# Algebrai görbék 14:00

klasszikusan **Affin** görbék

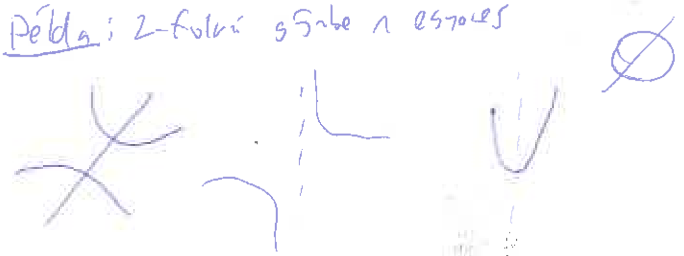
$\mathbb{A}^2_k = k \times k$, $k$ test

$k = \mathbb{R}$ általában $f(x,y) \in k[x,y]$,

$C = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$

algebrailag zárt testeket nézzünk inkább, és projektíven

Példa: 2-foku görbe a egyenes



ugyanaz kép

| lokális | | Affin | | projektív | |
|---|---|---|---|---|---|
| tér | gyűrű | tér | gyűrű | tér | gyűrű |
| 0 környezete | $\exists !$ max ideál $\mathbb{C}[[x,y]]$ UFD | $k^2$, $\mathbb{C}^2$ | $\mathbb{C}[x,y]$ | $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ | $\mathbb{C}[x_0 : x_1 : x_2]$ |
| | | $V(f_1,\dots,f_n)$ $f_1 = 0 = \dots = f_n$ | $f_1, \dots, f_n$ | | homogén polinomok |
| | | pontok $\leftrightarrow$ $(x_0,y_0) \in \mathbb{C}^2$ | max ideálok $(x-x_0, y-y_0)$ | | Sima polinom nem fv $\mathbb{CP}^2$-n |
| | | | UFD | $V(f)$ algebrai projektív görbék $\leftrightarrow$ | homogén polinom $= 0$ visszakapható |
| | | $V = V(f)$ irred, ha $f$ az $\forall\, V_i$-k uniója egyért. | $f = c \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$ egyért. | | |

## Affin $\to$ Proj.

$f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$, $f = \sum\limits_{i+j \le d} a_{ij} x^i y^j$, ez egy

$C$ görbe $\mathbb{CA}^2$-ben, ezt beágyazzuk és lezárjuk $\mathbb{CP}^2$-ben

$\tilde{f} = \sum\limits_{i+j \le d} a_{ij} x^i y^j z^{d-i-j}$ $\to$ homogenizáltuk

$\{\tilde{f} = 0\} \subset \mathbb{CP}^2$ lesz ez a lezárt

$\boxed{\text{HF}}$ $\{\tilde{f} = 0\} \cap (\mathbb{CA}^2 = \{z \neq 0\}) = \{f = 0\}$

$\{\tilde{f} = 0\} \cap \{z \neq 0\} = \{\tilde{f}(x,y,1) = 0\}$

$\boxed{\text{HF}}$ $x^5 + y^7 = 0$ $\mathbb{CA}^2$-ben

$L_\infty = \{z = 0\}$

$\Downarrow$

$x^5 z^2 + y^7 = 0$ - lesz $\mathbb{CP}^2$-ben

$0 = (0,0) \in \mathbb{C}^2$ ben, $C \ni 0$ algebrai görbe

$C$ 0-beli csírája $(0, U \cap C)$, ahol $U \ni 0$ nyílt, és $(0,U) \sim (0,V)$, ha $\exists W \subset U \cap V$.

$f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ $\quad (f(0) = 0)$

$\Updownarrow$

$\exists U \ni 0$ $U \subset \mathbb{C}^2$

$f : U \to \mathbb{C}$ ; $f(0) = 0$

$f, g : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ $\quad f \sim g$, ha

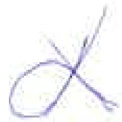
$\exists W : f|_W = g|_W$
$\ni 0$

ez lesz a lokális gyűrű 0-ban (csíraosztály, szorzás) $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ holomorf/polinom/ $C^\infty$/$C^0$

$\mathbb{C}[[x,y]] \leftarrow$ max ideál: $\{f(0) = 0\}$

$\boxed{\text{HF}}$ $f \in \mathbb{C}[[x,y]]$ invertálható $\Leftrightarrow$ $f(0,0) \neq 0$

Vigyázat: $f$ irred. $\mathbb{C}[x,y]$-ban, ~~de~~ lehet, hogy nem irred a $\mathbb{C}[[x,y]]$ lokalitált-ban.

Példa:  $x^2+y^2+x^3+y^3=0$

ez $\mathbb{C}[[x,y]]$-ban felhasad.

$x^5+y^5+x^2y^2$, ez is $\mathbb{C}[x,y]$-ban irr, de $\mathbb{C}[[x,y]]$-ban nem!!

## Lokális tulajdonságok

$f:(\mathbb{C}^2,0)\to(\mathbb{C},0)$ holomorf csíra

$f=f_0+f_1+f_2+\dots$ homogén i. fok

Taylor sor

$f(0)=0 \iff f_0=0$

$f_1=\frac{\partial f}{\partial x}(0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0)y$

ha $f_1\neq 0$, valamelyik parc derivált $\neq 0$, ezért létezik egyért. érintőegyenes, normálvektor!

Implicit fv. tétel szerint $\exists \varphi:(\mathbb{C}^2,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$

átkoordinátázás

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{C}^2_{x,y},0) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "f"'] & (\mathbb{C}^2_{x',y'},0) \arrow[d, "f'=\pi_{x'}"] \\ & (\mathbb{C},0) \end{tikzcd}$$

$f'(x',y')=x'$

R-ekv: $f\overset{R}{\sim}g$, $g=f\circ\Phi$, $\Phi:(\mathbb{C}^2,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$

lok. diffeomorf.

Áll: $f_1\neq 0 \Rightarrow f\overset{R}{\sim}(x',y')\mapsto x'$

Def.: Ekkor $0\in\{f=0\}$ sima/reguláris ~~pont~~ pont, ha $\frac{\partial f}{\partial z}\neq(0,0)$

ha eltűnik a derivált, szinguláris pont.

Példa: $x^2+y^2$ az origóban szinguláris.

Def.: $\operatorname{Sing} C=\{f=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0\}$

$0$ a $(C,0)$-nak izolált szingularitása, ha $\exists U$, amire $U\cap\operatorname{Sing} C=\{0\}$.

Példa: $f(x,y)=x^2$, ennek a zérushelye u.a. mint az $g=x$-nek, de ennek $\forall$ pontja szinguláris.

Példa: $f=f_1^{\alpha_1}f_2^{\alpha_2}\dots f_r^{\alpha_r}$, $\exists\alpha_i\geq 2$, ez pontosan ott lesz szinguláris, ahol a kitevő $>1$.

megj.: $f=\prod f_i^{\alpha_i}$ szinguláris, $\operatorname{Sing} f$ izolált pontokból áll $\iff \forall\alpha_i=1$

Példa $f=x\cdot y$, $\operatorname{Sing} f=\{(0,0)\}$

Def.: (érintő kúp)

$f=f_0+f_1+\dots$, $f_i\equiv 0$ $\forall i<m$, $f_m\not\equiv 0$

akkor $m$ a multiplicitása $f$-nek a pontban

az $f_m(x,y)=0$ az érintőkúp. (kúp, mert homogén)

megj.: az érintő kúp hasad

$f_m(x,y)=\sum_0^n a_i x^i y^{m-i}=y^m\cdot\sum a_i\left(\frac{x}{y}\right)^i=$

$y^m\sum a_i t^i=y^m\prod \ell_i(t)$, $\frac{x}{y}=t$

Megj.: $m=1 \iff$ sima

## metszet multiplicitás

$f=\prod f_i^{\alpha_i}$ irr. felbontás

$g=\prod g_i^{\beta_i}$ — " —

$\{f_i=0\} \neq \{g_i=0\}$ „nincs közös komponens"

$i_0(f,g) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[f,g]]/(f,g)$

$f, g$ metszetmultiplicitása

Megj.: $\{f=g=0\}=\{(0,0)\}$, akkor

$\Updownarrow \leftarrow$ Nullstellensatz

$\sqrt{(f,g)}=(x,y)$

$\Updownarrow$

$\exists k_0 : m^{k_0} \subset (f,g)$ ($m$: a max. ideál $\mathbb{C}[[x,y]]$-ban)

$\Updownarrow$

$\dim \dfrac{\mathbb{C}[[x,y]]}{(f,g)} < \infty$

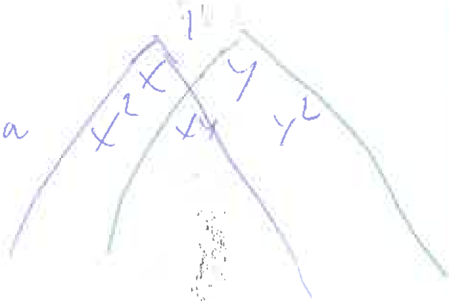
Megj.: $i_0(f,g)>0$

Példa: $i_0(x,y)$

tehát $\mathbb{C}$-dim a faktor

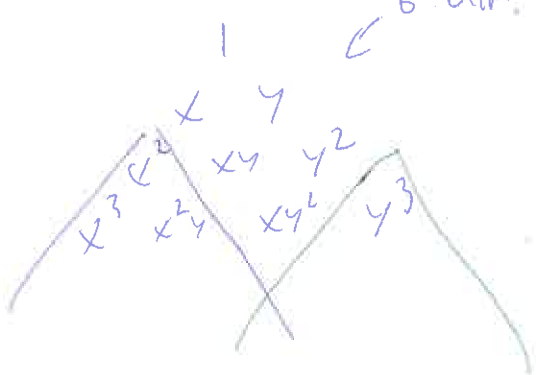
$\Updownarrow$

1-szeres metszés




Példa: $i_0(x^2,y^3)=?$

6-dim.




sőt $i_0(x^a,y^b)=ab$

Példa: $(y, y+x^2)=(y,x^2)$ mint ideálok

$\Rightarrow i_0(y,y+x^2)=2$

Példa: $(x^2+y^3, x^3+y^2)=I$

$x^2+y^3 \in I \to x^3+xy^3 \in I \to y^2-xy^3 \in I$

$x^3+y^2 \in I \qquad y^2(1-xy) \in I$

$\Leftarrow$ invertálható

$y^2 \in I$

és $x^2 \in I$

ezért $i_0(x^2+y^3, x^3+y^2)=4$.

Áll.: $i_0(f, g_1g_2)=i_0(f,g_1)+i_0(f,g_2)$

Biz.:

legyen $g_1$ irr. $\mathcal{O}=\mathbb{C}[[x,y]]$

$$\frac{\mathcal{O}}{(f,g_1g_2)} \xrightarrow{\text{szűri.}} \frac{\mathcal{O}}{(f,g_1)} \to 0$$

$$\uparrow$$

$$\frac{(f,g_1)}{(f,g_1g_2)} \xleftarrow{[g_1h] \leftarrow h \text{ szűri.}} \mathcal{O}$$

$\uparrow$

$0$

ennek a magja $=?$

$g_1h \in (f, g_1g_2)$

$g_1h=af+bg_1g_2$

$g_1 \mid a \Rightarrow h \in (f, g_2)$

$\boxed{\text{HF}}$ $i_0$ stabil koordinátacserére

Áll.: $i_0(f, \text{lineáris}) \geq m(f)$ ($=$, ha nincs benne az érintő kúpban a lineáris, nagyobb különben)

Biz.: új koordináta, hogy a lineáris $=x$ legyen

$(f,x)=(f_m+f_{m+1}+\ldots, x) \to (x, a_m y^m + a_{m+1}y^{m+1}\ldots$

$= (x, y^{m_i}(\underbrace{a_{m_i} + \dots}_{\text{invertálható, mert } a_{m_i} \neq 0})) = (x, y^{m_i})$, ezért

$i(x, y^{m_i}) = m_i \geq m$. $\square$

Áll.: $i_0(f,g) \geq m(f) \cdot m(g)$, egyenlőség
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{kúp}(f) \cap \mathrm{kúp}(g) = \{0\}$

megj.: $m(f) = i_0(f, \mathrm{lin})$, ha a lineáris generikus

megj.: $C = (f=0)$, $C \subset \mathbb{C}^2$, ez egy fedés $C \setminus a\ 0$ (?)
$\downarrow \mathrm{lin}$ — ennek a rétegszáma $m(f)$
$i_0 / \mathbb{C}$ — $\mathbb{C}$

megj.: $R = \mathbb{C}[x,y]$, ~~...~~ $A^4$ ... $(x^2 - y^3, x^3 - y^2)$, itt $\dim \frac{R}{I} = 9$, ahol $I$ az ideál

tétel (Bézout): $C, D \subset \mathbb{CP}^2$, $\deg C = c$, $\deg D = d$
$(C(x,y,z) = 0$, $c$-edfokú homogén$)$
nincs közös komponensük. Ekkor

$$\sum_{P \in C \cap D} i_P(f,g) = c \cdot d$$

Példa: $\{y - x^2 = 0\}$, $\{x = 0\}$, itt a második metszéspont a végtelenben van.

megj.: $\mathbb{CP}^2$ homológiái $\mathbb{Z}$ 0 $\mathbb{Z}$ 0 $\mathbb{Z}$ 00...
egy $d$-edfokú polinom osztálya $H_2(\mathbb{CP}^2, \mathbb{Z})$-ben $d \cdot 1$ (homotóp egy $d$-edfokú monommal)
A homologikus metszetforma u.a. lesz, mint a Bézout állítása (:D)

megj.: $C_1, C_2 \subset \mathbb{CP}^2 \Rightarrow C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$
ha $\nexists$ közös komp., akkor
$$\sum_{P \in C_1 \cap C_2} i_P(C_1, C_2) = \deg C_1 \cdot \deg C_2 \neq 0.$$

megj.: $C$ nem irreducibilis $\Rightarrow C$ szinguláris
$C = C_1 \cup C_2$, létezik $C_1 \cap C_2$-beli pont, itt
$C = \{g_1 g_2 + \dots = 0\}$ — az uniós a szorzat, ennek itt nem lesz lineáris tagja!
$D = \{h_1 + \dots = 0\}$

Példa: $C \cong$ egyenes $\cong \mathbb{CP}^1 \cong S^2$ $\quad \deg C = 1$

$\deg C = 2$:
3/1 $C$ szinguláris, $P \in \mathrm{Sing}\, C$, és $q \neq P$ másik pont

Vegyük a $\overrightarrow{pq}$ egyenest $L$

$C \cap L$ Bézout: $2 = \sum i_P(C, L) = \underset{p}{2} + \underset{q}{1}$ ↯

$m_P \geq 2$, mert $P$ szinguláris

ezért $L \subset C$, $C$ felhasad.

3/2 $C$ sima, $P \in C$-ből nézzük az összes rajta átmenő egyenest, ez egy $\mathbb{CP}^1$.

$\mathcal{L} = \{L \subset \mathbb{CP}^2 \mid P \in L\}$

$\mathcal{L} \setminus T_P \longleftrightarrow C \setminus P\}$

$L(P,q) \leftrightarrow q$, plusz $L(P,P) = T_P$

$\deg C = 3$:
3/1 ~~...~~ esetek reducibilis

3/2 irreducibilis
$|\mathrm{Sing}\, C| \leq 1$, ha $p, q \in \mathrm{Sing}\, C$, $L(p,q) \subset C$
Bézout miatt

$\mathcal{C}$ irreducibilis, $\mathcal{P} \notin \mathrm{Sing}\,\mathcal{C} \Rightarrow m_P(L) = 2$

; összes lesz 3.

megj.: $\mathcal{C}$, $\deg \mathcal{C} = 3$ sima $\Rightarrow$ $\exists$ csoport-struktúra.

$0 \in \mathcal{C}$ fix, $x, y \in \mathcal{C}$ tetsz.

$\mathcal{C} \cap L(x,y) = \{x, y, s\}$, $L(s,0) \cap \mathcal{C} = \{s, 0, x+y\}$

$L(x,x) = T_x$

$0 + x = x$; $\exists x^{-1}$; a Bézout-tal jön az asszociativitás,

$\Rightarrow$ ez egy Lie-csoport (azaz $S^1 \times S^1$)

ha $\deg \mathcal{C} = d$, a genusza $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$

megj.: lokális osztályozás mult. szerint?

$m = 1 \Leftrightarrow \exists f_1$ lineáris tag: $f_1 \overset{R}{\sim} x$

$m = 2 \Leftrightarrow f_2 = ax^2 + bxy + cy^2 = \ell_1 \cdot \ell_2$

$f_2$ nem degenerált ($\ell_1 \neq \ell_2$) $\Rightarrow f \overset{R}{\sim} \ell_1 \ell_2 \; (x^2+y^2)$

Morse-lemma!

ha $f_2$ degenerált: $f = ax^2$, $f \overset{R}{\sim} x^2 + y^m$ $(m \geq 3)$

(Arnold-iskola)

megj.: $\forall f$ izolált sing. közül $\exists k_0 > 0$:

$f \overset{R}{\sim} f_0 + f_1 + \ldots + f_{k_0} = \mathrm{Taylor}_{k_0}(f)$

megj.:

Def. (Milnor-szám): $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, $0 \in \mathrm{Sing}(f)$ izolált. Ekkor $f$ Milnor-száma

$\mu(f) = i_0\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

megj.: $\mu(f) = 0 \Leftrightarrow f$ nem sing.

példa $x^2 + y^2$-nél $\mu f = 1$

$x^2 + y^3 \to \mu = 2$, továbbá $x^a + y^b \to \mu = (a-1)(b-1)$

megj.: $\{f = 0\} = \mathcal{C} \hookrightarrow \mathbb{CP}^2$

$\mathcal{C}$ sima, $\deg \mathcal{C} = d$, milyen top/$C^\infty$ típusú?

① $\mathcal{C}$ irányítható, kompakt, 2-dim, vagyis

$\mathcal{C} \sim A_g =$

lokális száma a génuszt

$H_i(A_g, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & 0 \\ \mathbb{Z}^{2g} & 1 \\ \mathbb{Z} & 2 \end{cases}$

Euler-karakterisztika: $2 - 2g$

megj.: $X \xrightarrow{P} Y$ fedés, $\deg P = d$, akkor

$\chi(X) = d \cdot \chi(Y)$. $\square$

tétel: $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$

Biz. $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathbb{CP}^2$, választunk $P \notin \mathcal{C}$-t ("ugyanolyan"), egy P-t nem tartalmazó egyenest is választunk

$\mathbb{CP}^2 \setminus \{P\}$ $\quad \pi|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to L = \mathbb{CP}^1 = S^2$

$\downarrow \pi$

$L = \mathbb{CP}^1$

ez majdnem egy fedés, de elágazik!

$\mathcal{C} \to \mathbb{CP}^1$

$\pi^{-1}(v_i)$ $\exists v_1, \ldots, v_k$ rossz pontok

$\mathbb{C}\setminus (\bigcup_i \pi^{-1}(a_i))$ -re megszorítva már fedés. lokálisan $z \mapsto z^{k+1}$ fonsctást látunk, ez drónlik.

Áll.: $\deg \pi =$ ~~a megszorítás egy jó felett~~ $|\pi^{-1}(a)|$, ahol a generikus a multiplicitást figyelembe véve $|L(p,a) \cap \mathcal{C}|_{\text{mult.}} = d$

azok a $\overset{q}{V}$ pontok nonlauk el, ahol $L_{pq} \subset T\mathcal{C}$
érintőkép

$\exists p$ generikus választás, hogy $L(p,q)$ érinti $\mathcal{C}$-t, akkor $L(p,q) \cap \mathcal{C} = \{q_1 = q_2, q_3, \dots\}$

hány érintő van? legyen $p = [0:1:0]$, ekkor a párhuzamos, függőleges érintőket keressük: $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ $\Rightarrow$ Bézoutból $d(d-1)$ db metszet van

$d(d-1)$ db rossz pont, ezek felett $d-2$ jó pont, és 2 pont összemegy, a jó pontok felett $d$ pont az ős

~~$\chi(\mathcal{C}) \setminus \pi^{-1}$ …~~

a rossz pontok őse $d(d-1)^2$ db.

$$\chi(\mathcal{C}) = \underset{\text{fedés}}{\chi}(\mathcal{C} \setminus \pi^{-1}(\text{rossz})) + d(d-1)^2$$

$$d \cdot \chi(S^2 \setminus \text{rossz}) = d(2 - d(d-1))$$

$\chi(\mathcal{C}) = d(2 - d(d-1)) + d(d-1)^2 \rightarrow$

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} \quad \square$$

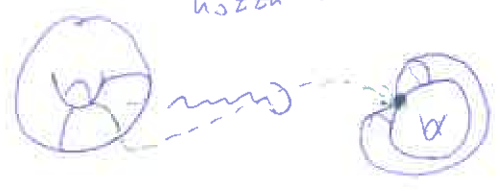
$d = 2$: $\mathcal{C}_{\text{sima}} = S^2$


$XY + tz^2$

a zöld ciklus eltűnik.

$d = 3$: $zXY + X^3 + Y^3 = 0$ egy sing. pont $[0:0:1]$, valós kép:

hozzáadunk $+ \varepsilon z^2 X$-et



HF: $\deg \mathcal{C} = 3$, $p \in \mathcal{C}$; $\mathcal{L} := \{L \subset \mathbb{CP}^2 \mid p \in L\}$, ez egy $\mathcal{C} \to \mathbb{CP}^1$ kétrétű elágazó fedés.
($S^1 \times S^1$ $\pi$-vel forgatás

ha $\exists p$ sing. $\mathcal{L}_p \setminus$ p-beli érintőkép $\Leftrightarrow \mathcal{C} \setminus p$

p-beli érintőkép, összemegy két egyenese

$\mathcal{C} = \{3x^2 + y^3 = 0\}$

cuspos

Milnor szám $= 2$, az érintő egy

$\overset{\cong}{L_p^2}$ dupla egyenes ($\mathbb{C}P^1$), ergo $L_p \setminus$ érintési pont $\longleftrightarrow \mathcal{C} \setminus p$

sőt $L_p \overset{\text{imm}}{\longrightarrow} \mathcal{C}$

$\overset{\cup\!\shortmid}{\mathbb{C}P^1 = S^2}$

## Projektív algebrai síkgörbék parametrizálása

$\sum_{i+j+k=d} a_{ijk} x^i y^j z^k = 0$, ha $N+1$ db együtt. van

ablaka 18 $a_{ijk}$ vektor $\mathbb{C}P^N$-ben van.

$I = \{[a],[x,y,z] \subset \mathbb{C}P^N \times \mathbb{P}^2 \mid \sum_{i+j+k=d} a_{ijk} x^i y^j z^k = 0\}$

incidencia sokaság

$pr_1$

$\mathbb{C}P^N \ni [a]$, $pr_1^{-1}([a]) = \mathcal{C}_{[a]}$

$\Delta = \{[a] : \mathcal{C}_{[a]}$ szinguláris$\}$

| kodimenziós komplex részsokaság

$\mathbb{C}P^N$

$pr^{-1}(\mathbb{C}P^N \setminus \Delta)$

$\downarrow$ ← lokálisan triv. fibrálás

$\mathbb{C}P^N \setminus \Delta$ valós kodim 2

$\Downarrow$

$\mathbb{C}P^N \setminus \Delta$ öf.

Brieskorn & Knörrer: algebraic ${}^{\text{Plane}}_{\wedge}$ Curves

CTC Wall: singular Points of Plane curves

Fischer: Plane alg. Curves

F. Kirwan: Complex alg. Curves

## Algebrai csomók

$C^\infty$ csomó (link) $\coprod_i S^1 \hookrightarrow S^3$ mod. izotópia

$f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ izolált szingularitás

$\mathbb{C}^2$ $c = f = 0$ távolságfv. $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

szingularitás körül vesszünk gömböt, akkor ebben 1-d kompakt sokaságot

metsz ki a görbe. kellően kis $\varepsilon$-ra

ez a link stabilizálódik!

<u>All.:</u> $\exists \varepsilon_0 : \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ $S_\varepsilon$-t transzverzálisan

metszi a görbe ($T_p S_\varepsilon + T_p C = T_p \mathbb{R}^4$)

érintő a $S_\varepsilon$-t

gradC mentén folyunk, ez egy kanonikus

azonosítást ad a különböző $\varepsilon < \varepsilon_0$

gömbök beli csomók között.

$[C \cap S_{\varepsilon_0} \hookrightarrow S_{\varepsilon_0}] \overset{\partial}{\hookrightarrow} [C \cap B_{\varepsilon_0} \hookrightarrow B_{\varepsilon_0}]$

$\|$ $\qquad\qquad\qquad \|$

$[C \cap S_{\varepsilon_0} \hookrightarrow S_{\varepsilon_0}] \hookrightarrow$ kúp$(C \cap S_{\varepsilon_0} \hookrightarrow S_{\varepsilon_0})$

<u>Biz.:</u> a) $\mathcal{C} \xrightarrow{d} \mathbb{R}^+_0$, mik azok a pontok

ahol nem sz? ahol $T_p C < T_p S_{d(p)}$

Pontosan a távolságfv. kritikus pontjai.

kritikus értékek $\subset \mathbb{R}$

Valós algebrai halmaz, levetítjük algebrai, esetleg egy projektivitással, ennek véges sok nullhelye lesz (???)

b) Ha nem (lenne) igaz, nincs ilyen $\varepsilon$, vagyis $\exists P_n$ pontsorozat $\mathcal{C}$-ben, $\lim P_n = 0$, és

$T_{P_n}\mathcal{C} \subset T_{P_n} S_{d(P_n)}$, ergo $T_{P_n}\mathcal{C} \perp P_n$.

<u>Lemma</u> (görbekiválasztási tétel): $V$ valós algebrai, $Z \subsetneq V$ $\mathbb{R}$-algebrai, zárt, $U = V \setminus Z$, $P \in Z$, ha $\exists P_n \subset U$, $\lim P_n = P$ akkor $\exists \gamma : [0,\varepsilon] \to V$ valós analitikus, $\gamma((0,\varepsilon]) \subset U$, $\lim_{t\to 0} \gamma(t) = P$

—

tehát $\exists \gamma : [0,\varepsilon] \to \mathcal{C}$, $\gamma((0,\varepsilon)) \subset \mathcal{C}\setminus\{0\}$,

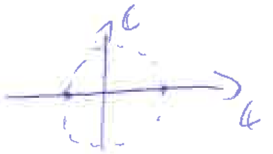
és végig $T_{\gamma(t)}\mathcal{C} \perp \gamma(t)$, $\lim_{t\to 0}\gamma(t) = 0$

$(|\gamma(t)|^2)' = 2\langle \gamma'(t), \gamma(t)\rangle = 0$, ergo

nem tarthat 0-ba ↯.

<u>Köv.</u>: létezik a csomó. Ez kanonikus irányítást örököl a gömbből és $\mathcal{C}$-ből.

<u>Példa</u>: $f(x,y) = y$



$\begin{cases} |x|^2+|y|^2=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$ unknot $(|x|^2=1 \subset S^3)$

levetíthetjük sztereografikusan, látjuk hogy

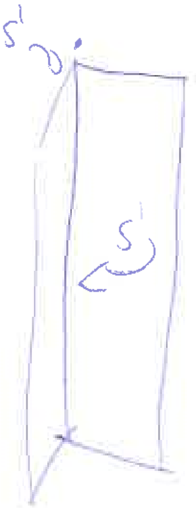
Van egy beágyazott felület a csomó komplementerében levelek töltik ki a gömböt

$S^1$-paraméterezve

$D^2 \to S^3\setminus S^1$

$\downarrow$

$S^1$



<u>Példa</u>: $f(x,y) = xy$; a link

$L_{\{x=0\}} \cup L_{\{y=0\}} \to$

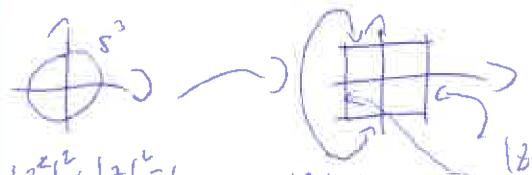
Hopf fibrálás fibrumai

<u>Tétel</u>: $\text{linking}(L_f, L_g) = i_0(f,g)$

egyikre húzunk hártyát, mert $H_1(S^3)=0$ előjeles átmetszések száma a linking szám

<u>Példa</u> $y^2 - x^3 = 0 \Rightarrow$  $\leftarrow$ 2,3 tórikus csomó!

(ahány lok. komponens, annyi része lesz a linknek)



$|z_1|^2+|z_2|^2=1 \to$ $|z_2|=1$, $|z_1|\le 1$ $D\times S^1$; $|z_1|=1$, $|z_2|\le 1$ $S^1\times D^2$

a két tömör tórusz metszete $S^1\times S^1$

$|x|=|y|=1$ $\quad x=t^2$, $y=t^3$ $t$-n paraméterezi a görbét homeomorf módon a csomót ahol $|x|=|y|=1$ pont az egységnyi komplex számok adják, ez def. szerint a torusz csomó.

<u>algebrai csomók folyt.</u>

$f:(\mathbb{C}^2,0)\to(\mathbb{C},0)$ irred. izolált sing.

megj: ha $\partial_y f(0,0)$ ~~van~~, akkor implicit fv tétel miatt lokálisan paraméterezhető holomorfan

megj.: $\partial f(0,0)=(0,0)$, akkor $\Rightarrow$

tétel*: $\exists$ $t\mapsto x(t)$ $(\mathbb{C},0)\to(\mathbb{C},0)$ fvek.
$t\mapsto y(t)$

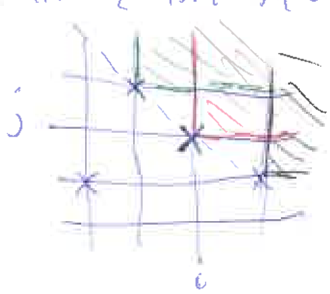
$f(x(t),y(t))=0$, bijektív $(\mathbb{C},0)\to$ ~~V(f)~~ $\{f=0\}$, homeomorfizmus, de az inverze nem analitikus.

megj.: implicit fv tétel van magasabb dimben, ez a tétel nem világos, hogy lenne. Nincs is!

példa: $\{x^3+y^2+z^2=0\}\nleftarrow(\mathbb{C}^2,0)$

*Biz.: $f(x,y)=0$, ki akarjuk számolni $y$-t $x$ függvényében, gyökjelekkel kifejezzük $y(x)=\sum a_i x^{\frac{2i}{3}}$. Hogy?

$f(x,y)=\sum a_{ij}x^iy^j$, lokálisan akarjuk
$\mathbb{N}\times\mathbb{N}\ni\{(i,j)\mid a_{ij}\neq 0\}$

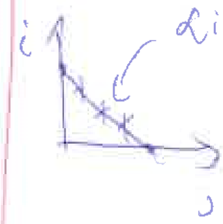


ahol $\exists$ nem 0 monom
ezeket a monomokat dominálja az adott tag

ezeknek a tőle elfelé, negyed terekeknek az unióját nézzük, és ennek a konvex burkát.

Ha $a_{i0}=0$ $\forall i$, akkor $y|f$ viszont $f=y$, mert irred., hasonlóan $a_{0j}$ nem lehet mind 0.

Ez a diagram meghatározza a görbe top. típusát. Ha ~~kapott a görbe, akkor egy egyenesből a határ~~ a határ több egyenesből áll (,,törik'') akkor a görbe hasad.



$\alpha i+\beta j=d$ $x^iy^j$, ebből csinálunk súlyozott homogén monomot:

$w(x)=\alpha$, $w(y)=\beta$ $\Rightarrow w(x^iy^j)=i\alpha+j\beta=d$,

az egyenes minden pontjának ez a súlya.

átírjuk $\frac{x^\beta}{y^\alpha}$-ben egy polinommá vagy $y$ hatvány kiemelésével. Egyváltozós, megkeressük a gyökeit, visszaírjuk, $\prod(x^\beta-t_iy^\alpha)$ alakú lesz.

Felírjuk az átlóra eső részt a polinomnak a Newton diagramon, ez szorzattá bomlik, leparaméterezzük

$x=x_1^\alpha$
$y=4x_1^\beta$ $\leftarrow$ rászorozunk $(t+y_1)$-el

$\boxed{\text{HF}}$ $x=t^4$
$y=t^6+t^9$
1) mit paraméterez ez?
2) ebből az $f$-ből

Parametrizálás

Puiseux parametrizálás

$x = t^m$

$y = a_i t^i + a_{i+1} t^{i+1} + \dots \rightsquigarrow y = a_i t^{\frac{i}{m}} + a_{i+1} t^{\frac{i+1}{m}} + \dots$

$\frac{n_1}{m_1} = \min\{ \frac{i}{m} \mid \frac{i}{m} \notin \mathbb{Z} \text{ és } a_i \neq 0 \}$ $(n_1, m_1) = 1$

$\frac{n_2}{m_1 m_2} = \min\{ \frac{i}{m} \mid \frac{i}{m} \notin \mathbb{Z}[\frac{1}{m_1}],\ a_i \neq 0 \}$ $(m_1, m_2) = 1$

$\vdots$

$\frac{n_g}{m_1 m_2 \dots m_g} = \min\{ \frac{i}{m} \mid \frac{i}{m} \notin \mathbb{Z}[\frac{1}{m_1 m_2 \dots m_{g-1}}],\ a_i \neq 0 \}$

új görbe:

$x = t^m$

$y = a t^{\frac{n_1}{m_1}} + t^{\frac{n_2}{m_1 m_2}} + \dots + t^{\frac{n_g}{m_1 \dots m_g}}$

$(n_1, m_1), (n_2, m_2), \dots$ Puiseux párok

$n_1 > m_1$, $\frac{n_1}{m_1} < \frac{n_2}{m_1 m_2} < \dots$, ezek meghatározzák a csomó izotópiatípusát irreducibilis $f$-re

ismétlés

$f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ hol. csíra, izolált szing.

$\{f=0\} \cap S^3_\varepsilon = K_f \overset{C^\infty}{\cong} \underbrace{S^1 \sqcup S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \hookrightarrow S^3_\varepsilon}_{\text{lok. top. típus}}$

$\{f=0\} \cap B^4 \hookrightarrow B^4$

$\| \qquad \|$

$\underset{\text{kúp}}{C(K_f)} \hookrightarrow \underset{\text{kúp}}{C(S^3)}$

$f$ irred.

$\{f=0\} = C$ $\quad \exists\, (\mathbb{C}, 0) \to (C, 0)$

$t \mapsto (x(t), y(t))$

homeomorfizmus, de az inverz nem holomorf.

ha $C = \bigcup C_i \leftarrow$ irr. komponensek:

$(C_i, 0) \overset{\text{homeo}}{\cong} (\mathbb{C}, 0)$, ergo $(C_i \cap B_\varepsilon) \cong$ top körlap

ergo $C_i \cap S^3_\varepsilon \overset{C^\infty}{\cong} S^1$, tehát minden irred. görbe linkje csomó!

$C$ irred, $t \mapsto (x(t), y(t))$ paraméterezés

$x(t) = a_m t^m + \dots$ $\quad a_m \neq 0$

$y(t) = b_n t^n + \dots$ $\quad b_n \neq 0$

Feltehető, hogy $n > m$, legfeljebb megcseréljük, vagy $a_m y - b_n x$ felé már $n > m$ ✓

$x(t) = t^m (a_m + bt \dots) = t^m \varphi(t)^m$

vonhatunk gyököt

$\varphi(t) = \sqrt[m]{a_m} + \dots$

tehát $t' = t \cdot \varphi(t)$ koordinátacsere, mert a lineáris tag nem 0. (inverzfv. tétel).

Ebből $x(t) = (t')^m$ $\quad m < n,\ a_n \neq 0$

$y(t') = a_n (t')^n + \dots$

megj: $C = \{f=0\}$, $f = f_m + f_{m+1} + \dots$

homogén, $f_m \neq 0$

$\boxed{T}$: $m = \operatorname{mult}(C)$ a paraméterezés $m$-je!

$y = \dots + a_* x^{\frac{n_1}{m_1}} + \dots + a_* x^{\frac{n_2}{m_1 m_2}} + \dots$

Kanonikus forma: $t \mapsto t^{\frac{n_1}{m_1}} + t^{\frac{n_2}{m_1 m_2}} + t^{\frac{n_3}{m_1 m_2 m_3}} + \dots + t^{\frac{n_s}{m_1 \dots m_s}}$

Tétel: 1) $C$ top. típusa megegyezik a hozzá tartozó kanonikus forma top. típusával mod. izotópia

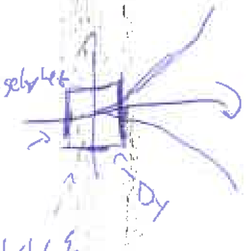
2) $C_{kan}^{(n_i,m_i)_1^g} - C_{kan}^{(n_i,m_i)_1^{g'}} \iff (n_i,m_i)_1^g = (n_i,m_i)_1^{g'}$

Köv.: $S^1 \hookrightarrow S^3$ algebrai csomók/izotópia megfelelnek a Puiseux pároknak

Példa: $x = t^m$ vegyünk $x^3 = y^2$

$y = a_n t^n + \dots$ $x = t^2$

$y = t^3$



érintőkúp $y^2 = 0 \iff x$-tengelyhez simul.

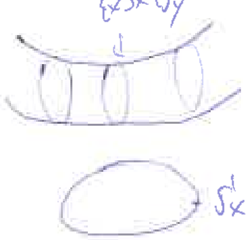
$D_x$ $D_y$

$|x| < \varepsilon$

$|y| < \varepsilon$

$\{f=0\} \cap S_x^1 \times D_y^n = \begin{cases} x = \varepsilon e^{2\pi i \alpha} \\ |y| \leq \varepsilon \end{cases}$

$\varepsilon S \times D_y^2$



$S_x^1$

$\{x\} \times D_y^2 = \begin{cases} x = t^m \\ y = a_n t^n + \dots \end{cases}$

$x = \varepsilon e^{2\pi i \alpha} \Rightarrow t_k = \sqrt[m]{\varepsilon}$

$e^{2\pi i k/m} \Rightarrow$

ebből $y_k = a_n t_k^n + \dots$

$\Rightarrow m$ pont a fiberumban.

Példa $x = t^m$ $m < n$, $(m,n) = 1$

$y = t^n$

$x = \varepsilon e^{2\pi i \alpha}$, $t_k = \varepsilon^{1/m} e^{2\pi i \cdot \frac{\alpha + k}{m}}$, $y_k = \varepsilon^{n/m} e^{2\pi i \frac{\alpha + k}{m} \cdot n}$

Szabályos mozgás forog $\frac{n}{m}$ sebességgel

$m = 2$

$n = 3$

, ezt a fonatot látjuk.

$1/2$ $1/2$ $1/2$ fordulat

Példa $y = x^{3/2} + x^{5/2}$, 5/2-es tag top. nem számít

$x = t^2$ $x = \varepsilon$, $t = \pm\sqrt{\varepsilon}$, $y = \pm \varepsilon^{3/2} \pm \varepsilon^{5/2}$

$y = t^3 + t^5$

$\varepsilon^{5/2} << \varepsilon^{3/2}$ ha $\varepsilon$ kicsi, tehát a szálak mozgását kissé perturbáljuk de össze nem gabalyodunk.

Példa: $x = t^4$, $y = t^6 + t^7 \Rightarrow y = x^{3/2} + x^{7/4}$

közelíti $x^{3/2} = y \iff x = t^2$, $y = t^3$, legyen $x = \varepsilon e^{2\pi i \alpha}$,

$t_{1,2} = \varepsilon^{1/2} e^{2\pi i \frac{\alpha + k}{2}}$, $y_k = \varepsilon^{3/2} e^{2\pi i \frac{\alpha + k}{2} \cdot 3}$ $k = 0,1$

$s_k = \varepsilon^{1/4} e^{2\pi i \frac{\alpha + k}{4}}$ $k = 0, \dots, 3$

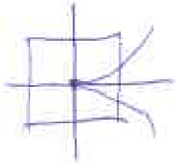
$y_k = \underbrace{\varepsilon^{6/4} e^{2\pi i \frac{\alpha + k}{4} \cdot 6}}_{} + \varepsilon^{7/4} \cdot e^{2\pi i \frac{\alpha + k}{4} \cdot 7}$

közelítés

a második tag

virtuális középpont körül forog $\frac{7}{4}$ sebességgel

szedi szét 4 szállá



$\pi_1(\partial(D^2_x \times D^2_y) \setminus K) = ?$

$$\begin{array}{ccc} S^1_x \times S^1_y & \longrightarrow & D^2_x \times S^1_y \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^1_x \times D^2_y \setminus K & \longrightarrow & \partial D^2_x \times D^2_y \setminus K \end{array}$$

Van-Kampen: $\mathbb{Z}_x \times \mathbb{Z}_y \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_y$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_x \times \mathbb{Z}_y & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}_y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(S^1_x \times D^2_y \setminus K) & \twoheadrightarrow & \pi_1 \end{array}$$

tehát $\langle 1_x \rangle$ képével kell kifaktorálni $\pi_1(S^1_x \times D^2_y \setminus K)$-ból.

$D^2_y \setminus K \to S^1_x \times D^2_y \setminus K$ fibrált nyaláb

$\downarrow$

$S^1$

$F \to E$ lokáliv. fibrálás

$\downarrow$

$B$

$\pi_1(B, x_0) \to \mathrm{Diffeo}(E_{x_0}) / \text{izotópia}$

lok. triviálizálás

közbe triviálizálunk, és

ad $x_0$ fibrumában egy $\mathrm{Diff}(x_0)/\text{izo}$ elemet, ez a monodrómia reprezentáció.

Pl.: Fedés: $X \circlearrowleft \pi(Y, y_0) \to S(f^{-1}(y_0))$

$\downarrow f$ $\qquad\qquad$ szimm. csop.

$Y$ $\qquad$ (4 a)

$\rho: \pi_1(S^1)$ hat a lyukas levezen, ami a fibrum,

$\to \pi_2(S^1) \to \pi_1(F) \to \pi_1(\text{tot}) \to \pi_1(S^1) \to 0$

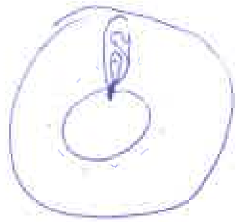
$\pi_2(S^1) = 0$, $\pi_1(F) = F_m$ szabad csop a lukas lapban

$\mathbb{Z}$ hat $F_m$-en monodrómiával

$\pi_1(S^1 \times D^2_y \setminus K) = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_m, t \mid t\gamma_i t^{-1} = \mathrm{mon}(\gamma_i) \rangle$

tehát

$\pi_1(S^3 \setminus K) = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \mid \gamma_i = \mathrm{mon}(\gamma_i) \rangle$



forgatjuk triviálizálunk, és nézzük a gyenzadont,

Példa: trefoil

½ fordulat után

$\gamma_2' = \gamma_1$

$\gamma_1' = \gamma_1^{-1} \gamma_2 \gamma_1$

ezt ábrázoljuk 3-szor

Def.: $K, L \hookrightarrow S^3$ irányított csomók

$lk(K,L)$

Mivel $H_1(S^3)=0 \Rightarrow \exists F^2$ felület: $\partial F = K$ irányítva

$(F, L)$ irányított metszés száma $S^3$-ban a hurkolódási szám.

$\boxed{HF}$ független $F$-től

Tétel (Zariski): $f = f_1 \dots f_n$ ← lin. komponensek.

$K_f = K_{f_1} \sqcup \dots \sqcup K_{f_n}$, $K_f \hookrightarrow S^3$ top. típusa $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ 1) $K_{f_i} \hookrightarrow S^3$ típusa ($f_i$ Puiseux párjai) és

2) $lk(K_{f_i}, K_{f_j})$ $\forall i \neq j$

Továbbá: $lk(K_{f_i}, K_{f_j}) = i(f_i, f_j)_0$ $i \neq j$

$\| \leftarrow$ metszet multiplicitás

$$\dim \frac{\mathbb{C}[[x,y]]}{(f_i,f_j)}$$

Példa: $x^2-y^4 = (x-y^2)(x+y^2) \Rightarrow$ metszetszám $=2$


← két döféspont

Milnor fibrálás

$f:(\mathbb{C}^2,0)\to(\mathbb{C},0)$ izol. szing.

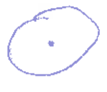
$f^{-1}(0) \pitchfork S^3_\varepsilon$ $\forall\, 0<\varepsilon<\varepsilon_0$ fix $\varepsilon_0$-ra


sima fibrumok

$f^{-1}(t)$ sima ~~...~~ $0<|t|\ll 1$

SARD lemma miatt, plusz nem torlódhatnak a krit. helyek

$\downarrow f$


$D \subset \mathbb{C}$

transzverzalitás megmarad elég kis $t$-re, mert nyílt tulajdonság (valami $\det \neq 0$, ezzel egy környezetben se).

Tétel (Ehresmann): $f: X \to B$ $C^\infty$ ⊛

Tétel (lok. szubmerzió tétel): $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^m,0)$

$T_0 f$ szürj.:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n,0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^m,0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{R}^n,0) & \xrightarrow{\pi_n} & (\mathbb{R}^m,0) \\ & & \uparrow \\ & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} & \end{array}$$

komm.

⊛ és $\forall x \in X$ $T_x f$ szürj. (ezzel nincs krit. pont) és ha $f$ proper (kompakt őse kompakt) akkor $f: X \to B$ lok. triv. fibrálás.

$\boxed{HF}$ $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ nem loktriv fibrálás $f(x,y)=(xy-1)x$ választással.

Tétel (Ehresmann 2): $(X,\partial X) \xrightarrow{f} B$, 1) $f: X \to B$ szubmerzió, és 2) $f|_{\partial X}: \partial X \to B$ szubmerz.

($T_x X \to T B$ szürj.) ($T_x \partial X \to T B$ szürj.)

és $T_x f^{-1}(B) + T_x \partial X$ is szürj., akkor lok. triv. fibrálás.

Tétel: $\exists\, \delta > 0$, $D_\delta = \{t : |t| < \delta\}$

$(f^{-1}(D_\delta \setminus \{0\}), f^{-1}(D_\delta \setminus \{0\}) \cap S^3_{\varepsilon_0}) \to D_\delta \setminus \{0\}$

lok. triv. fibrálás. *

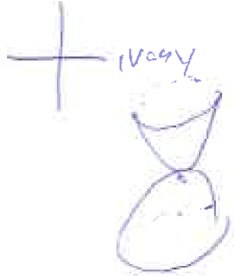
Csak belül sérül a 0-ban, tehát van egy

$f^{-1}(D_\delta) \cap S^3_{\varepsilon_0} \to D_\delta$ fibrálás is. (a 0-ban is transzverzális a preimage, ezzel szürj. és Ehresmann 1).

$\boxed{HF}$ $B \sim * \Rightarrow f: X \to B$ fibrálás triviális.

* ennek a fibrumát nev. Milnor fibrumnak.

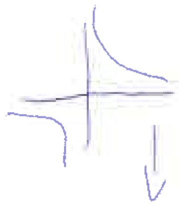
Példa: $f=xy$    $xy=0$

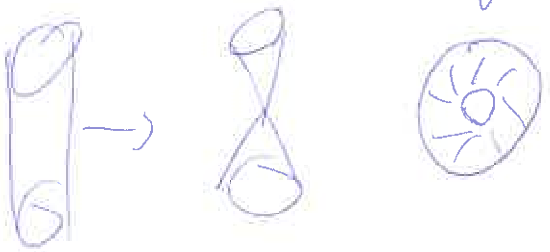


vagy

két transzverz sík.

$xy=t$ ($t\neq 0$)   $(x,y)\mapsto x$

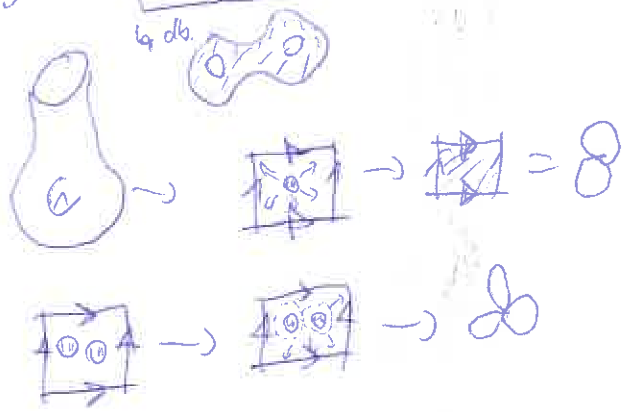




Áll.: $\chi(F)$, $n$ meghatározza a fibrum lyukasságát, hiszen ez egy irányítható $g$-szer lukasztott felület.

$\boxed{F}$ $F$ irányított 2-sokaság, $\partial F\neq\emptyset$, öf. $\Rightarrow$

$\Rightarrow F \sim \underbrace{S^1\vee\ldots\vee S^1}_{\mu \text{ db.}}$ hom.ekv.



Tétel: $F$ a $f$ fibruma az izolált szingularitásnak. $b_1(F)=\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}\{x,y\}/(\partial_x f,\partial_y f)\right)$

$b_1(F)$ első betti számát hívjuk $\mu(F)$-nek, Milnor szám.

Példa: $f=x^n-y^m$, $\mu(F)=(n-1)(m-1)$, mert

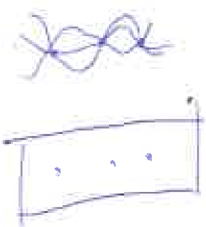
$i(x^{n-1},y^{m-1})_0=$ [illegible]

$\boxed{F}$ $b_0=\text{lnko}(\alpha_i)$, ha $f=\prod f_i^{\alpha_i}$ (irr.)

Példa: $x^4+y^2$   $\mu=3\cdot 1$

$r=2$

Példa: $x^n+y^m=\delta$   $F$-et vetítjük $(x,y)\mapsto x$



$x^n=\delta$ felett 1 pont, ha $x^n\neq\delta$, akkor $m$ pont

$\chi(F)=\chi(F\setminus\{n \text{ pont}\})+n=$

$m\cdot\chi(\mathbb{C}_x \text{ sík}\setminus\{n \text{ pont}\})+n$ mert ha kihagyjuk a branch pontokat az már egy fedés, az egy körlap $\setminus\{n \text{ pont}\}$, karakterisztikája $1-n$

$\Rightarrow m(1-n)+n=\underset{b_0}{1}-\underset{b_1}{(m-1)(n-1)}$

Milnor-fibrálás: $F_t\to f^{-1}(D_\delta\setminus\{0\})\cap B^4_\varepsilon\to D_\delta\setminus\{0\}$ *

$F_t\to f^{-1}(D^2_\delta)\cap B^4_\varepsilon\to D^2_\delta$ is fibrálás,

*-nak van egy $F_\delta\to F_\delta$ monodrómiája ahogy forgunk a pont körül. Ez egy diffeomorfizmusa $F_\delta$-nak, indukál egy $h_0: H_0(F_\delta)\to H_0(F_\delta)$ leképezést, az identikus, mert irányítástartó, továbbá $h_1: H_1(F_\delta)\to H_1(F_\delta)$, $\mathbb{Z}^N\xrightarrow{h_1}\mathbb{Z}^N$ leképezés

$\cancel{\det(h_1-tI)}$

Áll: $h_1$ sajátértékei egységgyökök.

- ~~[illegible]~~ a kar. polinomja $= \prod_k \Phi_k$
  - Jordan blokkok mérete $\leq 2$
- $\det(h_1 - tI_d) = \Delta_{K_f}$ ← Alexander poly.

Dehn-twist: $S$ felület,  tubuláris

$\gamma$ görbe

környezetét kivágjuk, megcsavarjuk $2\pi$-vel, majd visszaragasztjuk. 

Példa: $S^3 \xrightarrow{S^1} S^2$ Hopf. az $S^2$ északi, és déli pólusait kivágjuk, $S^1_É, S^1_D \subset S^3$-at is,

$S^2 \setminus \{É, D\}$ fibrál $S^1$ felett $(0,1)$ fibrumokkal

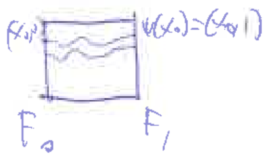
$\Rightarrow$ $S^1 \times (0,1) \to S^3 \setminus (S^1_É \cup S^1_D) \to S^1$ fibráció,

ennek monodrómiája a $2\pi$ twist.

$F \to T$ a közt elfelejt (?) $F \to T'$

$$\begin{array}{ccc} F \to T & & T' \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^1 & & [0,1] \end{array}$$

mivel a bázis $\sim *$ $\Rightarrow$ triviális, a 0 ősl

fibrumot ragasztó leképezés meghatározza az $S^1$-feletti nyalábot 

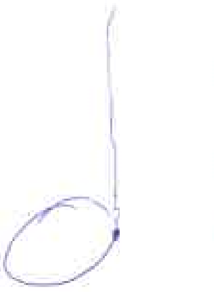
$F \times \{0\}$ · $\psi(x,0) = (x,1)$

$F_0$ · $F_1$

a szakításnál kapunk egy azonosítást $F_0$ és $F_1$ között, ez $S: F_0 \to F_1$ össze kell ragasztani vele

$\psi(S^1(\alpha)) = \alpha$

Példa: $\{x^2 + y^3 = e^{2\pi i \alpha}\} = F_\alpha$ · $F_1: x^2 + y^3 = 1$



$S^1$ hat $\mathbb{C}^2$-en: $\lambda_*(x,y) = (\lambda^3 x, \lambda^2 y)$

$(f \circ \lambda_*)(x,y) = \lambda^6 \cdot f$

$F_1 \times [0, \alpha] f \subset 1$

$((x_0, y_0), \alpha) \mapsto (e^{2\pi i \alpha \cdot 3} x_0, e^{2\pi i \alpha \cdot 2} y_0)$

$F_1 \Rightarrow f(\ldots) = e^{2\pi i \alpha \cdot 6}$

tehát fibrum fibrumba megy

$F_1 \times [0, \frac{1}{6}] \longrightarrow f^{-1}(S^1)$ de ez globálisan homtriviális!

$$\begin{array}{ccc} F_1 \times [0, \frac{1}{6}] & \to & f^{-1}(S^1) \\ \searrow & & \swarrow \\ & [0, \frac{1}{6}] & \end{array}$$

$M_{geom}$ ← (mod. izotópia)

$((x_0, y_0), \frac{1}{6})$ · $(x_0, y_0) \mapsto (x_0 \cdot e^{\frac{2\pi i}{2}}, y_0 e^{\frac{2\pi i}{3}})$

monodrómia! $M^6_{geom} = id_{F_0}$!

$H_1(F) \xrightarrow{H_1(M_{geom})} H_1(F)$

$\|$

$M_{alg}$ egyértelmű (mivel /izotópia)

tehát $M_{alg}$ sajátértékei 6. egységgyökök!

Vari kép: $\underset{z}{\mathbb{C}} \to \underset{w}{\mathbb{C}}$ · $z \mapsto z^n$

origót kidobva fibrálás

$\mathbb{C} \setminus \{0\} \xrightarrow{z^n} \mathbb{C} \setminus \{0\}$

fibrum $n$ pont, ha körbemegyünk, a fibrum permutálódik egy ... $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$, $\Delta = t^n - 1$ :)

$x^2 + y^3 = 1$ máshogy:

$\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ · $u = x^2$ · átkoordinátázás

$(x,y) \mapsto$ · $v = y^3$ · $(0,0)$ felett 1 pont.

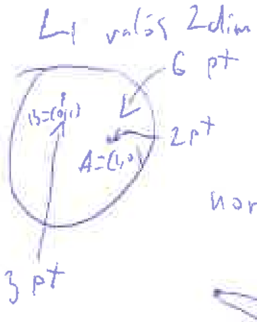
$(x,y)$ · $(u,v)$ · $(u,0)$ felett 2.

$(0,v)$ felett 3.

$(u,v)$ felett 6.

$x^2+y^3-1 = \Phi^{-1}(L)$

$L_1$ valós 2dim

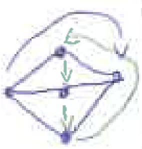


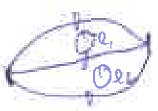
$L_1$-et az $\overline{AB}$ szakaszra zsugorítjuk $\Rightarrow F_1 \sim \Phi^{-1}(\overline{AB})$ nordspirát felfelé kötjük.

azaz ős:

$H_1(F) = \mathbb{Z}^2$

1 helyett $e^{2\pi i \alpha}$-t vesszük, az u koordinátában a két ős megcserélődik, tehát a monodrómia





$H_1(F) = \langle e_1, e_2 \rangle$

$H_1(m_g)(e_1) = -e_2$

$H_1(m_g)(e_2) = e_1 + e_2$

$\Rightarrow \Delta = t^2 - t + 1$

---

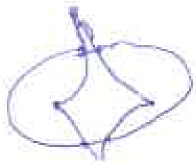
$C \hookrightarrow \mathbb{CP}^2$ projektív síkgörbe

$\{f(x,y,z)=0\}$ $C = C_1 \cup \dots \cup C_r$

homogén d-edfokú $f = f_1 \dots f_r$ $f_i \neq f_j$, $i \neq j$-re

1) $C$ sima $\Rightarrow C$ irred. $\overset{\text{génusz}}{\Rightarrow} \frac{(d-1)(d-2)}{2} = g$

2) ha $C$ szing. mi a nyit?



szing. pontokra lok. elmélet

$\forall$ szing. hely körül Milnor-golyót $B_i$,

$C \cap B_i = \mathrm{kúp}(C \cap \partial B_i)$

generikus görbe sima $\Rightarrow$ $f$-et kicseréljük lokálisan $f_t = f + t$ Monom-ra, az Ehresmann itt is igaz, az összes paraméter térben, így ezzel a perturbálással u.a. a fibrumot látjuk.

A sima görbe egy $A_p =$ , ebben megkeressük a Milnor fibrumot

$C_t = \{f_t = 0\}$ sima, $C_0$-ban a $b_1$ Betti-számot megöltük, vagyis $C_0 = C_t \cup \bigvee e_i^2$, ahol $\sum N_i$ db cellát kell hozzáragasztanunk,

$H_i(C_0) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i=0 \\ \mathbb{Z}^{b_1 \text{szing}} \\ \mathbb{Z}^{b_2 \text{szing}} \\ \mathbb{Z} \end{cases}$

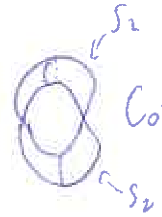
$b_1 \text{szing} = 2g - |I_1|$ ahol $|I_1| + |I_2| = \sum N_i$

$b_2 \text{szing} = 1 + |I_2|$

Példa $(x^2+y^2+z^2)(x+2y)$

krit. pontok, perturbálva $C_{t\neq0}$ ($d=3$ sima)

erre a simított $C_{t\neq0} =$

$\rightarrow$ 

$S_2$ $C_0$-ban

$S_2$ lista

kérdés: lok. top. típus rögzítve

• $d$ foknál között realizálható-e a lista?

$\sum \mu_i = ?$ $C_0$ ired $b_2^{\text{szing}} = 1$ $\sum \mu_i \leq (d-1)(d-2)$

$C_0$ nem ired $b_2^{\text{szing}} \leq d$ $\sum \mu_i \leq (d-1)+(d-1)(d-2)$

megj: $\forall p_i$ lokálisan $\times$ max 9 db lehet, mert egy metszéshez egy ciklus tartozik, és ezek páronként diszjunktak az $4_p$ simított felületen.

∀ szingularitás lok. irreducibilis, $C$ maga ired ⇒ kész. 4 szing van :0)

Kérdés: $C_0$ ired, Sing $C = \{p\}$ lok ired, $N = (d-1)(d-2)$

(rational irreducible unicuspidal) osztályozása.

tudunk-e a csomóba $D^2$-t hátha beágyazva?

tudunk-e a csomóba $D^2$-t úgy, hogy homologikusan a $d$ elemet reprezentálja?

Példa: $C$ deg $C = d$, Sing $C = \{p\}$ lok ired,

1 Puiseux párral, $C$ rational $\Leftrightarrow N = (d-1)(d-2)$

$\Downarrow$

lok. $u^a + v^b = 1$ alakú, $N = (a-1)(b-1) = (d-1)(d-2)$.

Kérdés, melyek realizálhatóak $(d, a, b)$?

Tétel: 1) $(a,b) = (d-1, d)$ $\quad x^d + y^{d-1}z$

(overlap)

2) $(a,b) = (d/2, 2d-1)$, ahol $2|d$, $(zy - x^2)^{d/2} = xy^{d-1}$

3) $(a,b) = (\varphi_{j-2}^2, \varphi_j^2)$, $d = \varphi_{j-1}^2 + 1$, $j$ ptlan $\geq 5$

4) $(a,b) = (\varphi_{j-2}, \varphi_{j+2})$, $d = \varphi_j$, $j$ ptlan $\geq 5$

5) $(a,b) = (\varphi_4, \varphi_8 + 1) = (3, 22)$, $d = \varphi_6 = 8$

6) $(a,b) = (2 \cdot \varphi_4, 2 \cdot \varphi_8 + 1) = (6, 43)$ $d = 2\varphi_6 = 16$

ahol $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_j = \varphi_{j-1} + \varphi_{j-2}$ a Fibonacci számok.

Példa: $d = 5 \Rightarrow (a-1)(b-1) = 12$

$\begin{array}{lll} 6\checkmark & (2,13) & \Leftarrow 1 \cdot 12 \\ \times & (3,7) & 2 \cdot 6 \\ 4\checkmark & (4,5) & 3 \cdot 4 \end{array}$

$S_{lok} = \langle 3, 7 \rangle \subset \mathbb{N}$, $d = 5$

Általában: szingularitáshoz $\exists$ félcsoport.

$\mathbb{N}$-et felosztjuk $(0, d]$, $(d, 2d]$, ... -ra

ha $(d, a, b)$ alg. realizálható, akkor

$\#((-d, 0] \cap S) = 1$

$\#((0, d] \cap S) = 2$

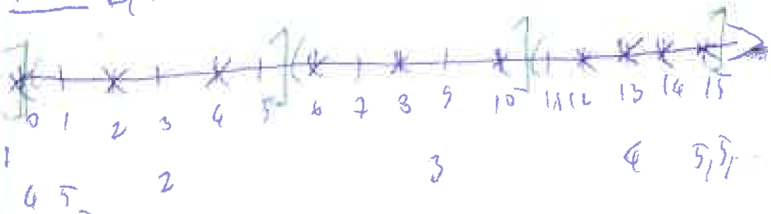
$= d-1$

$= d$

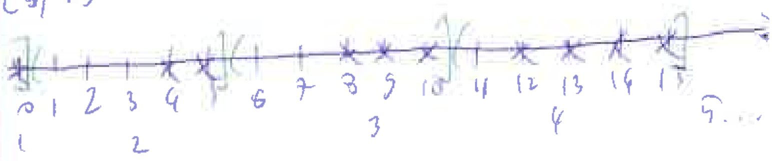
$= d$

: teljesül

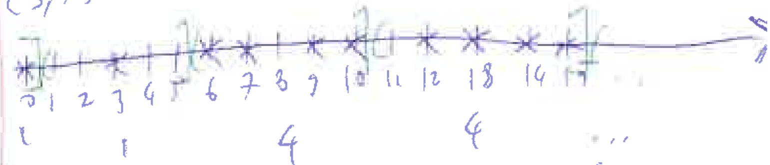
Példa $(2, 13)$



$(3, 4)$:



$(3, 7)$



rossz