat az affin térben, amiken minden ideálelem eltűnik. Hilbert bázistétel miatt mindig van véges sok polinom, ami ezt generálja, ezeken elég ellenőrizni. Ha $I_1 \subset I_2$, akkor $Z(I_2) \subset Z(I_1)$. Ideálok uniójára metszet, szorzatára uniózni kell a varietásokat. Ebből kapjuk a Zariski topológiát, a zárt halmazok az ideálok nullhelyei lesznek (ezeket hívjuk *algebrai halmaznak*), a fenti 3 tulajdonság plusz hogy a 0 ideálon mindenki eltűnik, a teljes gyűrűn pedig senki pont a topológia definíciója. Sokkal nagyobbak a nyílt halmazok, durvább.

Fordítva, tekinthetünnk egy $S \subset \mathbb{A}^n$ halmazhoz az ő ideálját, azokat a polinomokat, amik rajta eltűnnek.

- [ ] HF: ez egy ideál.

A tartalmazást ez az I operátor is megfordítja, továbbá $Z(I(S))$ pont a Zariski topológiában vett lezártja lesz az S halmaznak. Még továbbmenve $I(Z(I(S))) = \sqrt{I}$ fog teljesülni.

Példa: $k[x]$-en az (x^2) ideál, a nullhelyei az $\{x = 0\}$ halmaz, ennek az ideálja pedig az (x), ezt állítja a nullstellensatz.

> Def: I *gyökideál*, ha $\sqrt{I} = I$. Az, hogy $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$ mindig teljesül.

Az algebrai halmazok megfelelnek a gyökideáloknak a megfelelő polinomgyűrűben.

> Def: X zárt *reducibilis*, ha létezik $X = X_1 \cup X_2$ nemtriviális felbontás két zártra, ha nem reducibilis, akkor *irreducibilis* (nevezzük még ezeket *affin varietásnak*).

A Noether tulajdonság (és/vagy a bázistétel) miatt felírható minden zárt véges sok irreducibilis komponens uniójaként. Az irreducibilis halmazok a prímideáloknak felelnek meg.

Figyelem, nem igaz, hogy az ideált generáló polinomok adják meg a komponenseket, még az sem, hogy az irreducibilis komponenseik!

$p < k[x]$ prím ekvivalens azzal, hogy $k[x]/p$ integritási tartomány, képezhetjük a hányadostestét.

Függvények affin varietáson

$X = Z(I)$ legyen a varietás, $A(X) = k[x]/I(X)$ a koordinátagyűrű. Ha megszorítunk X-re polinomokat, a megszorítások pontosan akkor egyeznek meg, ha a különbség eltűnik X-en, ergo az ideálban van, ez az intuitív kép $A(X)$-re.

$K(X)$ a racionális függvények teste, ez $A(X)$ hányadosteste (vagyis $A(X) \setminus (0)$ multiplikatív rendszer, ezzel lokalizálunk).

Ugyan racionális függvénynek nevezzük őket, de persze $\frac{f}{g} : X \to k$ csak ott lesz jó ahol g nem nulla.

$p \in X$-re $0 \to m_{X,p} \to A(X) \to k \to 0$ rövid egzakt sorozat definiálja a p pontban eltűnő függvények ideálját, az ennél vett lokalizálás ($S = A(X) \setminus m_{X,p}$ mult. rendszerrel) lesz a pontbeli lokális gyűrű. A p-ben nem eltűnő nevezőjű racionális függvények halmazát $O_{X,p}$-vel jelöljük.

Egy pont általában megfelel a maximális ideáljának bijektíven, a lokalizálással csak ezt az egy pontot fogjuk látni (minden függvény, ami nem tűnik el p-ben invertálhatóvá válik).

X-en is kapunk egy topológiát, a Zariski által indukált altértopológiát. $X = Z(J)$, akkor egy I ideált beágyazva $(I + J)/J$-ként $A(X)$-be kapjuk az indukált zárt halmazt az altértopológiában.

Példa: $(0, 0)$ pont, ideálja az $I = (x, y)$, az $x = 1$ egyenes ideálja a $J = (x - 1)$, és $(J + I)/I = A(X)$, hiszen a pont nincs rajta az egyenesen.

> Def: U nyílt egy X irreducibilisben. $O_X(U) := \cap_{p \in U} O_{X,p} \subset K(X)$

$\tilde{O}_X(U) = \{\phi : U \to k \text{ halmazelméleti fv } \forall p \in U \exists V : p \in V \subset U \ V \text{ nyílt} \exists f_p, g_p \in k[x] : g_p|_V \neq 0 \ f_p/g_p \equiv \phi \text{ V-n}\}$, ez megegyezik $O_X(U)$-val!

- [ ] HF: egy X irreducibilis nemüres nyíltjának a lezátrja mindig az egész X.

Példa: X legyen $xy = zt \subset A^4$. $x/t; z/y$ két különböző függvény az affin téren, de $K(X)$-en megegyeznek. az x/t kifejezésnek t=0-ban nincs értelme, ekkor xy=0, a másik függvény a t=0,x=0-ban értelmes viszont! Ezzel kiterjesztettük az értelemzési tartományát ennek a függvénynek, mivel X-en megegyeznek.

U nyílt egy X irreducibilisben, akkor $U = X \setminus Z$, ahol Z polinomok nullhelyeként áll elő. Tekintsünk most olyan nyíltakat, amelyek egyetlen polinom nullhelyének komplementerei $U_f = X \setminus Z(f)$.

Megjegyzés: $f \not\equiv 0$, akkor a hatványai egy $S = \{1, f, f^2 \dots\}$ multiplikatív rendszert alkotnak (irreducibilitás miatt ez integritási tartomány, f hatványai nem nullák, vagy mert radikálideál faktorában van, vagy elég egy pontban nézni). $S^{-1}A(X) = \{g/f^r | g \in A(X), r \geq 0\}$ az U_f-en nem eltűnő függvények egy gyűrűje, ergo $\subset O_X(U_f)$.

- ▼ Tétel $S^{-1}A(X) = O_X(U_f)$

  Biz.: választunk egy $\phi \in O_X(U_f)$-et. $J = \{g \in A(X) | g\phi \in A(X)\}$ egy ideál A(X)-ben a gyűrűaxiómák és a kommutativitás miatt. Legyen $p \in U_f$ $O_X(U_f) = \cap_{p \in U_f} O_{X,p}$ definíció szerint, ezért $\phi = h/g$, ahol $g(p) \neq 0$. $g\phi = h \in A(X)$ eszerint, vagyis minden $p \in U_f$-re létezik $g \in J$, hogy $g(p) \neq 0$. Következik, hogy $p \in Z(J)$. $Z(J) \subset \{f = 0\}$, $f|_{Z(J)} = 0$, vagyis a nullstellensatz miatt f^r\in J, vagyis g az ideál része.

- ☐ HF: a fordított irány. A^n-ben vesszük az U_f-et, f polinom. Z zárt halmaz A^n-ben. $O(U_f) = S^{-1}k[x]$-ből bizonyítsuk be a nullstellensatzot, $f|_Z \equiv 0$, akkor $f^r \in I(Z)$.

$I(Z)$ $S_f^{-1}k[x]$ ben. nem lesz valódi ideál.

$S_f^{-1} I \subset S_f^{-1} k[x]$ nem valódi

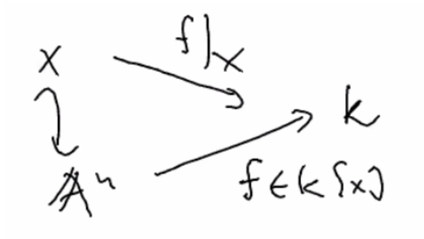
$S_f^{-1} I = S_f^{-1} k[x] \ni 1$

$1 \in S_f^{-1} I$. $1 = \frac{i}{f^r}$ $i \in I$ $f^r = i \in I$.

2.

k algebrailag zárt test, A^n/k az affin tér felette.

$X = Z(I)$ algebrai halmaz, $I \subset k[x_1, .., x_n]$, a koordinátagyűrű $A(X) = k[x_1, .., x_n]/I$, ez megegyezik a nagy térből vett polinomok megszorításaival $\{f|_x; f : A^n \to k \text{ polinomiális}\}$. Tehát egy affin algebrai halmazhoz rendeltünk egy egységelemes végesen generált kommutatív gyűrűt (k-algebrát).



Mit őriz meg $A(X)$ a beágyazásból???

Semmit lol, egy beágyazás megadása az $A(X)$ generátorai megválasztásának felel meg. $g_1, \ldots, g_N$ generálja az algebrát. $k[x_1, .., x_N] \to A$, ahol $x_i \mapsto g_i$, az hogy ezek generálnak pont azt mondja, hogy ez a leképezés szürjektív, vehetjük ennek a magját, homomorfizmustétel szerint persze a faktor pont A, ugyanakkor a mag mint ideál megadja egy beágyazását X-nek A^N-be.

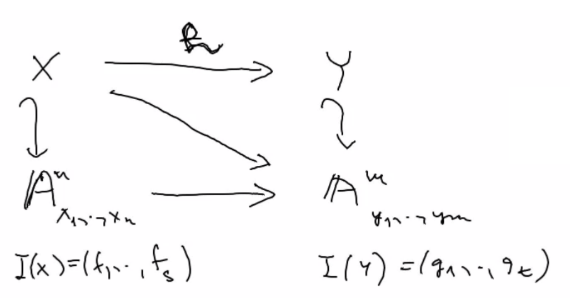
Példa: $A = k[x]$, $X = A^1$, és kapunk egy beágyazást. Máshogy, ha $g_1 = x, g_2 = x^2$, akkor ehhez tartozik az $(y^2 - z)$ ideál $k[y, z]$-ben, ez is az egyenes beágyazása, valami más módon.

Be szeretnénk látni, hogy a gyűrű meghatározza a varietását.

Affin halmazok morfizmusai

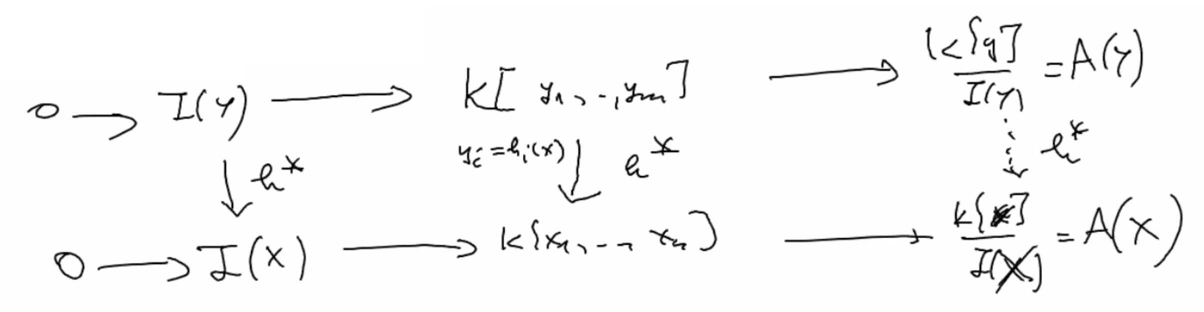
1. Reguláris függvények $\{X \to k\} = A(X)$
2. Függvények $X \to A^n$? Ez persze megy koordinátánként.

Két különböző algebrai halmaz közötti morfizmus mit jelent?

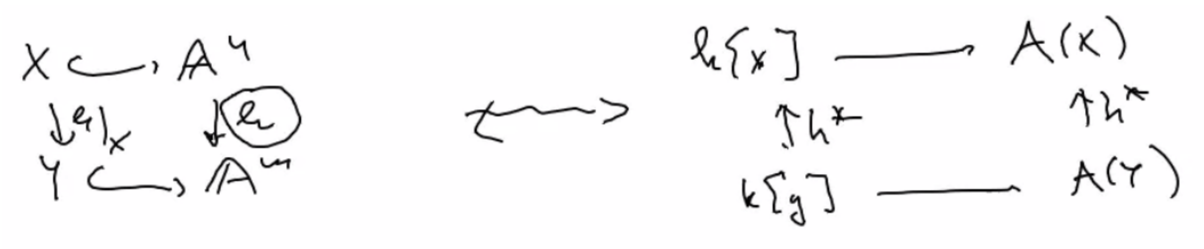


Vagyis $h_1, \ldots, h_m \in k[x]$ függvények úgy, hogy $(h_1, \ldots, h_m)|_X \subset Y$. Fordítva, hogy $X \subset h^{-1}(Y)$, vagyis $h^* g_i = g_i \circ h$ jelöléssel $h^* g_i \in I(X)$, és így $h^* I(Y) \subset I(X)$ kell hogy teljesüljön. Ez az algebrai leírása annak, hogy h morfizmus $X \to Y$.

Ezzel kapunk egy morfizmust a koordinátagyűrűket definiáló rövid egzakt sorozatok között.



Következik, hogy a koordinátagyűrű egy kontravariáns funktor. Minden algebrai halmazhoz van koordinátagyűrű, és minden algebrai halmazok közötti morfizmushoz van egy leképezés a koordinátagyűrűik között.



$X \hookrightarrow A^n$, $Y \hookrightarrow A^m$, és a koordinátagyűrűk között egy $\phi : A(Y) \to A(X)$. Találunk-e gyűrűleképezéshez polinomokat? Találunk hát. y_i generálja $k[y]$-t, ők átmennek a faktorleképezésen $\bar{y}_i$-vé, majd $\phi(\bar{y}_i) \in A(X)$. A koordinátagyűrű szürjektíven képződik a polinomgyűrűből, tehát találunk egy reprezentánst A^n polinomgyűrűjében $h_i \in k[x]$ úgy, hogy $\bar{h}_i = \phi(\bar{y}_i)$, ezzel kapunk egy lehetséges felemelést (a megszorítás X-re egyértelmű, hiszen ϕ adott!).

$\phi : A_2 \to A_1$ végesen generált k-algebrák. $A_1 = k < f_1, .., f_s >$, $A_2 = k < g_1, \ldots, g_t >$, vehetünk megfelelő szabad algebrákat (polinomgyűrűket), amikből faktorként kaphatjuk az A_i-ket. Itt is elvégezhetjük a felemelést mint az előbb.

Tehát affin algebrai halmazok morfizmusai megfelelnek az $A(Y) \to A(X)$ k-algebramorfizmusoknak.

Def.: X izomorf Y-al, ha léteznek $f : X \to Y, g : Y \to X$ morfizmusok, hogy $f \circ g = 1_Y$ és $g \circ f = 1_X$, vagy algebrailag, hogy az $A(X)$ és az $A(Y)$ gyűrűk izomorfak.

HF $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, akkor $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, továbbá $id_x^* = id_{A(X)}$

Tehát az algebrai affin halmazok kategóriája/izomorfizmus megegyezik a végesen generált k-algebrák kategóriájával /izomorfizmus.

Példa: $y = z^2$ egyik irányban vetítünk, a másik irányban $y = x^2; z = x$.

Példa: $y^2 = x^3$, ezt paramétereztetjük $y = t^3; x = t^2$-el. Az indukált $k[x, y]/(y^2 - x^3) \hookrightarrow k[t]$ nem izomorfizmus, t-t nem generáljuk ki! $k = C$-vel a paraméterezés ugyan bijektív, de algebrailag nem izomorfak!

- [ ] HF nincs semmilyen izomorfizmus a két gyűrű között.

Megjegyzés $X \xrightarrow{h} Y$ algebrai affin varietások között $h^* : A(Y) \to A(X)$ a gyűrűik között a visszahúzás. Létezik-e hasonló függvény a hányadostestek között?

$A^1 \hookrightarrow A^2$, ahol $x \mapsto (x, 0)$, és tekintjük az $1/y$ függvényt, ezt nem tudjuk visszahúzni! Létezik ilyen, hogyha $\forall U = \{g \neq 0\} : U \cap imh \neq \emptyset$. máshogy, az kell, hogy $cl(imh) = Y$, ezeket hívjuk *domináns függvény*nek. Ezeket lehet visszahúzni.

> 💡 Affin esetben $im(h)$ nem feltétlenül zárt. Pl $xy = 1$ algebrai halmazt levetítjük az első koordinátára az $A^1 \setminus 0$-t kapjuk.

- [ ] HF $X \xrightarrow{h} Y$ affin, h morfizmus. Lássuk be, hogy h folytonos a Zariski topológiában. $O_X(U)$ a reguláris függvények U-n, folytonosságból világos hogy ha $V \subset Y$ nyílt, $h^{-1}V$ is nyílt, X-ben. Állítjuk hogy $O_X(h^{-1}V) \supset h^* O_Y(V)$. Továbbá ha $p \in X$, $h(p) \in Y$, akkor $O_{X,p} \supset h^* O_{Y,h(p)}$

$X, f \in A(X)$, X varietás, f nem invertálható. $\{f = 0\} = Z \hookrightarrow X$ a zéróhlamaz, $U_f = X \setminus Z$ nyílt. Múlt órán volt, hogy $O_X(U_f) = A[x][1/f] = S_f^{-1} A(X)$.

Állítás: U_f nyíltak bázist alkotnak a Zariskiben (lásd gyak).

- [ ] HF U_f beágyazható A^n-be mint affin halmaz (az nem igaz, hogy minden nyílt affin, de ezek például igen).
- [ ] HF $A^2 \supset U = \{(x, y) \neq (0, 0)\}$ nem affin halmaz.

$O_{A^2}(U) \subset k[x, y][1/y] \cap k[x, y][1/x] = k[x, y]$

> 💡 Affin esetben X-et jellemzik teljesen a globális reguláris függvények gyűrűje. Nemaffin esetben ez nem lesz igaz, lást az előbbi példa.

X affin, hozzá $A(X)$ a függvénygyűrű, ebből $K(X), O_{X,p}, O_X(U)$ megkapható, $O(U_f) = A(X)[1/f]$ is látszik. Általában nem ennyire egyszerű az élet, nem lehet mindenkit jellemezni a globális reguláris függvények gyűrűjével.

Kévék

Hogyan hidaljuk át azt a nehézséget, hogy nemaffin esetben az előbbi megjegyzés ez nem igaz?

Ez lesz a reguláris függvények kévéje.

Definíció: X egy toptér. Egy előkéve egy $\forall U \to \mathcal{F}(U)$ (nyílt$\mapsto$gyűrű) megfeleltetés úgy, hogy a “megszorítást tudja”. Vagyis $\forall U \subset V : \mathcal{F}(V) \xrightarrow{\rho_{V,U}} \mathcal{F}(U)$ megszorító gyűrűmorfizmusok léteznek, és ha $U \subset V \subset W$, akkor $\rho_{W,V} \circ \rho_{V,U} = \rho_{W,U}$ teljesül, úgy mint egy kontravariáns funktor. Illetve van még egy identikus “megszorítás” is $\rho_{U,U} = id_U$.

Kéve: Legyen adott egy F előkéve. Hogyha $\cup U_i = U, és f_i \in F(U_i)$ továbbá $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ teljesül minden i, j-re, akkor létezik pontosan egy $f \in F(U)$, amiknek a megszorításai egyeznek az f_i-kkel.

> Megszorítás alatt a $\rho_{U_i, U_i \cap U_j}$ morfizmus képét értjük.

Ergo $0 \to F(U) \to \Pi F(U_i) \to \Pi_{i<j} F(U_i \cap U_j)$ egzakt jelenti azt, hogy egy előkéve valódi kéve.

Példa arra, hogy nincs kiterjesztés: $S^1 = X$, $F(U) = C^0(U)/\text{konstans}$. Az $\arg$ függvény globálisan persze nem létezik, de minden valódi nyílton igen. Tudjuk konzisztensen definiálni modulo konstans, még a közös részen is megegyeznek, de globálisan nem tudjuk összeragasztani. Következik, hogy ez egy előkéve, de nem valódi.

Példa arra, hogy több kiterjesztés van: S^1 és a differenciálformák U-n az előkéve modulo a primitív formák. $d\alpha$ egy differenciálforma nem nulla akinek nincs primitívfüggvénye (hiszen ez pont az argumentum lenne). Lokálisan ez nulla, hiszen lokálisan tudnánk primitívet ekresni, de globálisan nem, megintcsak nem ragad.

Példa: X toptér, $H^q(X) \neq 0$, $F(U) = H^q(U, Z)$ is hasonlóan viselkedik.

X affin varietás. $F(U) = O_X(U)$ egy (valódi) kéve (neve *struktúrakéve*)! Ha X affin, akkor az $O_X(U)$-k teljesen jellemzik a varietást, hogy ezt lássuk, vissza kéne belőle kapni az $A(X)$-et. Állítás $O_X(X) = A(X)$. Arra hajtunk, hogy a struktúrakéve meghatározza az algebrai halmazt nemaffin esetekben is.

3.

$X \subset A^n$ affin varietás, a koordinátagyűrűje $k[x]/I(X) = A(X)$. Meggondoltuk itt, és gyakon, hogy bijektíven megfelelnek egymásnak az affin varietások, és a végesen generált k-algebrák. $O_{X,p}$ a p-beli reguláris függvények, ami reprezentálhatók racionális polinomként p-ben nem eltűnő nevezővel, másik konstrukció az $A(X)$ hányadosteste, egy nyílton vehetjük az $O_X(U)$-t, mint az U-n reguláris függvényeket.

Ez motiválta a kévék definícióját, $O_X(U) = F(U)$, világos hogy az algebrai halmaz meghatározza a struktúrakévéjét, kellene a másik irány. Vissza akarjuk kapni a kéve szárát/kocsányát és az egész $A(X)$-et. Tekinthetjük a dorelt limeszét az összes olyan $F(U)$-nak, amire $p \in U$ a megszorító leképezésekkel. Alternatíve $\{U, f|U \text{ nyílt}, \ p \in U, \ f \in F(U)\}/$ekvivalencia, ha két függvény ugyanazzá szorul meg egy kisebb környezeten a metszetben. Ez visszaadja az $O_{X,p}$ lokális gyűrűt.

R integritási tartomány, van hozzá a hányadostest, minden maximális ideálnál ha vesszük az $S_m^{-1}R$lokalizálásokat az összes m maximális ideálnál, ez egyértelműen ott van a hányadostestben, hiszen $S^{-1}R = \{r/s | r, s \in R, s \not\in S\}$, teljesülnie kell, hogy $\cap S_m^{-1}R = R$.

▼ Belátjuk, hogy $O_X(X) = A(X)$, előbbi a reguláris függvények halmaza X-en, kellene, hogy van reprezentáns mindegyikhez ahol nincs nevező.

Tekintsük a potenciális nevezők által generált ideált I, és az általa generált zártat $Z(I) \subset X$, ez üres kell legyen, hiszen egy pontban sem tűnhet el egy ilyen nevező. A nullstellensatz miatt $1 \in I$, vagyis $1 = \sum b_{x_i} c_{x_i}$, ahol c_{x_i} gyűrűelemek. ha egy $\phi = a_x / b_x$, átszorozva $b_{x_i}\phi = a_{x_i}$, összeadjuk az előbbi azonosság szerint, $\phi = (\sum b_{x_i} c_{x_i})\phi = \sum a_{x_i} c_{x_i}$

Projektív eset

Projektív térben, a homogén polinomok egy gradált gyűrűt alkotnak a homogenitási fok szerint. A konstans tag nélküli polinomok egy max ideált alkotnak. $S = \oplus S_d, \ S_d =$d. fokú homogének.

Definíció: $A \subset S$ ideál *homogén*, ha $a = \oplus a \cap S_d$

- [ ] HF Ez ekvivalens azzal, hogy homogén elemekkel lehet generálni.
- [ ] HF $I_1, \ I_2$ homogén ideálok, akkor az összegük, metszetük, szorzatuk gyökük homogén. Továbbá ha I prím homogén, akkor elég a prímséget homogén elemekre megnézni.

💡 $f \in S_d$ polinom, akkor f nem határoz meg egy függvényt! $f : kP^n \to k$ értelmetlen!!! Csak a nullhelynek van.

Tehát definiálhatjuk megintcsak a $Z(a) = \{p \in kP^n | f(p) = 0 \; \forall f \in a\}$ halmazt, ezek a projektív algebrai halmazok.

Megjegyezzük, hogy két algebrai halmaz uniója, tetszőleges metszete projektív algebrai halmaz, az egész tér, és az üreshalmaz is algebrai persze, megint kapunk egy Zariski topológiát. *Projektív algebrai varietás* egy irreducibilis projektív algebrai halmaz. *Quasiprojektív algebrai varietás* egy nyílt halmaz egy projektív algebrai varietásban.

Homogén ideálok$\leftrightarrow$projektív algebrai halmazok. Minden ideálhoz kapunk egy algebrai halmazt, és minden algebrai halmazhoz kapunk egy gyökideált. Vigyázat, nem teljesen bijektív a kapcsolat, a $\oplus_{d>0} S_d$ maximális ideál algebrai halmaza üres! (csak a $[0 : \dots : 0]$ lenne benne, de ilyen nincs). Hasonlóan a legalább d fokú homogén monomok által generált ideál zártja is üres.

Általában $Z(a) = \emptyset$ ha $\sqrt{a} = S, \; S_+$, vagy máshogy $\exists d : S_d \subset s$.

Álítás: $X_1 \subset X_2$ akkor $I(X_1) \supset I(X_2)$, két projektív algebrai halmazra $I(X_1) \cap I(X_2) = I(X_1 \cup X_2)$, ha $a_1 \subset a_2$ hom ideálok és $Z(a) \neq \emptyset$, akkor $IZa = \sqrt{a}$. Továbbá X algebrai halmazra $ZIX = X$, tehát a projektív algebrai halmazok megegyeznek a homogén gyökideáloknak, amik nem egyenlők S_+-al.

Affin térképek.

kP^n-en vannak a szokásos koordinátázások. Az affin algebrai halmazok egy térképen megfelelnek a térképkörnyezeten megadott projektív algebrai halmazoknak. Ehhez meg kell feleltetni az affin polinomokat a gradált gyűrű elemeivel, és fordítva. Az egyik irányban az eljárás a homogenizálás, minden monom tagot felszorzunk a térképen “kihagyott” a_i-fel úgy hogy minden tag azonos fokú legyen. A másik irányban a térképezésnek megfelelően 1-et helyettesítünk a polinom megfelelő változójába. Ebből ezt minden térképen elvégezve látjuk hogy minden projektív algebrai halmaz előáll, mint affin algebrai halmazok összeragasztása.

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i} \mathbb{A}^n_{x_i \neq 0}$$

$$\underbrace{Y}_{\text{proj. alg. halm.}} = \bigcup_{i} \underbrace{\left(\mathbb{A}^n_{x_i = 0} \cap Y\right)}_{\text{affin alg. halmazok.}}$$

Emlékeztető, az affin algebrai halmazok megfelelnek a koordinátagyáráiknek, ennek szeretnénk analogonját gyártani. $X \subset kP^n$ prjektív algebrai, neki van egy ideálja $I(X) \subset S$, itt is elvégezhetjük a faktorizációt, $S(X) = S/I(X)$ egy gradált k-algebra. Ha $I(X) \neq S$, akkor ő részhalmaza S_+-nak, tehát a 0. grádics megmarad k-nak, $S(X) = \oplus S(X)_d$. Figyelem, ezek nem függvények! Ez a gradált gyűrű *valamit* mégis mond nekünk. Sőt, a beágyazásról is mond valamit (emlékezzünk, hogy $A(X)$ csak a halmaztól függött, a generátorok adtak meg egy beágyazást).

> Gradáltság: $S_0 = k,\ S_1 = k < x_0, \cdots >, S_2 = k < x_i x_j >$ és így tovább, mint vektortér. $kS_d \subset S_d$, és $S_d S_{d'} \subset S_{d+d'}$ teljesül, ez egy gradált gyűrű. Ha $f \in S$ homogén elem, akkor $S/(f)$ gradált gyűrű, a direkt felbontást tagonként szétbontjuk, $(f) = fS = fS_0 \oplus fS_1 \oplus \ldots$, ha $\deg f = d$, akkor az első d grádicson nem történik semmi, majd elkezdhetünk faktorálni, kapva egy kanonikus gradálást a faktoron. Hasonlóan ha a homogén ideál.

Legyen $R = \oplus R_d$ gradált k-algebra, tegyük fel hogy $\dim_k R_d < \infty$, $P_R(t) = \sum \dim_k(R_d)t^d$ a gyűrű Poincaré polinomja, tétel, hogy ez egy racionális függvény t-ben.

Példa: $P^1 \subset P^1$, a gyűrű maga $S[a_0, a_1]$, $\dim S_d = d + 1$, tehát $P(t) = 1 + 2t + 3t^2 + \cdots = 1/(1-t)^2$. Hiszen $S_0 = k,\ S_1 = k < a_0, a_1 >,\ S_2 = k < a_0^2, a_0 a_1, a_1^2 >, \ldots$

Másik példa, a Veronese beágyazás $P^1 \overset{v_{1,2}}{\hookrightarrow} P^2\ :\ [a_0 : a_1] \mapsto [a_0^2 : a_0 a_1 : a_1^2]$, ez a $v_{1,2}$, a képe $x_0 x_2 - x_1^2$. $S(X) = k[x_0, x_1, x_2]/(x_0 x_2 - x_1^2)$, hány d-fokú elem van? $(d+1)(d+2)/2$ darab van a háromváltozós polinomgyűrűben, a faktorálás után viszont változik:$1, 3, 5, \ldots$, hiszen a másodfokúak között már van egy összefüggés általában $\dim S(X)_d = \dim S_d - \dim S_{d-2}$, hiszen ha egy kettővel kevesebb fokút megszorzok f-el egy d-fokút kapok, de ők eltűnnek a faktorálásnál. kiszámolva a d grádicson $2d + 1$ elem lesz, tehát a Poincaré polinom $\sum(2d+1)t^d$. Ha a projektív teret önmagában tekintettük nem ezt kaptuk!

> $d \to \dim S(X)_d$, ha $d >> 0$, akkor $a_0 d^D / D! + \ldots$, itt D-lesz a $\dim X$, és a_0 az $X \hookrightarrow P^n$ fokszáma lesz.

$X \subset P^n$ feletti affin kúp. $I(X) = a = (f_1, \ldots, f_k)$, ahol $f_i \in S_{d_i}$, vehetjük a polinomok dehomogenizáltját az $A(\mathbb{A}^{n+1})$-ben. Mivel homogén elemekkel generáltuk, egy affin kúpot kapunk $\mathbb{A}^{n+1}$-ben.

$P^n \leftrightarrow A^{n+1}$, van a vetitésünk $A^{n+1} \setminus 0 \to P^n$, ha $X \subset P^n$, vehetjük az ősképet a vetítésnél, és lezárhatjuk (topologikusan) A^{n+1}-ben, ez is az lesz.

Veronese beágyazás. $P^n \to P^N$, itt N nyilván $\binom{n+d}{n} - 1$. Például $\nu_{1,d}$ ami a projektív egyenest ágyazza be a d dimenziós térbe $[a_0 : a_1] \mapsto [a_0^d : a_0^{d-1}a_1 : \cdots : a_1^d]$ képlettel, ez egy számtani sor gyakorlatilag, a $rk(x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}; x_1, \ldots, x_d) \leq 1$ képlet adja meg az algebrai összefüggéseket a koordináták között. Hasonlóan $A^1 \to A^d$, ahol $t \mapsto (t^d, \ldots, t)$, ezt áttéve a projektív térre és lezárva pont a Veroneset kapjuk.

Általánosabban a $\nu_{n,d}$ képének egyenletét olyan algebrai egyenletek írják le, hogy $x_\alpha x_\beta = x_\gamma x_\delta : \ \alpha + \beta = \gamma + \delta$, az öszes ilyen.

- [ ] HF $\nu_{2,3}$

Mire jó ez? Mik a hipersíkok P^n-ben? $H_a = \{\sum a_i x_i = 0\}$, ahol a a duális projektív tér egy eleme. Hogy osztályoznánk a d-fokú hiperfelületeket? $\nu_{n,d}^{-1}(\text{hipersík})$ ad egy-egy hiperfelületet.

Segre beágyazás: $P^n \times P^m \hookrightarrow P^{(n+1)(m+1)-1}$. $([a_0 : \cdots : a_n],\ [b_0 : \cdots : b_n]) \mapsto [a_0 b_0 : a_0 b_1 : \cdots : a_i b_j : \ldots]$, a páronkénti szorzatokba küldjük a koordinátákat. Milyen egyenlet írja le a képet? $x_{ij}x_{kl} = x_{il}x_{kj}$ mindenképpen teljesül a páronkénti szorzattulajdonság miatt, állítjuk, hogy az összes ilyen pont kivágja a képet, és realizáltuk két projektív tér szorzatát, mint projektív algebrai halmaz.

$P^{nm+n+m} = [x_{ij}]$, ezt megintcsak tekinthetjük egy mátrixként, és az egyenletünk ismét hasonló, $rk(x_{ij}) \leq 1$ (a beágyazásnál az $a_i b_j = x_{ij}$ koordinátázással éltünk).

Példa: $P^1 \times P^1 \to P^3$, $x_{00}x_{11} = x_{01}x_{10}$ vágja ki a képet.

Tudjuk mostmár, hogy projektív algebrai halmazok szorzata is projektív algebrai. $X \times Y \subset P^n \times P^m \hookrightarrow P^{(n+1)(m+1)-1}$, mik lesznek a szorzat egyenletei? Van először is a Segre képének az egyenletei, majd ha $X = \{f_i(\underline{a}) = 0\}$ ahol $\deg f_i = d$. Ha megszorozzuk a definiáló függvényeket egy tetszőleges d fokú monommal a b-kben, ezt a függvényt már tudjuk értelmezni a szorzaton $f_i(\underline{a})M_d(\underline{b})$, ezt elvégezve az összes módon, és szimmetrikusan Y-ra megkapjuk a szorzat egyenleteit. Összevonva leolvashatjuk az $\tilde{f}(x_{ij})$ függvényt.

Állítás: $Z \subset P^n \times P^m$ mikor algebrai halmaz? Ha $Z = \{G_i(a_0, \ldots, a_n, b_0 \ldots, b_m) = 0\}$ alakú, ahol G_i homogén az a és a b koordinátákban külön külön.

Ugyanakkor, ha beágyazzuk a Segrével, leírjuk az egyenletét, majd visszaértelmezzük a helyettesítéssel kapunk egy egyenletet, ami ismét homogén lesz a, b-ben, de ugyanazzal a fokszámmal! A kisebb fokszámút homogenizáljuk minden lehetséges változójával, és mint egyenletrendszer tekintünk rá, azt már át tudjuk nyomni a Segrén. Általában egy rakás egyenletet kapunk ilyenkor.

- [ ] HF $\{p\} \times P^1$ egyenlete P^3-ban?

4.

Projektív algebrai halmazokat kezdtünk el a múlt órán. P^n_k-ben egy halmaz projektív algebrai, ha néhány homogén polinom közös nullhelyeként áll elő. Ha X irreducibilis projektív algebrai halmaz, azokat neveztük projektív varietásnak. Meg akarjuk érteni a reguláris függvényeket.

P^n-en egy homogén polinom nem határoz meg függvényt! $f, g \in S_d$, vagyis d fokú homogének, az f/g függvényt értelmez $P^n \setminus \{g = 0\} \to A^1$, ezeknek megszorításai lesznek a reguláris függvények. $X \subset P^n$, a következőt fogjuk reguláris függvényeknek hívni:

$$O_X(U) := \{\phi : U \to A^1 \forall x \in U\ \exists x \subset V \subset U : \exists f_x, g_x \in S_d\ : f_x/g_x|_V = \phi|_V\}.$$

Magasabb dimenzióban reguláris függvényeket koordinátánként értelmezzük, közös nevezőre is hozhatjuk ha úgy tetszik. Reguláris fügvények $U \to P^m$-be hasonlóan, lokálisan a függvény $[f_0 : f_1 : \cdots : f_m]$ alakú lesz, ahol a koordinátafüggvények azonos fokúak, és a V környezeten nincs közös nullhelyük. Mégeggyel tovább, ha $X \subset P^n$ és $Y \subset P^m$, közöttük reguláris függvényt értelmezünk, ha létezik egy $X \to P^m$ függvény, aminek a képe Y-ban van.

- [ ] HF $\phi : X \to Y$, akkor létezik $O_Y(U) \xrightarrow{\phi^*} O_X(\phi^{-1}(U))$, a visszahúzás.

Példa: Áthúzhatjuk az affin térbe menő függvényeket a beágyazáson $f/g \mapsto [g : f]$ módon, ez $X \setminus \{g = 0\}$-ról $X \setminus \{f = 0, g = 0\}$-ra terjeszti ki a leképezést.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & A^1 \arrow[d] \\ & P^1 \end{tikzcd}$$

Példa: $X = \{xy = zt\} \subset P^3$, az x/z, és az t/y ugyanazt a függvényt adja meg az értelmezési tartományok metszetén, globálisan csak két külön reprezentánssal lehet értelmezni (egy tágabb halmazon, de nem az egész X-en). Hasonlóan $[z : x]|_X = [y : t]|_X$, a két reprezentánssal ez egy reguláris függvény, míg az affin esetben ki kellett dobni pontokat.

Megjegyzés, az előbbi példában $X = P^1 \times P^1$ a Segre beágyazással.

Cremone transzformáció

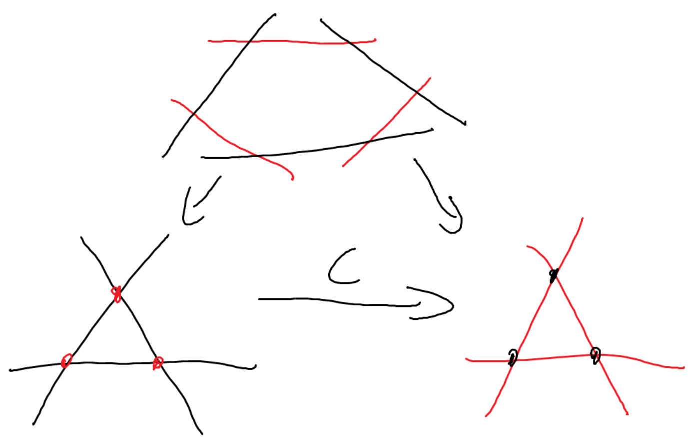
$P^2 \dashrightarrow P^2$, ahol $[x : y : z] \mapsto [yz : zx : xy]$, nincs értelmezve az $[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]$ pontokban, tehát valójában $C : P^2 \setminus \{A, B, C\} \to P^2$ leképezés, és itt reguláris.

$\{x = 0\} \setminus \{B, C\} \mapsto [1 : 0 : 0]$, hasonlóan mindegyik koordinátatengelyet összeroppant egy ponttá.

HF $C : P^2 \setminus \{xyz = 0\} \to P^2$ a képére bijekció.

Igaz továbbá, hogy $C \circ C = id$. Ez ellenőrizhető, $[xyzx : yzxy : yzzx] = [x : y : z]$ átosztva xyz-vel.

Fújjuk fel a három kidobott pontot, kapunk három extra egyenest, és közöttük a koordinátatengelyeket, szimmetrikus képet kapunk, felcserélhetjük a tengelyek, és a felfújt görbék szerepét, a vetítés után megintcsak P^2-t kapunk, és rajta elvégeztük a Cremona transzformációt.



A Cremone geometriai jelentése

Coolidge-Nagata sejtés: C biracionális P^1-el, létezik Cremone transzformok egy véges sorozata úgy, hogy C képe ezalatt egy simán beágyazott P^1-lesz. Belátta Koras és Palka lengyel matematikusok 2015-ben.

Tétel: $X \subset P^n, Y \subset P^m$, reguláris leképezés ϕ közöttük. Következik, hogy $im\phi$ Zariski zárt Y-ban.

> 💡 Ellenpélda $A^2 \supset X = \{xy = 1\}$, ennek az első koordinátára való vetítése nyílt halmaz A^1-ben.
> $A^1 \setminus 0 \to A^1$, $t \mapsto 1/t$, vagy $t \mapsto t$ ugyanúgy nyíltak lesznek, pusztán az algebraiság nem garantálja, hogy a kép zárt lenne.

Megjegyzés: $A^1 \setminus 0 \xrightarrow{\phi} A^n$ nem biztos, hogy kiterjeszthető egy A^1-en értelmezett leképezéssé, de

- [ ] HF Ha $A^1 \setminus 0 \to P^m$, ez mindig kiterjed egy $A^1 \to P^m$ leképezéssé.

Tétel: $X \subset P^n, Y \subset P^m$, reguláris leképezés ϕ közöttük. Következik, hogy $im\phi$ Zariski zárt Y-ban.

- [ ] HF $\Gamma := \{(x, \phi x) \in X \times Y\}$ zárt halmaz a Zariski topológiában (beágyazva a szorzatban, azt Segrével P^{mn+n+m})

Ezt elhíve $im\phi = pr_2(\Gamma)$, ennek kellene a zártságát meggondolni.

Lemma: $Z \subset P^m$, $P^m = \cup A_i^m$, Z zárt pontosan akkor, ha minden affin térképen zárt.

Végsősoron amit be akarunk látni, hogy egy zárt $Z \subset P^n \times A^m$, akkor $pr_2(Z) \subset A^m$ zárt.

> 💡 A szorzat Zariski topológiájában olyan polinomokat vehetünk, amik homogének külön-külön (esetleg más fokkal!) az első, és a második tag koordinátáiban.
> $Z \subset P^n \times A^m$ zárt pontosan akkor, ha $Z = \{g_i(\underline{x}, \underline{y}) = 0\}$ úgy, hogy a g_i-k homogének $\underline{x}$-ben.

$p_2(Z) = \{y : \exists x \in P^n : g_i(x, y) = 0 \ \forall i \text{ van megoldás}\}$. Most rögzített y-ra a $I_y = (g_i(x, y)) \le S$, ha y nincs benne a képben, ennek nincs megoldsa, vagyis a zártja üres, és a projektív Nullstellensatz miatt ekvivalens azzal, hogy $\sqrt{I_y} \supset S_+$, vagy ekvivalensen S_d-t tartalmazza valamely d-re.

Megfordítva $y \in pr_2(Z)$ pontosan azt jelenti, hogy minden $d > 0$-ra $S_d \not\subset \sqrt{I_y}$. Elég lenne, hogy ha fix d-re $\{y \in A^m : S_d \not\subset \sqrt{I_y}\} =: D_d$, a vetület képe ezeknek a metszete, elég azt látni, hogy ezek külön-külön zártak. x-ben a g_i generátorok fokait jelöljük d_i-vel. $I_y \cap S_d \not\supseteq S_d$ kellene , szintenként. Ha $d_i > d$ ez nincs benne a szintben, ha $d_i \le d$, akkor rászorozhatunk valamilyen $d - d_i$ fokú monommal ami pont a d. szinten lesz. Következőleg $I_y \cap S_d = \{g_i * x^\alpha : |\alpha| = d - d_i\}$ alakú a generátorrendszere az ideálnak. Akkor kisebb ez az ideál szigorúan, ha az y-ra van egy egyenletünk. Felírunk egy nagy mátrixot az együtthatókból, és megmutatjuk, hogy minden $d \times d$-es minor nulla lesz.

S_d vektortér k felett, $x^\beta : |\beta| = d$ alakú monomok generálják. A metszetet $\sum_{|\gamma|=d_i} a_\gamma(y)x^{\gamma+\alpha}$ alakú polinomok generálják, ebből kapjuk az $(a_\gamma(y))$ mátrixot. Ha a rangja maximális, akkor az egész metszet üres, mert kigeneráltuk az egész szintet. Ha nem maximális, akkor az öszses megfelelő méretű minornak a determinánsa nulla kell legyen, ezek megadják az egyenleteit ennek a szintnek, látjuk hogy zárt. q.e.d

Példa: $P^1 \to P^2$ veronese $[x_1^1 : x_1x_2 : x_2^2]$. $P^1 \times A^2$-ben $ux_2^2 = x_1^2,\ x_2v = x_1x_2$ alakú zártat leprojektáljuk A^2-be.

$$\begin{array}{c|ccc} & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\ \hline 1.e. & 1 & 0 & -u \\ 2.e & 0 & 1 & -v \end{array}$$

a másodfokú monomoknál nincs elég tag, esélytelen kigenerálni S_2-t.

$$\begin{array}{c|cccc} S_3 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\ \hline & 1 & 0 & -u & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & -u \\ & 0 & 1 & -v & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & -v \end{array}$$

Itt pontosan ennek a determinánsnak kell eltűnnie.

A harmadfokú determinánst kiszámolva $v^2 - u$-t látunk, a továbbiakban sem fogunk többet találni, ez a kép, és valóban zárt.

▼ Tétel: X irreducibilis projektív algebrai halmaz, akkor $O_X(X) = k$, csak konstans globális reguláris függvények vannak.

$\phi : X \to A^1$ reguláris, áthúzhatjuk a $A^1 \hookrightarrow P^1$ beágyazáson, $im\bar{\phi} \subset P^1$ zárt. A projektív egyenesen zárt halmaz véges sok pont, vagy az egész tér/üres, de mivel a képe A^1-ben van, az egész egyenes nem lehet. Mivel irreducibilis képe irreducibilis, ezért nem lehet egynél több pont, vagyis valóban állandó.

Alkalmazás: $P^n \supset \{X_d | X_d \text{ d-ed fokú hiperfelület}\}$, ennek a paramétertere a $v_{n,d} : P^n \to P^N$ Veronese leképezés képe(nek a duálisa). Az a feltétel, hogy valamely d.fokú hiperfelület hasad egy zárt feltétel lesz. $P^{N_{n,k}} \times P^{N_{n,d-k}} \xrightarrow{\phi_k} P^{N_{n,d}}$ a szorzással egy reguláris leképezés ($P^{N_{n,k}} = X_d | S_d = S_k * S_{d-k}$ a hasadó hiperfelületek tere). Ezen ϕ_k -k képének uniója lesz a hasadó polinomk tere, véges sok zárt halmaz uniója pedig zárt, mint állítottuk.

5.

$X \subset P^n$ projektív varietás.

$S = k[0_, \dots, x_n]$ gradált gyűrű. $P, Q \in S$, és a fokuk egyenlő, akkor $P^n \setminus \{Q = 0\} \to A^1$-en jóldefiniált a P/Q függvény. Racionális függvények lesznek ezek megszorításai lesznek X-en, ha $Q \not\in I(X)$. Másképp, az ilyen P/Q alakú függvények egy gyűrűt alkotnak, ezt a gyűrűt faktorizáljuk a $P \in I(X)$ ideállal. Ez egy test is lesz, hiszen a nemnulla elemeket kell invertálni, ergo a $P \not\in I(X)$ elemeket, de ekkor Q/P-nek is van értelme.

Egy adott reprezentáns persze csak ott értelmes, ahol a nevezője nem nulla, különböző reprezentánsok viszont lehet hogy máshol értelmezettek. $\phi \in K(X)$, akkor létezik egy $P/Q|_{Q \not\equiv 0}$ reprezentáns, ami megegyezik ϕ-vel. Ez elengendő, ha egy irreducibilis halmazon tudunk egy (folytonos) függvényt, akkor kiterjed folytonosan mindenhova, így hasonlóan definiálható $K(U)$, ahol Unyílt része egy irreducibilisnek, és ez mindig meg fog egyezni a $K(X)$-el.

Kontrasztban a reguláris függvények estével itt nem az izomorfiatípust kódoljuk, csak azt, hogy egy-egy nyílt izomorf-e a két varietásban.

$x \in X$, nézzünk egy $\phi \in K(X)$, ϕ reguláris x-ben, ha létezik reprezentáns, aminek a nevezője nem tűnik el a pontban. Ez lesz az $O_{X,x}$- a reguláris függvények gyűrűje. Ha veszünk egy nyíltat, ugyanígy értelmezhetjük az $O_X(U)$-t, az U-n reguláris függvényeket.

💡 Vigyázat, lehet, hogy különböző pontokhoz különböző reprezentáns kell!

Ebből kapunk megint egy kévét, a reguláris függvények kévéjét.

$X \supset U \to A^m$ koordinátánként regulárisként tudjuk definiálni, ebből kapunk két varietás nyíltjai között is függvényeket. $P^n \supset X \supset U$-ről $Y \cap A^m_i$-be legyen reguláris mindegyik térképen, így kapunk egy $x \mapsto [p_0 : \dots : p_n]$ azonos fokú homogén polinomok, és minden ponthoz legalább az egyik nem nulla.

Példa $P^n \dashrightarrow P^{n-1}$ vetítés. $[x_0 : \dots : x_n] \mapsto [x_0 : \dots : x_{n-1}]$, ugye ez csak az $[0 : \dots : 1]$ pont komplementerén értelmezett, de itt reguláris, és minden jó. $\{x^2 + y^3 + z^3 = 0\} = C \subset P^2$, ezen a kidobott pont nincsen rajta, tehát ez regulárisan vetül P^1-be.

Mikor tudunk visszahúzni egy reguláris függvényt?

Legyen $\phi U \to V$ reguláris, minde V-n reguláris függvényt prekomponálhatunk ϕ-vel, ez egy $O_X(\phi^{-1}(W)) \leftarrow O_Y(W)$ leképezést ad. Mivan ha racionális leképezéseket akarunk visszahúzni? Egy racionális függvény csak egy nyílton van értelmezve, ha a ϕ képe benne van a függvényünk értékkészletében. Ezt tudjuk garantálni, ha a ϕ *domináns*, vagyis a képe tartalmaz nyíltat.

- [ ] HF az előbb megadott vetítés domináns, sőt szürjektív.

P^1-en a racionális függvények pont az egyváltozós racionális függvények teste, a leképezés után $Q(k[x,y]/(x^3+y^3+1))$-et kapunk, a faktorált polinomgyűrű hányadostestét. Ez egy harmadfokú bővítés, ami megfelel annak, hogy egy háromszoros fedésünk van a vetítésnél $C \to P^1$.

Segre

$P^n \times P^m \xrightarrow{s_{n,m}} P^{(n+1)(m+1)-1}$ beágyazás az összes lehetséges páronkénti szorzatokkal. A képe $X_{n,m}$. Vesszük a változókat, mint egy $[x_{ij}] \in M_{n+1,m+1}$, mikor vagyunk a képben? Tekintsük az $(x_0,\ldots,x_n)^T(y_0,\ldots,y_m)$ diadikus szorzatot, ennek a képe a Segre képe, ergo hogy mikor lehet egy $k^{n+1} \to k^{m+1}$ leképezést áthúzni az egydimenziós vektortéren. Tehát pontosan az 1 rangú mátrixok kellenek (a nullmátrix projektivizálás után eltűnik). Olyan tipusú egyenleteket kapunk, hogy $\det(x_{ij}x_{ik}; x_{li}x_{lk}) = 0$, ezekből az összeset.

Ebből, a szorzatban a zártak megkaphatóak úgy, hogy veszünk két homogén polinomot, és együtt homogenizálva kapunk egy visszahúzottat.

A projektív tér hipersíkjait parametrizálja a duális projektív tér. Valamilyen lineáris forma kell nulla legyen. Húzzuk vissza $H_a = \sum x_{ij}a_{ij}$-t a Segrével, ez $\sum x_i y_j a_{ij}$. Ez pont az $imS_{n,m} \cap H_a$ metszet, valódi zárt a szorzatban.

Duális tér

$C \subset P^2$, $F(x_0,\ldots,x_n) = 0$ egyenlettel, $\deg F = d$. Legyen sima, $p = [x_0 : x_1 : x_2] \in C$. A hatványsort felírva $F(y_0,y_1,y_2) = F(x_0,x_1,x_2) + \sum \partial_i F(p)(y_i - x_i) + \sum \partial_{ij} F \ldots$. Minden ponthoz felírhatjuk az érintő egyenletét ebből, ha szinguláris ez mindenhol egy nemelfajult egyenes, ez (illetve ennek az iránya) egy pont a duális P^2-ben.

$P^2 \times P^{2^*} \supset \{(x, H_a) : x \in H_a\}$, ezt vetítve az első tagra pont a projektivizált érintőnyalábot kapjuk. Ezt a nyalábot visszahúzhatjuk egy görbe fölé, ennek lesz szelése, mert egyértelmű érintőiránya van, míg a teljes nyalábnak nem lesz, van egy Euler obstrukciónk. Ha a görbéről a duális térbe megyünk, minden ponthoz az érintőjét rendeljük ez lesz C duális görbéje.

A duális görbe duálisa visszaadja az eredetit, de a fokszám nagyon változhat, a duűális görbe lehet nagyon szinguláris. Sima görbénél $d(d-1)$ fokú lesz, egy generikus egyenes metszése a duális görbével pont azt jelenti, hogy egy adott ponton keresztüli egyenessereg hány tagja érinti az eredeti C görbét, ez egy Bezout tétel.

Nem sima görbék esetén sok más történhet, egy lineáris görbe duális sokasága egyetlen pont például. Sima duálisa sosem sima például.

- [ ] HF $x^3+y^3+z^3=0$-nak mi a duálisa? $[x^2:y^2:z^2]$ a parciális deriváltak, kétszer négyzetreemelve $[u:v:w]$ duális térbeli elemekkel megoldható. $x^3+y^3=-z^3$

Mi a projektív tér (ko)homológiája? Csak páros celláink vannak, $H_q(P^n_C)=Z$ páros dimenzióban $q=2n$-ig, nulla egyébként. Duálisan $H^*(P^n_c)=Z[\alpha]/\alpha^{n+1}$, ahol $\alpha\in H^2$. Ebből $H^*(P^n\times P^m)=Z[\alpha,\beta]/(\alpha^{n+1},\beta^{m+1})$. Visszahúzunk a Segrével egy hipersíkot, ennek a H^2-ben kell élnie, mert a kodimenziója 2. Mivel a visszahúzás független attól h melyik hipersíkot választjuk, a viszahúzottat választhatjuk olyannak, hogy hasadjon egy $x$es és egy $y$os tag szorzataként, és látjuk hogy a visszahúzott elem $\alpha+\beta$ lesz.

$\binom{n+m}{n}$ fokú lesz a Segre, elvágjuk $n+m$ darab hipersíkkal, ez megfelel a kohomológiában az $(\alpha+\beta)^{n+m}$ hatványnak, ebben csak egy tag lesz, ennek az együtthatója generálja a pont kohomológiáját.

7.

X egy kváziprojektív varietás, irreducibilis. Legyen $X=Z_1\setminus Z_2$ ahol $Z_i\subset P^n$ zártak. $K=K(X)$ a racionális függvények teste rajta, akár kévéként is kezelhetjük, de ez persze mindenkihez $K(U)=K(X)$-et rendeli irreducibilitás miatt.

Kell még az O_X struktúrakéve is, a szokásos definícióval, ez persze egy kéve. $K^*=U(K(X))=K(X)\setminus 0$, és hasonlóan az O_X^* is egy kéve lesz, definíciója hasonló O_X-hez, de csak a seholsem nulla függvényeket tekintjük, ez egy multiplikatív csoport lesz.

Cartier Divizorok

Definíció: $D=(U_\alpha,f_\alpha)$, ahol U_α véges fedés X-en, és $f_\alpha\in K(U_\alpha)=K^*$, és $f_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta}\cdot f_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}\in O_x^*(U_\alpha\cap U_\beta)$.

> 💡 Ez valami olyasmi, hogy az egyik függvény gyökei a másik reciprokának pólusaival kiejtik egymást, ez kel lahhoz, hogy összeragadjanak ezek a függvények egy globális divizorrá.

Lesz még egy ekvivalenciareláció is. Mikor lesz $D_1 \equiv D_2$?

1. Finomítás: (U_α, f_α)-nak finomíása (V_β, g_β) hogy $\forall \beta \exists \alpha V_\beta \subset U_\alpha$, és $g_\beta = f_\alpha|_{U_\alpha}$.
2. $(U_\alpha, f_\alpha) \equiv (V_\beta, g_\beta)$, ha létezik közös finomításuk (W_γ, f_γ) és (W_γ, g_γ) úgy, hogy $f_\gamma g_\gamma^{-1} \in O^*(W_\gamma)$. (a függvényeket megszorítottuk a közös finomításhoz.)

> 💡 Ezek a szelései a K^*/O^* faktorkévének.

Jelölés: $CaDiv(X) = \{(U_\alpha, f_\alpha)\}/\equiv$ a Cartier divizorok halmaza.

Ez egy csoport! Egységeleme $(U_\alpha, 1) \equiv (X, 1)$, a művelet $(U_\alpha, f_\alpha) + (V_\beta, g_\beta)$ definiálásához veszünk egy közös finomítást $(W_\gamma, f_\gamma), (W_\gamma, g_\gamma) \mapsto (W_\gamma, f_\gamma g_\gamma)$ lesz a szorzat. Végül az inverz $(U_\alpha, f_\alpha) \mapsto (U_\alpha, f_\alpha^{-1})$.

Példa: $\mathbb{P}^1$-en egy pontnak a divizora. Lefedjük $C_x \cup_{C^*} C_y$ a szokásos módon, $x = 1/y$, stb. Vegyük az első térképen a $(C_x, 1)$ dolgot, a másikon akkor (C_y, y)-t kell vegyük, a közös részen $1y^{-1} \in O^*(P^1 \setminus \{0, \infty\})$ valóban teljesül.

Példa: $(C_x, x-1), (C_y, (y-1)y^a)$ megint egy jól ragadó divizor lesz, $(y - 1)y^a/(x-1) = -y^{a+1}$, és ez is valóban invertálható.

HF: P^n-en hasonlót lehet csinálni. C_{x_0}, stb térképeket vehetünk, az elsőn megint $(C_{x_0}, 1)$-et vegyük, $(C_{x_i}, x_0)_{1 \le i \le n}$, ez összeragad és megadja a végtelen távoli hipersíkját az első térképnek.

Principiális Cartier divizorok

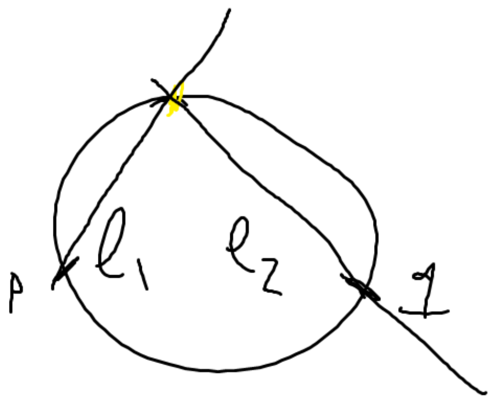
$K^* \to CaDiv(X)\ f \mapsto (X, f)$, a divizorok amiket globálisan egy racionális függvény vág ki, ez nyilván részcsoport lesz, ezeket hívjuk principiálisnak. $D_1 \sim D_2$ lineárisan ekvivalensnek mondjuk őket, ha $D_1 - D_2$ egy principiális Cartier divizor (natúr csoportfaktorizálás). Ezt jelöljük $CaCl(X)$.

Példa: $\{(C_\alpha, \alpha), (C_\beta, 1)\} = D_1$ lesz az egyik, mondjuk D_1. A másik legyen $\{(C_\alpha, 1), (C_\beta, \beta)\} = D_2$, állítjuk hogy $D_1 \sim D_2$. Valóban $D_1 - D_2 = \{(C_\alpha, \alpha), (C_\beta, 1/\beta)\}$, ez megfelel a globálisan definiált x/y függvénynek.

> Kis térképezési gondok, $[\alpha : 1], [1 : \beta]$ a két affin koordinátázás, és ezekből áll össze a $[x : y]$ homogénekkel a P^1.

HF $\{(C_\alpha, \prod(\alpha - \alpha_i)^{m_i}), (C_\beta, \dots)\}$ ahol a $\beta = 0$ nem eleme a divizornak amikor kiterjesztjük. Állítjuk, hogy két ilyen alakú Cartier divizorra $D_1 \sim D_2 \leftrightarrow \sum m_{i1} = \sum m_{i2}$.

Példa: $C \subset P^2, \deg C = 2$ állítjuk, hogy bármely pont ekvivalens bármely másikkal.



A két egyenes egyenletét elosztva ez $K^*(C)$ beli elemet reprezentál, vagyis $p \sim q$ tetszőleges pontpárra.

Ha a fokszám három ez elromlik, egy pont képét előírhatjuk, de a másikat ez már kijelöli.

Példa: $CaCl(A^n) = 0$. $U_i = \{g_i \neq 0\}$ két térkép (fedjék le A^n-et!), ahol $g_1, g_2 \in k[x_1, \dots, x_n]$. Vegyük $\{(U_1, f_1), (U_2, f_2)\}$ divizort. Szorzunk f_2^{-1}-el globálisan, elérhetjük hogy $\{(U_1, h_1), (U_2, 1)\}$ alakú legyen. A ragasztási feltétel miatt $h_1|_{U_1 \cap U_2} \in O^*(U_1 \cap U_2)$, ez a gyűrű $k[x_1, \dots, x_n][g_1^{-1}, g_2^{-1}]$ lesz. Vagyis h_1 itt $g_1^a g_2^b$ alakú lesz. Modulo lineáris ekvivalencia átszorozhatunk g_2^{-b}-vel, majd a divizorok korábbi ekvialenciája szerint g_i invretálható U_i-n, és kapjuk, hogy ezek mind triviálisak.

> 💡 $(X, f) = D$, ahol $f \in K^*$ egy principiális divizor, $D \sim 1$

HF: $CaCl(P^n) = Z$

Invertálható kévék

X irreducibilis. Van az O_X struktúrakévénk. Szeretnénk egy olyan kévét legyártani, ami O_X modulus lesz.

> 💡 Ez azt jelenti, hogy $\forall\, U : F(U)$ egy $O_X(U)$ modulus úgy, hogy kompatibilis legyen a megszorítással.

Egy F kéve *invertálható*, ha lokálisan F szabad 1-rangú O_X modulus. Vagyis létezik U_α fedés, hogy $F(U_\alpha) = f_\alpha \cdot O_X(U_\alpha)$, ahol $f_\alpha \in F(U_\alpha)$.

Lokálisan triviális vonalnyalábok

$\alpha \xrightarrow{p} X$ úgy, hogy $\forall\, x \in X\ p^{-1}(x) \cong\ k$ a vonalnyaláb.

$\forall\, x\ \exists\, U \ni x$, hogy $p^{-1}(U) \xrightarrow{\phi} U \times k$ és $p = pr_1\phi$ teljesül, ekkor lokálisan triviális.

Áttérési függvények, kociklusstruktúrák, stb.

Jelöljük $\Gamma(V,\alpha)$ a $V \subset X$ feletti szeléseit α-nak. Ha veszünk egy $f \in O_X(V)$ elemet, $s \in \Gamma(V,\alpha)$, akkor fs a fibrumonkénti szorzással megint egy ilyen lokális szelést ad, tehát ez egy kéve lesz, ami modulus O_X felett.

Invertálható is lesz, hiszen lokálisan triviális nyalábot a lokális trivializálás kifeszíti, ez adja hogy ő lokálisan szabad kéve lesz.

Ha F invertálható, akkor létezik egy L lokálisan triviális vonalnyaláb úgy, hogy $F(U) = \Gamma(U,L)$.

Az invertálhatóság miatt létezik egy olyan fedése X-nek úgy, hogy $F(U_\alpha)$ egy szabad $O_X(U_\alpha)$ modulus vagyis $F(U_\alpha) = f_\alpha \cdot O_X(U_\alpha)$ valamilyen f_α függvényre. ...

8.

X kváziprojektív irreducibilis. Van rajta a K racionális függvénytest.

$CaDiv(X)$ áll U_α fedésekből, és mindegyik nyílton egy $f_\alpha \in K(U_\alpha)$ függvény, és kikötjük, hogy $f_\alpha|_\cap f_\beta^{-1}|_\cap \in O^*(\cap)$ a megfelelő nyíltak metszetén. Volt a naiv ekvivalenciánk finoítással, és a másik, hogy szorozhatunk $O^*(U_\alpha)$ elemekkel, ez ugyanazon divizort eredményezi. Ez a komponensenkénti szorzásra csoportot alkot.

$f \mapsto (X, f)$ egy leképezés $K^* \to CaDiv(X)$, ezeket hívjuk principiális Cartier divizoroknak, ezekkel ha lefaktorálunk (ezt hívjuk lineáris ekvivalenciának) kapjuk meg a $CaCl(X)$ Cartier osztálycsoportot.

A másik oldalon k-vonalnyalábok X felett, vagyis olyan $\mathcal{F}$ lokálisan szabad $\mathcal{O}_X$ modulusok, amiknek a rangja 1, ergo minden pontnak van olyan környezete, amire az $\mathcal{F}|_{U\alpha} = b_\alpha \mathcal{O}_X|_{U_\alpha}$ teljesül valami $b_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$. Ezzel ekvivalensen a standard lokálisan triviális vektornyaláb, ahol a fibrumdimenzió 1. U_α fedés, és $g_{\alpha\beta}$ ragasztóleképezések $k^* = GL(1,k)$-ba amikre teljesül a kociklusfeltétel ($g_{\beta\gamma} g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma}$). Most $\mathcal{L} = \sqcup U_\alpha \times k \times \alpha / \sim$. Ahol $(x, r, \alpha) \sim (x, g_{\beta\alpha}(r), \beta)$ az ekvivalenciareláció.

$Pic(X)$ a vonalnyalábok csoportja modulo izomorfizmus.

Szeretnénk egy $CaDiv(X)$ elemhez szerkeszteni vonalnyalábot. A $g_{\beta\alpha} : U_\beta \cap U_\alpha \to k^*$ a $f_\alpha^{-1} f_\beta$ képlettel definiálva, kociklus lesz a divizortulajdonságai miatt.

Világos, hogy a divizorok összege pont a tenzorszorzatot fogja indukálni ennél a konstrukciónál, vagyis ez egy csoporthomomorfizmus lesz. Világos továbbá, hogy principiális divizorokhoz a triviális nyaláb tartozik, egy ragasztóleképezésünk lesz, és az az identitás, vagyis ez a leképezés áthúzódik $CaCl(X) \xrightarrow{l} Pic(X)$ homomorfizmussá. Azt szeretnénk megmutatni, hogy ez izo.

Hogyan lehet egy vonalnyalábból divizort kapni? $\mathcal{L}$ egy vonalnyaláb, egy szelés X felett egy $X \xrightarrow{s} \mathcal{L}$ leképezés az identitás felett. Egy ilyen $s|_{U_\alpha} = (x, s_\alpha(x), \alpha)$ alakú lesz lokálisan, és kompatibilis a trivializációkkal, vagyis $s_\beta(x) = g_{\beta\alpha}(x)s_\alpha(x)$ teljesül a metszet minden pontjában.

Ha kiindulunk egy U_α, f_α divizorból, megszerkesztjük hozzá $\mathcal{L}$-et. Ha veszek ennek egy racionális szelését azt kapjuk, hogy $s_\beta s_\alpha^{-1} = g_{\beta\alpha}$ lokálisan, ami tovább egyenlő $f_\beta f_\alpha^{-1}$-val, és látjuk, hogy $s_\beta / f_\beta \in K^*(U_\beta)$, s így a másik térképen. Eszerint, mivel ezek a hányadosok identikusan ragadnak, létezik egy globális racionális függvény h, ami minden U_α-n megszorul s_α / f_α-ként. Mindez azzá kulminálódik, hogy az U_α, f_α Cartier divizor lineárisan ekvivalens U_α, s_α-val. A szürjektivitáshoz szükséges még, hogy létezzen mindig racionális szelés, ez a priori egyáltalán nem világos.

Injektivitáshoz meghatározzuk a magot. Az egységelem a Picard csoportban a triviális nyaláb, ekvivalensen maga a struktúrakéve. Vesszük a konstans 1 szelést a szorzaton, az eddigiekből visszakapjuk a triviális divizort, vagyis pontosan a principiális divizorok alkotják a magot.

Meggondoljuk, hogy létezik mindig racionális szelés, és ezzel a szürjektivitás is készen lesz. Kiválasztjuk a kedvenc U_{α_0}-t, ezen $s \equiv 1$ legyen. Bármely két nyílt összemetsz az irreducibilitás miatt, és kapjuk, hogy valamely U_α térképen $s_\alpha = g_{\alpha\alpha_0}$ alakú lesz. Vegyük észre, hogy a metszeteken valóban O^*-beli lesz ez a függvény, hiszen a ragasztóleképezések ilyenek. $O^*(\cap) \subset O(\cap) \subset K(\cap) \subset K$. A kociklus relációk adják azt, hogy ez egy jóldefiniált szelést fog adni.

> 💡 Vegyük észre, hogy vastagon ki van használva, hogy a racionális függvények kévéje konstans kéve X-en!

l másképp. Minden Cartier divizorhoz akarunk egy lokálisan szabad $\mathcal{O}_X$ modulust. $\mathcal{F}(U_\alpha) := f_\alpha^{-1}\mathcal{O}(U_\alpha) \subset K$, két környezet metszetén ez szépen fog viselkedni, mert $f_\alpha f_\beta^{-1}$ invertálható $\mathcal{O}_X(\cap)$-ben.

Weil divizorok

X irreducibilis, normális. $D \subset X$ zárt irreducibilis, kodimenziója 1. $Div(X) := \{\sum n_i D_i | n_i \in Z,\ D_i \text{ Weil divizor}\}$ a divizorosztálycsoport. $f \in K^*$ racionális függvényhez $div f = \sum n_i D_i$ alakú lesz, venni kell f zérushelyeit, és pólushelyeit, ezek irreducibilis komponensein megnézhetjük mekkora f multiplicitása, ezek lesznek az n_i-k, a $Div(X)/K^*$-ot nevezzük $Cl(X)$-nek.

> Sima esetben ez megegyezik a Cartier divizorosztállyal, de általában nem mindig!

Példa: $\{xy = z^2\} = X,$ egy kúp egy szinguláris ponttal. Felfújunk az origóban, $\tilde{X}$-ban a görbe felemeltjének -2 lesz az önmetszése. Az x tengely benne van ebben a sokaságban, két egyenlettel ki tudjuk vágni, de nem világos, hogy lehet-e egyel. $\{y = 0\}$ ennek az egyenesnek a kétszeresét metszik ki, pont érinteni fogja ezt a kúpot, ez Cartier divizor.

Állítás: $\{y = z = 0\} \subset X$ nem Cartier.

> Meggondoltuk, hogy a blowupdiagramja egypontú -2-es euler számmal. Az invertálós egyenletből, ha 1 multiplicitással akarunk egy principiális divizort tenni rá, akkor $-2m + 1 = 0$-t kellene egészek felett megoldanunk, ez nem fog menni.

9.

C sima görbe (projektív). $Div(C) = \{\sum_{p \in C} n_p p\}$, ez ugye $Z < p >_{p \in C}$, csoport az összeadásra. $Princ(C)$-hez tekintünk racionális függvényeket, összeadjuk a gyököket, kivonjuk a pólusokat algebrai multiplicitással. Ebből kapjuk az osztálycsoportot faktorizációval, $Cl(C) = Div(C)/Princ(C)$.

Múlt órán néztük, hogy $CaDiv(C) \leftrightarrow Div(C)$, ez előbbiben lokálisan megadott függvények vannak, értelmes a divizorukat tekinteni, mert a metszeten se pólusa se gyöke nem lesz a különböző nyíltakon megadott függvényeknek. A másik irányhoz az kell, hogy minden divizornak van lokális egyenlete. Globálisan ugye nem feltétlenül lehet, de lokálisan maybe. Kellene, hogy minden p-hez létezik U_p nyílt, és egy f lokális egyenlet, amire $div f = p$.

> Most p zárt, hiszen tekinthetjük a p-n átmenő hipersíkokat, ezek ideálja kivágja a pontot. Egy generikus egyenest vegyünk p-n keresztül, ennek a divizora $p + q_1 + \ldots$, ezt a többi metszéspontot kidobva, és hasonlóan egy másik egyenesre ami elkerüli p-t, kidobva a gyökeit L_1/L_2 divizora pontosan az lesz amit szeretnénk a $C \setminus \{q_1 \ldots, r_1, \ldots\}$ nyílton.

Cél: kiszámolni a divizorosztálycsoportot.

Példa: $C = A^1$, erre $Cl(C) = 0$, hiszen $\pm p \sim \emptyset$, az $x - p$ és $1/(x - p)$ függvényeken keresztül.

Példa: $C = P^1$, itt is bármelyik két pont ekvivalens szintén, de nem az üressel.

Létezik egy $Div(X) \to \mathbb{Z}$ morfizmus, projektív esetben ez áthúzódik egy $Cl(X) \to Z$ morfizmussá, ehhez kell az a tétel, hogy projektív varietáson principiális divizorra a gyökök-pólusok szám mindig nulla. Ezt láttuk komplex esetben kftn, de általában is igaz.

Visszatérve a példára $\sum n_p P = (\sum n_p)p_0$ alakban átírhatjuk, hiszen bármelyik pont kicserélhető bármelyik másikra, és látjuk, hogy ennek a deg-nek nevezett leképezésnek a magja pont a principiális divizorok, tehát azok, ahol az együtthatók összege 0, tehát az osztálycsoport pontosan Z, hiszen világos, hogy deg szürjektív.

$C \subset P^2$ sima. Kivágja a $c = 0$ egyenlet, a függvények f/g alakúak azonosfokú homogének úgy, hogy $c \nmid f, g$, hogy a K^*-beli elemet reprezentáljanak. Mi lesz ennek a divizora? Pontosan $\sum_{p \in C \cap Z(f)} i_p(c, f)p - \sum_{q \in C \cap Z(g)} i_q(c, g)q$ alakban adódik, ezt a metszetmultiplicitást, mint tavaly tanultuk a lokális gyűrű faktorának a dimenziójaként számolhatjuk.

Bézout tétel: f, c két homogén polinom, tekinthetsük a metszéspontokra a $\sum i_p(f, c)$ összeget, a tétel azt állítja, hogy ez $\deg c \deg f$. Ebből következik valóban, hogy egy principiális divizornak valóban 0 lesz a képe a $Div(X) \to \mathbb{Z}$ leképezésnél, és projektív esetben kapunk egy $\deg : Cl(X) \to \mathbb{Z}$ szürjektív leképezést. Ez valójában a divizorhoz tartozó $\mathcal{L}$ vonalnyaláb első chern osztályát adja meg (kiértékelve a bázison?).

Definíció: $C^0(X) := \ker \deg$. Ezt szeretnénk megérteni a $0 \to Cl^0(X) \to Cl(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \to 0$ sorozatban, a többi világos lol.

$\deg C = 2$, mit kapunk? Vegyünk két pontot p és q, vegyünk egy s pontot, kössük össze mindkettővel, a hányadosuk fogja tanusítani, hogy $p \sim q$, hiszen a divizora $p + s - (q + s)$.

Állítás: C sima, génusza g, akkor $Cl^0(C) = \mathbb{C}^g / \mathbb{Z}^{2g} \approx (S^1)^{2g}$.

> 💡 $C \subset CP^2$, $\deg C = d$, akkor $g(C) = (d-1)(d-2)/2$, ha egy, vagy kettő a fok, akkor a $Cl^0 = 0$, ha 3 a fok, akkor kapunk egy C/Z^2-et.

Csoda: Létezik harmadfokú görbén egy összeadás, és $(C, +)$ komplex Lie-csoport izomorf $Cl^0(C)$-vel.

$C \subset CP^2$ harmadfokú sima görbe. Választunk rajta egy O pontot, és definiálni szeretnénk rajta egy összeadást. Veszünk egy L_{XY} egyenest, a metszete a C-vel $X + Y + S$, ha $X = Y$, akkor érintőt húzunk be, ha inflexiós pont, akkor S is X lesz. $X \oplus Y$ az $L_{SO} \cap C$ harmadik metszéspontja lesz. Kommutativitás világos, egységelem az O lesz, a művelet két gyenese egybe fog esni, és visszakapjuk, hogy $X + O = X$. Keresünk inverzet is. Húzzunk érintőt az O-ba, a harmadik metszéspont legyen K, és tekintsük az

L_{XK} harmadik metszéspontját a görbével, ez lesz az inverz. Asszociativitás nehéz, házi feldat.

Van most egy $(C, O, \oplus)$ csoportunk, lehet szerkeszteni egy izomorfizmust, hogyha ugyanzen a görbén egy másik O'-t választunk nullásnak.

Hasonlítsuk most össze a divizorosztálycsoporttal ezt. Cl^0-ban $\sum n_p p$ alakú dolgok élnek, a másik csoportban csak sima pontok a C-n. $p \mapsto p - o$ lesz az egyik leképezés, ellenőrizni kell, hogy jóldefiniált, és h csoportmorfizmus. Utóbbihoz arra van szükség, hogy $p \oplus q - o \sim p - o + q - o$. Ezt pontosan tanusítja az összeghez szükséges két egyenes hányadosa, ennek a divizora $p \oplus q + o + s - p - q - s$, és ez ekvivalens azzal amit állítottunk. Injektivitás, szürjektivitás nem világos egyelőre.

A másik irányban először vegyünk egy $Div^0(C) \to (C, o, \oplus)$ leképezést, ezt úgy csináljuk, hogy $\psi : \sum n_p p \mapsto \bigoplus_p \oplus_1^{n_p} p$ (esetleg kivonva, hogyha $n_p < 0$). Ahhoz, hogy ez értelmes legyen a divizorosztálycsoportban kellene, hogy principiális divizorok képe 0.

<u>Tétel</u>: $\psi(\sum i_p(c, f)p) = \deg f K$, vagyis csak $\deg f$-től függ.

Ellenőrizhetjük például egyenesekre, három pont összege mindig a K pont lesz.

10.

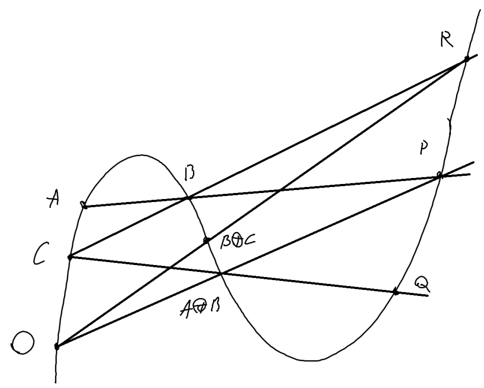
<u>Tétel (Bézout)</u>: $C, D \subset CP^2$ úgy, hogy nincs közös komponensük. $\sum_{C \cap D} i(C, D)_0 = \deg C \deg D$.

<u>Tétel (1. hasadási)</u>: $C, D \subset CP^2$ azonos fokúak, mondjuk c. $C \cap D = P_1 + \cdots + P_{c^2}$. Ha létezik egy E irreducibilis, aminek a foka $e < c$, hogy $P_1, \ldots, P_{ec} \in E$, akkor létezik egy másik F görbe, aminek a foka $c - e$, és a többi metszéspontot tartalmazza $P_{ce+1}, \ldots, P_{c^2} \in F$.

> $C = \{c = 0\}$, és $D = \{d = 0\}$, tekinthetjük az $\alpha c + \beta d$ alakú egyenleteket egy CP^1-el paraméterezve. Ez nevezzük $C_{\alpha:\beta}$-nak, világos, hogy mindegyik tartalmazza a metszéspontokat, szintén d-fokú. Továbbá minden $Q \in CP^2$-re létezik $\alpha : \beta$, hogy $Q \in C_{\alpha:\beta}$. Ha a Q nem valamelyik P_i, akkor valamelyik tag a kombinációban nem nulla, és megoldhatjuk a homogén lineáris egyenletet a paraméterekre. Vegyünk az E-n egy generikus pontot (nem metszéspont). Vesszük azt a tagot a pencilből, ami ezt a $Q \in E$-t tartalmazza, ez a $C_{\alpha:\beta}$ az E-t $ec + 1$ pontban metszi, vagyis van közös komponensük, mivel E irreducibilis, emiatt $C_{\alpha:\beta} = E \cup F$, ismét a Bézout tétel miatt ez az F megfelelő.

$C \subset CP^2$ harmadfokú sima, $O \in C$, kellene hogy ez egy csoport. Asszociativitást nem láttuk még. Kell, hogy $A, B \oplus C, Q$ kollineáris.

Hasadási tételt akarjuk alkalmazni, $C = C$ legyen, $D = L_{ABP} \cup L_{C,A\oplus B,Q} \cup L_{O,B\oplus C,R}$. Most $C \cap D$ pont az érdekes pontok a görbén az összeadáshoz. Lehasítjuk az L_{CBR}-t, ezen rajta van 3 pont, a maradék 6 egy másodfokún fog elhelyezkedni, létezik egy F, másodokfú amin rajta van $A, O, B+C, A+B, P, Q$. Itt most $O, A+B, P$ is kollineáris, de egy másodfokúval csak két metszéspont lehetne, vagyis ez a másodfokú két egyenesre bomlik, és pont ezt akartuk belátni.



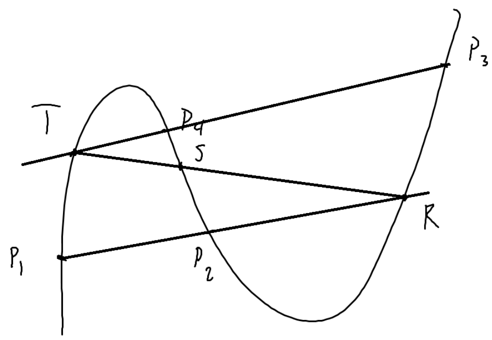
A harmadfokú csoportjának az asszociativitása

Tétel (2. hasadási): Most legyen C n fokú, D m fokú, P_i az nm darab metszéspont. Ha létezik egy L egyenes, hogy $P_1, \dots, P_n \in L$, akkor létezik egy F $m-1$ fokú, ami tartalmazza a többi pontot.

Ha $n = m$ az 1. hasadásiból készen vagyunk. Ha $m < n$, akkor megint Bézout. $L \cap D$-nek több metszéspontja van mint lehetne a tétel miatt, ezért már maga a D hasad. A másik irányban legyen $L = \{x_0 = 0\}$, c, d a megfelelő görbék egyenletei. $D|_L \subset C|_L$-ból következik, hogy $d|_{x0=0} \Big| c|_{x0=0}$, tehát $c(0, x_1, x_2) = \alpha(x_1, x_2) d(0, x_1, x_2)$, tehát a különbség osztható x_0-al, kiemelés után ami f marad megfelelő lesz.

C harmadfokú sima komplex projektív, $O \in C$ fix. Elvágjuk egy D d-fokúval, kapunk $3d$ pontot, de ez nem akármilyen divizor lehet! Azt állítjuk, hogy a harmadfokú csoportjában a pontok összege mindig $\oplus_1^d K$, ahol K az $L_{OO} \cap C$ pontot jelöli.

Indukcióhoz szeretnénk találni 3 kollineáris pontot, ilyen nem mindig lesz sajnos, úgyhogy kell egy csel. $d = 1$ világos. Ha $d > 2$, akkor $3d > 6$. Hozzávesszük D-hez L_{TSR}-et, ennek a C-vel vett metszete a P_i pontok, és a T, S, R pontokat. Ebből lehasítjuk az $L_{P_1,P_2,R}$-et, marad a $P_3, \dots, P_{3d}, T, S$ pontokat, majd lehasítjuk az $L_{P_3,P_4,T}$-t, és kapjuk, hogy a $P_5, \dots, S$ rajta van egy $d-1$ fokú görbén. Indukcióból ezeknek az összege $(d-1)K$, továbbá a két lehasított ponthármas összege is K lesz könnyen ellenőrizhetően, ezzel az indukció kész.



Ábra a bizonyításhoz

Van egy leképezésünk a Divizorcsoportból a harmadfokú belső összeadásába az evidens módon, jóldefiniált, mert a divizorcsoport szabad. Az kellene, hogy ennél a leképezésnél a principiális divizorok nullába menjenek, hogy áthúzódjon a divizor**osztály**csoportra. Az előbb bizonyított tétel szerint minden principiális divizor $dK - dK$-ba megy, vagyis valóban (hiszen a számláló és a nevező azonosfokú és a metszéspontokat adjuk össze a gyökökben s a pólusokban). Tehát van egy$Cl(C), + \to C, O, \oplus$ leképezésünk.

A másik irányban $C, O, \oplus$-ból képezzünk Cl^0-ba egy leképezés $P \mapsto P - O$, mert nulla fokú divizorokat akarunk most. Látjuk, hogy a kompozíció identikus az egyik irányban $P \mapsto P - O \mapsto P \ominus O = P$, tehát ez a leképezés injektív. Ha van egy $\sum P_i - \sum Q_i$ nullfokú divizorunk szeretnénk belátni, hogy Őt lehet indukálni a belső összeadásból. Két pont összeadásához kapott két egyenes hányadosát felírva $P_1 + P_2 + S - O - P_1 \oplus P_2 - S$ lineárisan ekvivalens a nullával, tehát a két pont divizorösszege lineárisan ekvivalens a belső összegével plusz még O-val. Ezt olytatva d pont összege a belső összegük, és $d - 1$-szer az O. Tehát tetszőleges divizor lineáris ekvivalens $P' - Q'$-vel, és erre a két pontra elvégezve az összegzést mégegyszer látjuk, hogy valamely P-re $P + O$ alakú. Látjuk tehát, hogy a $Cl^0(C)$ nullfokú divizorosztálycsoport izomorf a belső geometria csoportjával. Ebből következően a belső összeadás csoportja független az O pont választásától, hiszen $Cl^0(C)$ definíciójában nem vettünk semmi ilyesmit, a pontot a konkrét izomorfizmus választása jelöli ki.

Integrálás algebrai görbéken

gyök alatt egy másodokú mondjuk, általában nem lehet kiszámolni explicite, de átkoordinátázva már egy másodfokú görbén kell integrálni, nem csak a valós egyenesen, ez biracionális egy projektív egyenessel, azt fel tudjuk paraméterezni, és így kiszámolható az integrál. Ez megvan, jöhet most harmadfokú a gyök alatt, ezt átparaméterezve $y^2 = ax^3 + \cdots + d$, ez már nem biracionális valami széppel.

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} R(x) dx = \int y(t) R(x(t)) x'(t) dt$$
$$y^2 = ax^2 + bx + c$$

Legyen most C sima d fokú projektív görbe. $p \in C$ rögzített. Az affin egyenesen 1-formákat szeretünk integrálni pl. $\int_\gamma \omega$ független az út homotópiaosztályától ha $d\omega = 0$. A görbénk egy Riemann felület, valamennyi génusszal, veszünk egy másik p_0 pontot, egy γ utat a két pont között, legyen továbbá ω egy holomor globális 1-forma. $I_{p_0,\gamma}(\omega)$ jelölje az integrált, ez zárt formákra csak a homotopikus tipustól függ. Bázist választunk a $H^0(C, \Omega^1_C)$-nek, Riemann egy tétele azt mondja, hogy a dimenziója pont a génusz lesz. A tóruszon pl ez a dz-nek a faktora lesz, hiszen ez eltolásra invariáns. $(I_{p_0,\gamma}(\omega_1), \ldots, I_{p_0,\gamma}(\omega_g)) \in \mathbb{C}^g$, ahol ω_i a bázisa a globális holomorf differenciálformáknak. $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ bázis legyen a $H_1(C, Z)$-ben. Kiszámoljuk mindegyiken az integrálokat, kapjuk a $I_{p,\gamma_i}(\omega_j)$ mátrixot. Ezzel kapunk egy rácspontrendszert C^g-ben. Ezzel kifaktorizálva kapjuk, hogy a fenti $(I_{p_0,\gamma}(\omega_1),\ldots,I_{p_0,\gamma}(\omega_g)) \in \mathbb{C}^g/\Lambda$ vektor független az út választásától, vagy homotóp két út, vagy az összeűzésük egy zárt görbe, és pont azokkal által generált ráccsal faktorizáltunk ki. Milyen ambiguitás van a p_0 pont megválasztásában Ugyanezen leképezést tekinthetjük a $Div(C)$-ből is, a megfelelő együtthatókkal összeadva az integrálokat, mindegy hogy milyen úton megyünk a kedvenc pontunkból a divizor pontjaiba az eddigi konstrukció miatt. Most kicseréljük p_0-t valami q_0-ra. Veszünk egy α utat a két pont között, és az integrálok additivitását használjuk. A divizorcsoportra ha ezt átvisszük, ugyanez fog történni, de ha a divizor fokszáma $\sum n_i$, akkor ennyiszer lesz hozzáadva az $\int_{q_0}^{p_0} \omega$ $I_{p_0,\gamma}(\omega)$-hoz, hogy $I_{q_0,\gamma}(\omega)$-t kapjunk. Világos tehát, hogy a $Div^0(C)$-re ez így bázispontfüggetlen lesz. Végsősoron kapunk egy $Div^0(C) \to C^g/Z^{2g}$ leképezést.

Tétel (Abel): Az imént megadott leképezés magja pontosan a principiális divizorokból áll.

Következmény: $D_1, D_2 \in Div^d(C)$ $D_1 \sim D_2$ lineáris ekvivalensek pontosan akkor, ha $I(D_1) = I(D_2)$.

$d > 0$-ra tekintsük $Div^d_{ef}(C)$-t, olyan d fokú divizorok, ahol minden együttható pozitív. Ezt úgy is nézhetjük, mint a C $n.$ szimmetrikus hatványát, a leképezésnél a fibrum pont a D-vel lineárisan ekvivalens divizorokból fog állni, ez pedig pont a szelései valamely nyalábnak, $P(H^0(C, \mathcal{L}(D)))$ lesz maga a fibrum.