Analízis 4 (mértékelmélet) 2020 tavasz

a diákok feljegyzései KT előadásai és Kós Géza jegyzete alapján

2021. július 5.

Tartalomjegyzék

1. Alapfogalmak . . . 2
2. Lebesgue-féle külső mérték . . . 7
3. Lebesgue–Stieltjes-mérték. Lokálisan véges Borel mértékek reguláritása . . . 10
   3.1. Lokálisan véges Borel mértékek regularitása, Lebesgue-Stieltjes mérték . . . 12
4. Mérhető függvények . . . 13
5. Integrálás . . . 16
6. Függvénysorozatok integrálja . . . 19
7. Riemann- és Lebesgue-Stieltjes integrálok . . . 23
   7.1. Riemann- és Lebesgue-integrálok . . . 23
   7.2. A Riemann-integrál létezésének feltételei . . . 23
8. Mérhető függvény közelítése függvénysorozattal . . . 26
9. Előjeles mértékek és variációik . . . 27
10. Előjeles mértékek felbontási tételei . . . 30
11. Lebesgue-felbontás . . . 32
12. Radon–Nikodym derivált . . . 35
13. A maximális operátor . . . 38
14. Borel-mértékek differenciálása . . . 42
15. Abszolút folytonos és szinguláris függvények . . . 48
16. Abszolút folytonos függvények (részben KT által utólag leírt tálalása) és Newton-Leibniz szabály Lebesgue integrálra . . . 48
17. Véges sok mértéktér szorzata . . . 54
18. Végtelen sok mértéktér szorzata . . . 58
19. A Fubini-tétel . . . 61
20. Lp-terek . . . 64
21. LP-terek(folytatás) . . . 68
22. L2-terek . . . 69
23. Mértékben való konvergencia. . . . 70
24. Mértéktartó leképezések . . . 72
25. A konvolúció és alkalmazásai . . . 73
26. Fourier-sorok, Fourier-transzformáció . . . 78
    26.1. Fourier-transzformált általános esetben . . . 82

0.1. *megjegyzés.* A továbbiakban a valós egyenes $-\infty$-nel és ∞-nel vett bővítését a természetes rendezéssel ellátva $\bar{\mathbb{R}}$ jelöli. A $[0, \infty]$ jelölés az összes nemnegatív valós szám halmaza ∞-vel kiegészítve.

0.2. *megjegyzés.* A továbbiakban $\mathcal{J}$ a Jordan-mérhető halmazok halmaza, és t a Jordan-mérték.

1. Alapfogalmak

1.1. definíció (véges additivitás)**.** X nemüres alaphalmaz, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\mu : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}$ esetén végesen additív, ha $n \in \mathbb{N}$, $A_1, A_2...A_n \in \mathcal{A}$ páronként diszjunkt halmazok, $\cup A_i \in \mathcal{A}$ esetén

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

1.2. definíció (σ-additivitás)**.** X nemüres alaphalmaz, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\mu : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}$ esetén σ-additív, ha $\mu(\emptyset) = 0$ és $A_1, A_2... \in \mathcal{A}$ páronként diszjunkt halmazok, $\cup A_i \in \mathcal{A}$ esetén

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

1.3. *megjegyzés.* A két definícióhoz az is hozzátartozik, hogy a jobb oldali összeg létezik. $\pm\infty$ véges számmal való összeadását természetesen kezeljük, $-\infty + \infty$ értéke nem értelmezett.

1.4. *megjegyzés.* A Jordan-mérték σ-additív $\mathcal{J}$-n.

1.5. definíció (σ-algebra)**.** X nemüres alaphalmaz esetén $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ-algebra, ha **1.** $\emptyset \in \mathcal{M}$, **2.** $H \in \mathcal{M}$ esetén $X \backslash H \in \mathcal{M}$ és **3.** $H_1, H_2... \in \mathcal{M}$ esetén $\cup H_i \in \mathcal{M}$.

1.6. Állítás. *Ha $\mathcal{M}$ σ-algebra X-en, akkor **1.** $X \in \mathcal{M}$, **2.** $A_1, A_2... \in \mathcal{M}$ esetén $\cap A_i \in \mathcal{M}$ és **3.** $A, B \in \mathcal{M}$ esetén $A \backslash B \in \mathcal{M}$.*

Bizonyítás. 1. $\emptyset \in \mathcal{M}$ és $X = X \backslash \emptyset$, így $X \in \mathcal{M}$.
2. Mivel a komplementerek $\mathcal{M}$-ben vannak, a de Morgan-azonosság miatt a metszet is $\mathcal{M}$-ben lesz.
3. $A \backslash B = A \cap (X \backslash B)$.

1.7. Állítás. *Ha $\mathcal{A}$ egy X alaphalmazon vett σ-algebrák egy nemüres családja, akkor $\cap \mathcal{A}$ is σ-algebra.*

Bizonyítás. A definícióból triviálisan következik.

1.8. következmény. *Tetszőleges $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ esetén létezik legszűkebb $\mathcal{H}$-t tartalmazó σ-algebra.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{A}$ az összes $\mathcal{H}$-t tartalmazó σ-algebrák halmaza. Ekkor $\mathcal{A}$ nemüres, mert $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{A}$. Ekkor $\cap \mathcal{A}$ σ-algebra, és nyilván a legszűkebb $\mathcal{H}$-t tartalmazó.

1.9. definíció (generált σ-algebra)**.** X alaphalmaz, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ esetén a legszűkebb $\mathcal{H}$-t tartalmazó σ-algebra a $\mathcal{H}$ által generált σ-algebra.

1.10. definíció (Borel-halmaz)**.** (X, Ω) topologikus térben az Ω által generált σ-algebra elemei a Borel-halmazok.

1.11. *megjegyzés.* A továbbiakban $\mathbb{R}^p$ Borel-halmazai családjának jele $\mathcal{B}$.

1.12. definíció (G_δ-halmaz)**.** A megszámlálható sok nyílt metszeteként előálló halmazok a G_δ-halmazok.

1.13. definíció (F_σ-halmaz)**.** A megszámlálható sok zárt uniójaként előálló halmazok az F_σ-halmazok.

1.14. definíció (mérhető tér)**.** Egy $(X, \mathcal{M})$ rendezett pár mérhető tér, ha $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ-algebra.

1.15. definíció (mérték)**.** $(X, \mathcal{M})$ mérhető tér esetén egy $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ függvény mérték, ha σ-additív.

1.16. definíció (mértéktér)**.** Egy $(X, \mathcal{M}, \mu)$ rendezett hármas mértéktér, ha $(X, \mathcal{M})$ mérhető tér és $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ mérték.

1.17. definíció (számlálómérték)**.** Tetszőleges X alaphalmaz esetén a $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ függvény számlálómérték, ha $A \subseteq X$ esetén $\mu(A) = |A|$, ha $|A|$ véges és $\mu(A) = \infty$ ha $|A|$ végtelen.

1.18. definíció (Dirac-mérték)**.** Tetszőleges X alaphalmaz és $x_0 \in X$ esetén $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ Dirac-mérték vagy x_0-ra koncentrált mérték, ha $A \subseteq X$ esetén $\mu(A) = 1$ ha $x_0 \in A$ és $\mu(A) = 0$ ha $x_0 \notin A$.

1.19. Állítás. *Ha $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, akkor **1.** μ végesen additív, **2.** μ monoton és **3.** $A, B \in \mathcal{M}, A \subseteq B, \mu(A) < \infty$ esetén $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

Bizonyítás. Triviális.

1.20. Állítás (mérték folytonossága)**.** *$(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér esetén ha $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ $\mathcal{M}$-beli halmazok, akkor*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$$

Bizonyítás. Legyen $B_1 = A_1$, $n > 1$ esetén $B_k = A_k \backslash A_{k-1}$. Ekkor $n \neq k$ esetén $B_n \cap B_k = \emptyset$. Ekkor

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(B_n) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} B_n\right)$$

1.21. Állítás. *$(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér esetén ha $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ $\mathcal{M}$-beli halmazok, ahol létezik $n \in \mathbb{N}$, hogy $\mu(A_n) < \infty$, akkor*

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$$

Bizonyítás. Nyilvánvalóan feltehető, hogy $n = 1$. Legyen $B_k = A_1 \backslash A_k$, ekkor $k \in \mathbb{N}$ esetén $B_k \subseteq B_{k+1}$. Mivel $\mu(A_k) < \infty$, $\mu(B_k) = \mu(A_1) - \mu(A_k)$. Ekkor a mérték folytonossága miatt

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(A_1 \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \mu(A_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = \mu(A_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_1) - \mu(A_k)$$

1.22. definíció (teljes mértéktér)**.** 2Az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér teljes, ha $B \in \mathcal{M}$, $A \subseteq B$, $\mu(B) = 0$ esetén $A \in \mathcal{M}$.

1.23. tétel. *Ha $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, akkor létezik $\mathcal{M}^* \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ-algebra és $\mu^* : \mathcal{M}^* \to [0, \infty]$ mérték, hogy $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}^*$, $\mu^*_{|\mathcal{M}} = \mu$ és $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*)$ teljes.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{M}^* = \{M \cup K : M \in \mathcal{M}\ \exists N \in \mathcal{M},\ \mu(N) = 0, K \subseteq N\}$, tehát azon A-k halmaza, amelyek előállnak mint egy M mérhető halmaz kiegészítve egy nullmértékű halmaz egy részhalmazával. Ekkor a tétel teljesüléséhez $\mu^*(A) = \mu(M)$ kell, hogy teljesüljön, amihez szükséges az, hogy ez az érték jóldefiniált legyen.
Legyen $A \in \mathcal{M}^*$, M_1, N_1, K_1 és M_2, N_2, K_2 a definíció szerinti halmazok, hogy $M_1 \cup K_1 = M_2 \cup K_2 = A$. $M_1 \cap K_1 = \emptyset$, $M_2 \cap K_2 = \emptyset$ feltehető. Ekkor $K_1 = A \backslash M_1$, $M_2 \subseteq A$, $K_1 \subseteq N_1$, így $M_2 \backslash M_1 \subseteq N_1$. Mivel $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ és $\mathcal{M}$ σ-algebra, $M_2 \backslash M_1 \in \mathcal{M}$. Ekkor $\mu(M_2 \backslash M_1) \leqslant \mu(N_1)$, így $\mu(M_2 \backslash M_1) = 0$. Hasonlóan $\mu(M_1 \backslash M_2) = 0$. Így $\mu(M_1) = \mu(M_1 \cap M_2) = \mu(M_2)$.
Legyen $\mu^*(A) = \mu(M_1) = \mu(M_2)$. Ekkor minden $A \in \mathcal{M}^*$ esetén $\mu^*(A)$ jóldefiniált. Most legyen $A_1, A_2 ... \in \mathcal{M}^*$ és M_i, N_i, K_i olyan, hogy $M_i, N_i \in \mathcal{M}$, $K_i \subseteq N_i$, $\mu(N_i) = 0$, $M_i \cap K_i = \emptyset$, $A_i = M_i \cup K_i$. Legyen

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i, N = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i, K = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$$

Ekkor $M, N \in \mathcal{M}$, mivel $\mathcal{M}$ σ-algebra, $\mu(N) = 0$, mivel μ σ-additív, $K \subseteq N$, $M \cap K = \emptyset$ és $M \cup K = A$. Így $A \in \mathcal{M}^*$ és

$$\mu^*(A) = \mu(M) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(M_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

Így μ^* σ-additív. $\mathcal{M}^*$ σ-algebra, mert $X \backslash A = (X \backslash M) \backslash N \cup (N \backslash K)$. $(X \backslash M) \backslash N \in \mathcal{M}$, $N \backslash K \subseteq N$, $\mu(N) = 0$, így $X \backslash A \in \mathcal{M}^*$. $\emptyset \in \mathcal{M}^*$ triviális, így $\mathcal{M}^*$ σ-algebra, $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*)$ mértéktér.
Ha $M \in \mathcal{M}$, akkor $M = M \cup \emptyset$, ahol $M \cap \emptyset = \emptyset$, $\mu(\emptyset) = 0$, így $M \in \mathcal{M}^*$, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}^*$. Legyen $K \in \mathcal{M}^*$, $\mu^*(K) = 0$ és $L \subseteq K$. Ekkor létezik $N \in \mathcal{M}$, hogy $\mu(N) = 0$ és $K \subseteq N$. Ekkor $L \subseteq N$, $\emptyset \in \mathcal{M}$, $L = L \cup \emptyset$, így $L \in \mathcal{M}^*$, $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*)$ teljes.

1.24. definíció (σ-szubadditivitás)**.** X tetszőleges alaphalmaz, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ esetén $\varphi : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ σ-szubadditív, ha $H, A_1, A_2 ... \in \mathcal{A}$ esetén ha

$$H \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \varphi(H) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k)$$

1.25. definíció (relatív külső mérték)**.** X tetszőleges alaphalmaz, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\emptyset \in \mathcal{A}$ esetén $\varphi : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ relatív külső mérték, ha σ-szubadditív és $\varphi(\emptyset) = 0$.

1.26. *megjegyzés.* Mivel $\emptyset \in \mathcal{A}$, ha φ relatív külső mérték, akkor φ monoton és végesen szubadditív.

1.27. definíció (külső mérték)**.** X tetszőleges alaphalmazon egy $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ relatív külső mérték külső mérték.

1.28. Állítás. *Minden mérték relatív külső mérték.*

Bizonyítás. Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, $H, A_1, A_2 ... \in \mathcal{M}$, hogy $H \subseteq \cup A_k$. Legyen

$$B_n = A_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$$

Ekkor

$$\mu(H) \leqslant \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

1.29. definíció (asszociált külső mérték)**.** Legyen X tetszőleges alaphalmaz, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\alpha : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ olyan, hogy $\alpha(\emptyset) = 0$. Ekkor $\varphi_\alpha : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ az α-hoz asszociált külső mérték, ahol

$$\varphi_\alpha(H) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(A_k) : A_k \in \mathcal{A}, H \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right\}$$

1.30. *megjegyzés.* $\inf \emptyset = \infty$.

1.31. *megjegyzés.* φ_α külső mérték.

1.32. definíció (külső mérték szerint mérhető halmaz)**.** Adott X alaphalmazon vett φ külső mérték esetén $A \subseteq X$ mérhető φ szerint, ha tetszőleges $H \subseteq X$ esetén $\varphi(H) = \varphi(H \cap A) + \varphi(H \backslash A)$.

1.33. *megjegyzés.* A φ szerint mérhető halmazok halmaza $\mathcal{M}_\varphi$.

1.34. *megjegyzés.* A külső mérték szubadditivitása miatt $A \in \mathcal{M}_\varphi$ ekvivalens azzal, hogy tetszőleges H-ra $\varphi(H) \geqslant \varphi(H \cap A) + \varphi(H \backslash A)$.

1.35. definíció (halmazrendszer megszorítása)**.** X tetszőleges alaphalmaz, $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$, $H \subseteq X$ esetén $\mathcal{A}$ megszorítása H-ra az $\mathcal{A}|_H = \{A \cap H \subseteq X : A \in \mathcal{A}\}$ halmaz.

1.36. *megjegyzés.* Ha $\mathcal{A}$ σ-algbera, $\mathcal{A}|_H$ is.

1.37. lemma. *Legyen φ külső mérték X-en, $A_1, A_2 ... \in \mathcal{M}_\varphi$ páronként diszjunktak, $Y \subseteq X$. Ekkor*

$$\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \cap Y\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k \cap Y)$$

Bizonyítás. Legyenek $A, B \in \mathcal{M}_\varphi$ diszjunktak. Ekkor $\big((A \cup B) \cap Y\big) \cap A = A \cap Y$, $\big((A \cup B) \cup Y\big) \backslash A = B \cap Y$, így $\varphi\big((A \cup B) \cap Y\big) = \varphi(A \cap Y) + \varphi(B \cap Y)$. Innen φ monotonitása miatt $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \cap Y\right) \geqslant \varphi\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cap Y\right) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(A_k \cap Y)$$

Ekkor

$$\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \cap Y\right) \geqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \varphi(A_k \cap Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k \cap Y)$$

φ σ-szubadditivitása miatt a másik oldali egyenlőtlenség triviálisan teljesül.

1.38. tétel. *Ha φ külső mérték X-en, akkor $\mathcal{M}_\varphi$ σ-algebra és $(X, \mathcal{M}_\varphi, \varphi_{|\mathcal{M}_\varphi})$ teljes mértéktér.*

Bizonyítás. Legyen $A \in \mathcal{M}_\varphi$, $H \subseteq X$ tetszőleges. Ekkor $H \cap (X \backslash A) = H \backslash A$, $H \backslash (X \backslash A) = H \cap A$, így $X \backslash A \in \mathcal{M}_\varphi$.
Legyen $B \in \mathcal{M}_\varphi$. Ekkor $\varphi\big(H \cap (A \cup B)\big) = \varphi(H \cap A) + \varphi(H \cap B)$. $B \in \mathcal{M}_\varphi$, így $\varphi(H \backslash A) = \varphi\big((H \backslash A) \backslash B\big) + \varphi\big((H \backslash A) \cap B\big)$. $(H \backslash A) \backslash B = H \backslash (A \cup B)$.
$(H \backslash A) \cap B = (H \cap B) \backslash A$, így φ monotonitása miatt $\varphi\big(H \cap (A \cup B)\big) + \varphi\big(H \backslash (A \cup B)\big) = \varphi(H \cap A) + \varphi(H \cap B) + \varphi(H \backslash A) - \varphi\big((H \backslash A) \cap B\big) = \varphi(H) + \varphi(H \cap B) - \varphi\big((H \cap B) \backslash A\big) \leqslant \varphi(H)$. Tehát $A \cup B \in \mathcal{M}_\varphi$.
Hasonlóan a monotonitás miatt $\varphi\big((H \cap A) \cap B\big) + \varphi\big((H \backslash (A \cap B)\big) \leqslant \varphi\big((H \cap A) \cap B\big) + \varphi\big((H \cap A) \backslash B\big) + \varphi(H \backslash A) = \varphi(H \cap A) + \varphi(H \backslash A) = \varphi(H)$. Így $A \cap B \in \mathcal{M}_\varphi$. Innen indukcióval tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén ha $A_1, A_2 ... \in \mathcal{M}_\varphi$,

$$\varphi(H) = \varphi\left(H \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \varphi\left(H \backslash \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

Ha $\varphi(H) = \infty$, akkor triviálisan

$$\varphi(H) \geqslant \varphi\left(H \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \varphi\left(H \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

φ monotonitása miatt

$$\varphi\left(H \backslash \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \geqslant \varphi\left(H \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

Ha $\varphi(H)$ véges, akkor létezik

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\left(H \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

(A sorozat monoton növő és korlátos.) Ekkor határátmenettel a mérték folytonossága miatt

$$\varphi(H) \geqslant \lim_{n\to\infty} \varphi\left(H \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \varphi\left(H \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \varphi\left(H \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \varphi\left(H \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

Így $\mathcal{M}_\varphi$ σ-algebra, így $(X, \mathcal{M}_\varphi, \varphi_{|\mathcal{M}_\varphi})$ triviálisan mértéktér. Ha $\varphi(A) = 0$, akkor $A \in \mathcal{M}_\varphi$, így φ monotonitása miatt $\varphi_{|\mathcal{M}_\varphi}$ teljes.

1.39. definíció (félgyűrű)**.** X alaphalmaz esetén $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ félgyűrű, ha zárt a metszetre, és $A, B \in \mathcal{A}$ esetén létezik $n \in \mathbb{N}$ és $H_1, H_2 ... H_n \in \mathcal{A}$ páronként diszjunktak, hogy

$$A \backslash B = \bigcup_{k=1}^{n} H_k$$

1.40. *példa.* $\mathbb{R}^p$-ben a balról nyílt, jobbról zárt intervallumok szorzataként előálló téglák félgyűrűt alkotnak.

1.41. *megjegyzés.* $\mathcal{J}$ félgyűrű.

1.42. tétel. *Ha X tetszőleges alaphalmaz, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ félgyűrű, α additív relatív külső mérték $\mathcal{A}$-n, akkor $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_{\varphi_\alpha}$ és α φ_α megszorítása $\mathcal{A}$-ra.*

Bizonyítás. φ_α definíciójából egyenesen következik, hogy α φ_α megszorítása.
Legyen $A \in \mathcal{A}$, $H \in X$. Ha $\varphi_\alpha(H) = \infty$, akkor $\varphi_\alpha(H) \geqslant \varphi_\alpha(H \cap A) + \varphi_\alpha(H \backslash A)$ triviálisan teljesül, tehát $H \in \mathcal{M}_{\varphi_\alpha}$.
Tegyük fel, hogy $\varphi_\alpha(H)$ véges, ekkor létezik $A_1, A_2 ... \in \mathcal{A}$, hogy

$$H \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \ \varphi_\alpha(H) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(A_n)$$

Ekkor, mivel $\mathcal{A}$ zárt a metszetképzésre,

$$\varphi_\alpha(H \cap A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(A_k \cap A)$$

Legyen $k \in \mathbb{N}$ adott, és $n_k \in \mathbb{N}$, $B_1^k, B_2^k ... B_{n_k}^k$ olyanok, hogy $i \neq j$ esetén $B_i^k \cap B_j^k = \emptyset$ és

$$A_k \backslash A = \bigcup_{i=1}^{n_k} B_i^k$$

Ekkor α additivitását használva

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha(A_k \cap A) + \sum_{i=1}^{n_k} \alpha(B_i^k)\right) \geqslant \varphi_\alpha(H \cap A) + \varphi_\alpha(H \backslash A)$$

Mivel ez igaz H tetszőleges fedésére, φ_α definíciója miatt $H \in \mathcal{M}_{\varphi_\alpha}$, tehát $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_{\varphi_\alpha}$.

1.43. definíció (σ-végesség)**.** X tetszőleges alaphalmaz, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\alpha : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ relatív külső mérték esetén $H \subseteq X$ σ-véges α szerint, ha létezik $A_1, A_2 ... \in \mathcal{A}$, hogy minden k-ra $\alpha(A_k)$ véges, és

$$H \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

$(X, \mathcal{A}, \alpha)$ σ-véges mértéktér, ha X σ-véges α szerint.

1.44. *megjegyzés.* $\mathbb{R}^p$ σ-véges: előáll például a racionális gömbök uniójaként, amelyek mindegyike véges mértékű.

1.45. tétel. *X tetszőleges alaphalmaz, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ félgyűrű, $\alpha : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ σ-véges relatív külső mérték esetén ha $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_{\varphi_\alpha}$, $\mu_{|\mathcal{A}} = \alpha$, akkor μ φ_α megszorítása.*

Bizonyítás. Mivel X σ-véges, létezik $A_1, A_2 ... \in \mathcal{A}$, hogy minden k-ra $\alpha(A_k)$ véges és

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = X$$

Legyen

$$B_k = A_k \backslash \bigcup_{n=1}^{k-1} A_n$$

Ekkor indukcióval könnyen látható, hogy minden B_k felbomlik véges sok $\mathcal{A}$-beli halmaz diszjunkt uniójára, így léteznek $C_1, C_2 ... \in \mathcal{A}$ véges mértékű diszjunkt halmazok, amelyek particionálják X-et. Legyen $E \in \mathcal{M}$. Ekkor

$$\varphi_\alpha(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(A_k) : A_k \in \mathcal{A}, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supseteq E \right\}$$

Így μ monotonitása miatt

$$\mu(E) \leqslant \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(A_k)$$

Így $\mu(E) \leqslant \varphi_\alpha(E)$. Ekkor, mivel $H \in \mathcal{M}_{\varphi_\alpha}$,

$$\mu(C_k) = \mu(C_k \cap H) + \mu(C_k \backslash H) \leqslant \varphi_\alpha(C_k \cap H) + \varphi_\alpha(C_k \backslash H) = \varphi_\alpha(C_k) = \alpha(C_k)$$

Mivel α μ megszorítása, mindenhol egyenlőség áll fenn, így $\mu(H \cap C_k) = \varphi_\alpha(H \cap C_k)$. Ekkor

$$\mu(H) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(H \cap C_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_\alpha(H \cap C_k) = \varphi_\alpha(H)$$

1.46. következmény (Carathéodory kiterjesztési tétele)**.** *Ha X tetszőleges alaphalmaz, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ félgyűrű, α additív relatív külső mérték $\mathcal{A}$-n, akkor α kiterjeszthető az $\mathcal{A}$ által generált σ-algebrán mértékké, és ha X σ-véges, akkor ez a kiterjesztés egyértelmű.*

2. Lebesgue-féle külső mérték

2.1. tétel. *Nem létezik $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \bar{\mathbb{R}}$ nemnegatív eltolásinvariáns σ-additív függvény, amely az egységkockán véges nemnulla értéket vesz fel.*

Bizonyítás.[Vitali-konstrukció] Tegyük fel, hogy μ ilyen függvény. Legyen $H \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]^n$ olyan halmaz, amely $\mathbb{R}^n/\mathbb{Q}^n$-beli mellékosztályból pontosan egy elemet tartalmaz. $p, q \in \mathbb{Q}^n$, $p \neq q$ esetén $p + H$ és $q + H$ diszjunkt, és az eltolásinvariancia miatt $\mu(p + H) = \mu(q + H) = \mu(H)$. Legyen $Q = \mathbb{Q}^n \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]^n$. Ekkor a σ-additivitás miatt

$$\mu\left(\bigcup_{q\in Q} q + H\right) = \sum_{q\in Q} \mu(q + H)$$

Mivel μ nemnegatív, monoton. Így a bal oldal véges, mert az unió része $[0, 1]^n$-nek. Így a jobb oldal miatt $\mu(H) = 0$. Másrészt

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}^n} q + H$$

$[0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ pozitív, így $\mathbb{R}^n$ nemnulla. Ez ellentmondás, így nincs ilyen μ.

2.2. Állítás. *$A \in \mathbb{R}^p$ esetén*

$$\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} t(B_k) : B_k \in \mathcal{J}, A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right\} = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{p} b_n^k - a_n^k : A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{p}\left[a_n^k, b_n^k\right]\right\}$$

Bizonyítás. A bal oldal triviálisan felülről becsli a jobb oldalt, mert egy bővebb halmaz infímumáról van szó. A másik irányú egyenlőtlenség következik abból, hogy minden mérhető halmaz tetszőlegesen jól (például $\frac{1}{n^2}$ pontossággal) közelíthető téglákkal.

2.3. definíció (Lebesgue-féle külső mérték)**.** $A \in \mathbb{R}^p$ Lebesgue-féle külső mértéke a fenti állításbeli két mennyiség bármelyike. (Jelölés: $\bar{\lambda}(A)$.)

2.4. Állítás. *$\bar{\lambda}$ külső mérték $\mathbb{R}^p$-n.*

Bizonyítás. A definícióból triviális.

2.5. következmény. *$\bar{\lambda}$ monoton és végesen szubadditív.*

2.6. definíció (Lebesgue-mérhető halmaz)**.** $A \in \mathbb{R}^p$ Lebesgue-mérhető, ha mérhető $\bar{\lambda}$ szerint. A Lebesgue mérhető halmazok halmaza $\mathcal{L}$, $\lambda = \bar{\lambda}_{|\mathcal{L}}$ a Lebesgue-mérték.

2.7. *megjegyzés.* A külső mérték megszorításáról szóló tétel miatt $(\mathbb{R}^p, \mathcal{L}, \lambda)$ teljes.

2.8. Állítás. *$A \in \mathbb{R}^p$ esetén $\bar{\lambda}(A) \leqslant k(A)$, ahol k a Jordan-féle külső mérték, és ha A kompakt, akkor egyenlőség áll fenn.*

Bizonyítás. $k(A)$ definíció szerint egy szűkebb halmaz infímuma. Ha A kompakt, akkor minden nyílt fedéséből kiválasztható véges részfedés, így az $\bar{\lambda}(A)$ által meghatározott infímumhoz véges fedésekkel is közelíthetünk.

2.9. Állítás. *$\bar{\lambda}_{|\mathcal{J}} = t$.*

Bizonyítás. A definícióból és a monotonitásból triviális.

2.10. Állítás. *$\bar{\lambda}$ egybevágóságinvariáns.*

Bizonyítás. t egybevágóságinvarianciájából triviális.

2.11. Állítás. *Minden pozitív mértékű Lebesgue-mérhető halmaznak van nem mérhető részhalmaza.*

Bizonyítás. Legyen $A \in \mathcal{L}$ pozitív mértékű. Feltehető, hogy A korlátos, mert ha A-nak minden korlátos részhalmaza nullmértékű, akkor minden n-re $B(0,n) \cap A$ is, így a mérték folytonossága miatt $\lambda(A \cap \mathbb{R}^p) = \lambda(A) = 0$. Így A-nak van pozitív mértékű korlátos részhalmaza. Legyen $V \subset A$ olyan, hogy $\mathbb{R}^p$ minden $\mathbb{Q}^p$ szerinti mellékosztályából legfeljebb egy elemet tartalmaz, és akkor nem tartalmaz belőle elemet, ha A diszjunkt attól a mellékosztálytól. Ekkor létezik $\mathbb{Q}^p$-nek olyan korlátos Q részhalmaza, hogy $V+Q$ lefedi A-t és Q végtelen. Ekkor ha V mérhető, akkor vagy $\lambda(V+Q) = \infty$, ami nem lehet, mert korlátos halmazok összege korlátos, és λ monotonitása miatt minden korlátos halmaz véges mértékű, vagy $\lambda(V+Q) = 0$, amiből $\lambda(A) = 0$, ami szintén nem lehet. Így $V \notin \mathcal{L}$.

2.12. következmény. *$H \in \mathcal{L}$ pontosan akkor nullmértékű, ha minden részhalmaza mérhető.*

2.13. Állítás. $|\mathcal{B}| = \mathfrak{c}$.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{B}_0$ az $\mathbb{R}^p$-beli nyíltak halmaza, és minden $\alpha > 0$ rendszámra legyen

$$\mathcal{B}_\alpha = \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{\beta_k} : B_{\beta_k} \in \mathcal{B}_{\beta_k}, \beta_k < \alpha \right\} \cup \{\mathbb{R}^p \setminus B : B \in \mathcal{B}_\beta, \beta < \alpha\}$$

$|\mathcal{B}_0| = \mathfrak{c}$. Tegyük fel, hogy $\beta < \alpha$ esetén $|\mathcal{B}_\beta| = \mathfrak{c}$. Ekkor ha $|\alpha| \leqslant \mathfrak{c}$,

$$|\mathcal{B}_\alpha| \leqslant \left| \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{B}_\beta \right|^{\aleph_0} \leqslant (|\alpha| \cdot \mathfrak{c})^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

Legyen $B \in \mathcal{B}_{\omega_1}$. Tegyük fel, hogy létezik $\kappa < \omega_1$ és $B_\kappa \in \mathcal{B}_\kappa$, hogy $B = \mathbb{R}^p \setminus B_\kappa$. Ekkor $\mathbb{R}^p \setminus B \in \mathcal{B}_\kappa$, tehát $\mathbb{R}^p \setminus B \in \mathcal{B}_{\omega_1}$.
Tegyük fel, hogy léteznek $B_{\kappa_0}, B_{\kappa_1}...$ halmazok, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén κ_n megszámlálható, és $B_{\kappa_n} \in \mathcal{B}_{\kappa_n}$, és

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{\kappa_n}$$

Legyen $\kappa = \sup\{\kappa_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ekkor κ megszámlálható, mivel

$$|\kappa| = \left| \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \kappa_n \right| \leqslant \aleph_0 \cdot |\kappa_n| = \aleph_0$$

(Neumann-rendszámokkal dolgozva.)
Ekkor $B \in \mathcal{B}_{\kappa+1}$. Ezzel tehát beláttuk, hogy ha $B \in \mathcal{B}_{\omega_1}$, akkor létezik $\kappa < \omega_1$, hogy $B \in \mathcal{B}_\kappa$.
Így ha $B_0, B_1... \in \mathcal{B}_{\omega_1}$, akkor létezik $\kappa_0, \kappa_1... < \omega_1$, hogy $n \in \mathbb{N}$ esetén $B_n \in \mathcal{B}_{\kappa_n}$, és létezik ha $\kappa = \sup\{\kappa_n : n \in \mathbb{N}\}$, akkor $\bigcup\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{B}_{\kappa+1}$. Tehát $\mathcal{B}_{\omega_1}$ zárt a komplementerképzésre és a megszámlálható unióra, tehát σ-algebra. $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_{\omega_1}$, így $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_{\omega_1}$. Mivel $\omega_1 \leqslant \mathfrak{c}$, $|\mathcal{B}_{\omega_1}| = \mathfrak{c}$.

2.14. *megjegyzés.* A bizonyítás gondolatmenetéből látszik, hogy $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\omega_1}$.

2.15. Állítás. $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{L}$.

Bizonyítás. A racionális nyílt téglák triviálisan mérhetőek, és megszámlálható bázist alkotnak $\mathbb{R}^p$-ben, így minden nyílt mérhető. Mivel $\mathcal{B}$ a legszűkebb σ-algebra, amely tartalmaz minden nyíltat, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}$.
Legyen C a Cantor-halmaz. Ekkor $t(C) = 0$, így C Lebesgue-nullmértékű. Mivel λ teljes, $\mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{L}$. $|C| = \mathfrak{c}$, $|\mathcal{P}(C)| = 2^{\mathfrak{c}} = |\mathcal{P}(\mathbb{R}^p)|$, így $|\mathcal{L}| = 2^{\mathfrak{c}}$. Mivel $|\mathcal{B}| = \mathfrak{c}$, $\mathcal{B} \neq \mathcal{L}$.

2.16. Állítás. *λ az egyetlen* ***1.*** *kiterjesztése t-nek $\mathcal{B}$-re,* ***2.*** *az egyetlen normált, eltolásinvariáns mérték $\mathcal{B}$-n, illetve* ***3.*** *az egyetlen μ mérték, amelyre tetszőleges $a_1 < b_1, a_2 < b_2 ... a_p < b_p$ esetén*

$$\mu\left(\prod_{k=1}^{p}[a_k, b_k]\right) = \prod_{k=1}^{p} b_k - a_k$$

Bizonyítás. Az alábbi feltételek t-re teljesülnek $\mathcal{J}$-n, így Carathéodory kiterjesztési tétele miatt λ-ra is $\mathcal{B}$-n, és $\mathbb{R}^p$ σ-végessége miatt a kiterjesztés egyértelmű.

3. Lebesgue–Stieltjes-mérték. Lokálisan véges Borel mértékek regularitása

3.1. definíció (Borel-mértéktér)**.** (X, Ω) Hausdorff-tér esetén $(X, \mathcal{M}, \mu)$ Borel-mértéktér, ha $\Omega \subseteq \mathcal{M}$.

3.2. definíció (lokálisan véges tér)**.** Egy X lokálisan véges, ha adott rajta egy $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér és egy (X, Ω) topológiastruktúra, és minden pontnak van véges környezete.

3.3. definíció (lokálisan kompakt tér)**.** Egy (X, Ω) topologikus tér lokálisan kompakt, ha minden $x \in X$ esetén létezik U nyílt és K kompakt, hogy $x \in U$ és $U \subseteq K$.

3.4. Állítás. *Egy $(X, \mathcal{M}, \mu)$ lokálisan kompakt Borel-mértéktér pontosan akkor lokálisan véges, ha minden kompakt részhalmaza véges mértékű.*

Bizonyítás. Mivel X Hausdorff-tér, minden kompakt részhalmaza zárt, tehát mérhető.
Tegyük fel, hogy $(X, \mathcal{M}, \mu)$ lokálisan véges, és legyen K kompakt. Ekkor minden $x \in K$ esetén választható x-nek egy U_x véges mértékű környezete. $\{U_x : x \in K\}$ nyilván fedése K-nak így kiválasztható belőle véges részfedés. Ekkor K fedhető véges sok véges mértékű halmazzal, tehát véges mértékű.
Tegyük fel, hogy minden kompakt halmaz véges mértékű, és legyen $x \in X$. Ekkor létezik x-nek U nyílt környezete és K kompakt halmaz, hogy $U \subset K$. Mivel $\mu(K)$ véges és $U \in \mathcal{M}$, $\mu(U)$ létezik és véges.

Lebesgue-Stieltjes-mérték a számegyenesen

3.5. Állítás. *$G \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum (megengedve ∞ vagy $-\infty$ végpontot is), $\mathcal{A} = \{[a, b) : a, b \in G, a \leqslant b\}$ esetén (az $[a, a) = \emptyset$ definícióval élve) egy $\alpha : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ függvény pontosan akkor additív, ha létezik $F : G \to \mathbb{R}$, hogy $\alpha\big([a, b)\big) = F(b) - F(a)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik ilyen F. Ekkor α triviálisan additív.
Most tegyük fel, hogy α additív, és legyen $x_0 \in G$ tetszőlges. Legyen $F(x_0) = 0$, $x < x_0$ esetén $F(x) = -\alpha\big([x, x_0)\big)$ és $x > x_0$ esetén $F(x) = \alpha\big([x_0, x)\big)$.

3.6. Állítás. *$G \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $\mathcal{A} = \{[a, b) : a, b \in G, a < b\}$, $\alpha : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ additív függvény és $F : G \to \mathbb{R}$ esetén, ahol $\alpha\big([a, b)\big) = F(b) - F(a)$,* ***1.*** *$F$ monoton nő és* ***2.*** *ha μ lokálisan véges Borel-mérték és $\alpha = \mu_{|\mathcal{A}}$, akkor F balról folytonos.*

Bizonyítás. 1. triviális. **2.**

$$F(b) - F(a) = \mu\big([a, b)\big) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a, b - \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} F\left(b - \frac{1}{n}\right) - F(a)$$

3.7. *megjegyzés.* A mérték folytonossága miatt

$$\mu\big((a,b)\big) = F(b) - \lim_{x\to a+} F(x)$$

$$\mu\big([a,b]\big) = \lim_{y\to b+} F(y) - F(a)$$

$$\mu\big((a,b]\big) = \lim_{y\to b+} F(y) - \lim_{x\to a+} F(x)$$

3.8. tétel. *Legyen $G \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $F : G \to \mathbb{R}$ monoton növő, S F folytonossági pontjainak a halmaza, $\mathcal{A} = \{[a,b) \subseteq G : a,b \in S\}$, $\alpha : \mathcal{A} \to \mathbb{R}, [a,b) \mapsto F(b) - F(a)$. Ekkor α relatív külső mérték.*

Bizonyítás. Mivel F monoton, $G \backslash S$ megszámlálható, így S sűrű. Legyen $a, b, c_1, d_1, c_2, d_2 ... \in S$ olyan, hogy

$$[a,b) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [c_n, d_n)$$

Legyen $\varepsilon > 0$. Mivel S sűrű, létezik $b_\varepsilon \in S$, hogy $0 < F(b) - F(b_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$, és minden n-re létezik $c_{n_\varepsilon} \in S$, hogy $0 < F(c_n) - F(c_{n_\varepsilon}) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Ekkor

$$[a, b_\varepsilon] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (c_{n_\varepsilon}, d_n)$$

Mivel $[a, b_\varepsilon]$ kompakt, létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$[a, b_\varepsilon) \subset [a, b_\varepsilon] \subset \bigcup_{n=1}^{N} (c_{n_\varepsilon}, d_n) \subset \bigcup_{n=1}^{N} [c_{n_\varepsilon}, d_n)$$

Az így megkapott c_{n_ε} és d_n osztópontok által meghatározott intervallumok véges sok diszjunkt részre bontják $[a, b_\varepsilon)$-t. α-ról tudjuk, hogy additív és nemnegatív, így

$$\alpha\big([a, b_\varepsilon)\big) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \alpha\big([c_{n_\varepsilon}, d_n)\big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \alpha\big([c_{n_\varepsilon}, d_n)\big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \alpha\big([c_n, d_n)\big) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Így

$$\alpha\big([a,b)\big) < \alpha\big([a, b_\varepsilon)\big) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \alpha\big([c_n, d_n)\big) + \varepsilon$$

Tehát α σ-szubadditív, így relatív külső mérték.

3.9. *megjegyzés.* G σ-véges α szerint, így α-nak létezik egyértelmű kiterjesztése $\mathcal{B}_{|G}$-re.

3.10. definíció (Lebesgue–Stieltjes-mérték)**.** $G \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $F : G \to \mathbb{R}$ monoton növő, S F folytonossági pontjainak a halmaza, $\mathcal{A} = \{[a,b) \subseteq G : a,b \in S\}$, $\alpha : \mathcal{A} \to \mathbb{R}, [a,b) \mapsto F(b) - F(a)$ esetén φ_α az F által indukált Lebesgue–Stieltjes-külsőmérték. A φ_α által indukált mérték az F által indukált Lebesgue–Stieltjes-mérték.

3.11. *megjegyzés.* A fenti definíció triviálisan kiterjeszthető $\mathbb{R}^p$-re és minden változójában monoton növő F-re.

3.12. *megjegyzés.* A fentiek alapján tetszőleges monoton növő függvény generál $\mathbb{R}$-en egy lokálisan véges Borel-mértéket.

3.13. *megjegyzés.* Mivel tetszőleges lokálisan véges Borel-mérték additív, minden ilyen mérték előáll mint egy monoton növő függvény által indukált Lebesgue–Stieltjes-mérték.

3.1. Lokálisan véges Borel mértékek regularitása, Lebesgue-Stieltjes mérték $\mathbb{R}^p$-ben (még normális előadás utólag letitsztázva)

Legyen μ_0 lokálisan véges Borel mérték $\mathbb{R}^p$-n, azaz $\mathbb{R}^p$ Borel halmazain értelmezett mérték, mely minden kompakt (így minden korlátos) halmazon véges. Álljon $\mathcal{A}$ a balról zárt, jobbról nyílt $\mathbb{R}^p$-beli téglákból, azaz legyen

$$\mathcal{A} = \{[a_1, b_1) \times \ldots \times [a_p, b_p)\}.$$

Ekkor $\mathcal{A}$ félgyűrű, $\alpha = \mu_0|_{\mathcal{A}}$ σ-véges, additív relatív külső mérték $\mathcal{A}$-n, így a kiterjesztési tétel szerint az α-hoz asszociált φ_α külső mérték a μ_0 Borel mérték kiterjtesztése lesz.

Az így megkapható φ_α külső mértékek a *Lebesgue-Stieltjes féle külső mérték*ek, a φ_α szerint mérhető halmazokra megszorítva kapjuk a *Lebesgue-Stieltjes féle mérték*eket illetve a *Lebesgue-Stieltjes féle mértékter*eket.

A fenti definíció alapján minden lokálisan véges Borel mérték egy Lebesgue-Stieltjes mérték megszorítása a Borel halmazokra. Bár $\mathbb{R}$-en máshogy definiáltuk a Lebesgue-Stieltjes féle mértéket, de ott is beláttuk ezt a megfeleltetést a lokálisan véges Borel mértékekkel, ezért a két definíció ugyanazt adja. Lehet és szokás $p > 1$ esetén is eloszlásfüggvénnyel vagy additív téglafüggvénnyel definiálni a Lebesgue-Stieltjes féle mértéket.

Az alábbi tétel ezen mértékek regularitási tulajdonságait adja.

Tétel. *Tetszőleges $(\mathbb{R}^p, \mathcal{M}, \mu)$ Lebesgue-Stieltjes féle mértéktérre a következők teljesülnek.*

(0) *A mértéktér teljes.*

(1) *Bármely $E \in \mathcal{M}$ halmazhoz és $\varepsilon > 0$-hoz vannak olyan G nyílt és F zárt halmazok, melyekre $F \subset E \subset G$ és $\mu(G \backslash F) < \varepsilon$.*

(2) *Tetszőleges $E \in \mathcal{M}$ halmazra*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(G) : E \subset G \text{ nyílt}\} = \sup\{\mu(K) : K \subset E \text{ kompakt}\}.$$

(3) *Bármely $E \in \mathcal{M}$ halmazhoz vannak olyan A F_σ és B G_δ halmazok, melyekre $A \subset E \subset B$ és $\mu(B \backslash A) = 0$.*

(4)

$$\mathcal{M} = \{A \cup N : A\ F_\sigma, \mu(N) = 0\} = \{B \backslash N : B\ G_\delta, \mu(N) = 0\} =$$
$$= \{A \cup N : A \text{ Borel}, \mu(N) = 0\} = \{B \backslash N : B \text{ Borel}, \mu(N) = 0\}.$$

Megjegyzés. A (2) tulajdonsággal rendelkező (Boreleket tartalmazó σ-algebrán értelmezett) mértékeket hívjuk *reguláris*nak.

Bizonyítás.

(0) Ez világos a mérhetők jól kettévágós definíciójából.

(1) Először azt látjuk be, hogy van olyan $G \supset E$ nyílt halmaz, amelyre $\mu(G \backslash E) < \varepsilon/2$. Mivel a korlátos halmazok véges mértékűek, ezért felbontható E megszámlálhatóan sok véges mértékű E_n uniójára. Ha minden E_n-hez találunk $G_n \supset E_n$ nyíltat, melyre $\mu(G_n \backslash E_n) < \varepsilon/2^{n+1}$, akkor $G = \cup_n G_n$ jó lesz. Tehát a továbbiakban feltehetjük, hogy $\mu(E) < \infty$.

Mivel definíció szerint μ az $\mathcal{A}$-ra vett megszorításához asszociált külső mérték megszorítása $\mathcal{M}$-re, ezért

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(T_i) : E \subset \cup_i T_i, T_i \in \mathcal{A}\right\}.$$

Vegyük észre, hogy minden $\mathcal{A}$-beli $T = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_p, b_p)$ tégla előáll egymásba skatulyázott $(a_1 - 1/n, b_1) \times \ldots \times (a_p - 1/n, b_p)$ nyílt téglák metszeteként. Mivel ezek véges μ mértékű halmazok, ezért a μ mértékük tart $\mu(T)$-hez. Emiatt, a fenti képlet és $\mu(E) < \infty$ miatt vannak olyan T_i' nyílt téglák, melyekre $E \subset \cup_i T_i'$ és $\sum_i \mu(T_i') < \mu(E) + \varepsilon$. Ekkor $G = \cup_i T'$ olyan nyílt halmaz, melyre $\mu(G \setminus E) < \varepsilon/2$.

Az eddig belátottak szerint E komplementerét nyílttal fedve, majd annak komplementerét véve kapunk megfelelő F-et.

(2) Az infimumra vonatkozó állítás $\leqslant$ része világos a monotonitás miatt, $\geqslant$ pedig (1)-ből következik. A szuprémumra vonatkozó állításból a $\geqslant$ világos, a $\leqslant$ kompakt helyett elsőre zártra következik (1)-ből. Viszont R^p-ben minden zárt halmaz kompaktak felszálló uniója, így a mértékek folytonossága miatt a zárt halmazok kompakt halmazokkal belülről tetszőlegesen jól közelíthetőek μ szerint.

(3) Következik (1)-et $\varepsilon = 1/n$-re alkalmazva.

(4) Az, hogy $\mathcal{M}$ része ezeknek a halmazrendszereknek, következik (3)-ból, a másik irány pedig abból, hogy $\mathcal{M}$ tartalmazza a Boreleket és σ-algebra.

Speciális eset. *A fenti (0)-(4) állítások igazak a Lebesgue mértékre ($\mathcal{M} = \mathcal{L}, \mu = \lambda$-ra).*

Következmény. *Tetszőleges lokálisan véges Borel mértékre igazak a fenti (1)-(4) állítások ($\mathcal{M} = \mathcal{B}$-re).*

Megjegyzések.

1. Ebben a következményben a lokális végesség nem hagyható el, ezt mutatja például a számosságmérték.

2. A Tétel (4)-es állítása azt adja, hogy a Lebesgue-Stieltjes féle mértékek épp a lokálisan véges Borel mértékek teljessé tételével adódó mértékek.

4. Mérhető függvények

4.1. definíció (mérhető függvény)**.** $(X, \mathcal{M})$ mérhető tér és (Y, Ω) topologikus tér esetén $f : X \to Y$ mérhető, ha minden G nyíltra $f^{-1}(G) \in \mathcal{M}$.

4.2. definíció (Borel-függvény)**.** Egy $f : X \to Y$ mérhető függvény Borel-függvény, ha az X mérhető struktúráját megadó σ-algebra X Borel-halmazainak a rendszere.

4.3. *megjegyzés.* Minden mérhető téren értelmezett folytonos függvény Borel-függvény.

4.4. Állítás. *Ha $f : X \to Y$ mérhető, $g : Y \to Z$ folytonos, akkor $g \circ f$ mérhető.*

Bizonyítás. Triviális.

4.5. Állítás. *Ha $(X, \mathcal{M})$ mértéktér, (Y, Ω) topologikus tér, $u, v : X \to \mathbb{R}$ mérhetőek és $\Phi : \mathbb{R}^2 \to Y$ folytonos, akkor $h : x \mapsto \Phi\big(u(x), v(x)\big)$ mérhető.*

Bizonyítás. Legyen $g : x \mapsto \big(u(x), v(x)\big)$. Ekkor ha g mérhető, akkor az előző állítás szerint $h = \Phi \circ g$ is mérhető.
Legyen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $G = (a, b) \times (c, d)$. Ekkor $g^{-1}(G) = u^{-1}\big((a, b)\big) \cap v^{-1}\big((c, d)\big)$, ez két mérhető metszete. Ha $G \subseteq \mathbb{R}^2$ tetszőleges nyílt, akkor előáll, mint megszámlálható sok nyílt tégla uniója, amelyek őrképe külön-külön mérhető, így az uniójuk is. Tehát g mérhető, így h is mérhető.

4.6. lemma. *Legyen $(X, \mathcal{M})$ mérhető tér, (Y, Ω) topologikus tér, $f : X \to Y$ mérhető. Legyen $\mathcal{N} = \{A \subseteq Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{M}\}$ esetén $(Y, \mathcal{N})$ mérhető tér.*

Bizonyítás. $\mathcal{N}$-re triviálisan ellenőrizhető a σ-algebrák összes tulajdonsága.

4.7. következmény. *Borel-halmaz mérhető függvénynél vett ősképe mérhető.*

4.8. definíció. f kiterjesztett valós értékű függvény esetén $f^+ : x \mapsto \max\big(f(x), 0\big)$, $f^- : x \mapsto \max\big(-f(x), 0\big)$.

4.9. *megjegyzés.* $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$.

4.10. definíció ($\mathcal{M}$–$\mathcal{N}$-mérhető függvény)**.** $(X, \mathcal{M})$ és $(Y, \mathcal{N})$ mérhető terek esetén $f : X \to Y$ $\mathcal{M}$–$\mathcal{N}$-mérhető, ha $H \in \mathcal{N}$ esetén $f^{-1}(H) \in \mathcal{M}$.

4.11. Állítás. *Ha $(X, \mathcal{M})$ mérhető tér, akkor egy $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ függvény pontosan akkor mérhető, ha minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $f^{-1}\big((c, \infty]\big) \in \mathcal{M}$.*

Bizonyítás. $c \in \mathbb{R}$ esetén $(c, \infty]$ Borel-halmaz $\bar{\mathbb{R}}$-ban, így ha f mérhető, akkor $f^{-1}\big((c, \infty]\big)$ mérhető.
Tegyük fel, hogy tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén $f^{-1}\big((c, \infty]\big)$ mérhető. Ekkor $a < b$ esetén $(a, \infty] \backslash (b, \infty] = (a, b]$, az ilyen alakú halmazok által generált σ-algebra pedig pont a Borel-halmazok rendszere lesz. Az általuk generált σ-algebra minden elemének az ősképe triviálisan mérhető, tehát f mérhető.

4.12. Állítás. *Ha $f : X \to Y$ mérhető, $g : Y \to Z$ Borel-függvény, akkor $g \circ f$ mérhető.*

Bizonyítás. Triviális.

4.13. Állítás. *Ha $(X, \mathcal{M})$ mérhető tér, $f_1, f_2 ... : X \to \bar{\mathbb{R}}$ mérhető függvények, akkor **1.** $\sup(f_n)$, **2.** $\inf(f_n)$, **3.** $\limsup(f_n)$, **4.** $\liminf(f_n)$ mérhetőek.*

Bizonyítás. 1. $\big(\sup(f_n)\big)^{-1}\big((c, \infty]\big)$ elemei X-nek pont azon x pontjai, amelyekre $f_n(x) > c$ valamely n-re. Így

$$\big(\sup(f_n)\big)^{-1}\big((c, \infty]\big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}\big((c, \infty]\big)$$

Ez mérhető halmazok megszámlálható uniója, így mérhető.
$\inf$, $\liminf$ és $\limsup$ triviálisan következik ebből.

4.14. következmény. ***1.*** *Mérhető $X \to \bar{\mathbb{R}}$ függvények pontonkénti határértéke mérhető, ha létezik.* ***2.*** *Ha $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ mérhető, akkor $\min(f, g)$, $\max(f, g)$ mérhető.* ***3.*** *Ha $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ mérhető, akkor f^+, f^- mérhető.*

4.15. Állítás. *$(X, \mathcal{M})$ mérhető tér esetén $E \subseteq X$ pontosan akkor mérhető, ha χ_E mérhető.*

Bizonyítás. Tetszőleges $G \subseteq \mathbb{R}$ esetén $\chi_E^{-1}(G)$ X, $\emptyset$, E és $X \backslash E$ valamelyike. Ha E mérhető, akkor ezek mindegyike mérhető.
$E = \chi_E^{-1}(1)$, $\{1\}$ Borel-halmaz, így ha χ_E mérhető, akkor E is mérhető.

4.16. definíció (egyszerű függvény)**.** Egy kiterjesztett valós értékű függvény egyszerű, ha a képhalmaza véges.

4.17. Állítás. *$f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ pontosan akkor egyszerű, ha létezik $n \in \mathbb{N}$, $A_1, A_2 ... A_n \subseteq X$ páronként diszjunkt halmazok és $c_1, c_2 ... c_n \in \bar{\mathbb{R}}$ páronként különböző számok, hogy*

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k}$$

Bizonyítás. Ha f felírható a fenti alakban, akkor triviálisan egyszerű. Ha f egyszerű, akkor létezik $c_1, c_2 ... c_k$ véges értékkészlete, $A_k = f^{-1}(c_k)$ megfelelő.

4.18. *megjegyzés.* Ha megköveteljük, hogy az A_k halmazok particionálják X-et, akkor a fenti felírás egyértelmű.

4.19. lemma. *Ha $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, $f : X \to [0, \infty]$ mérhető, akkor* ***1.*** *léteznek $e_1 \leqslant e_2 \leqslant e_3 \leqslant ...$ nemnegatív egyszerű mérhető függvények, hogy $e_n \to f$,* ***2.*** *ha f korlátos, akkor az (e_n) sorozat választható úgy, hogy egyenletesen tartson f-hez, és* ***3.*** *ha $f(X) \subseteq [0, 1)$, akkor létezik $E_1, E_2 ... \in \mathcal{M}$, hogy*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \chi_{E_n}$$

Bizonyítás. 1., 2. $f(x) < n$, $k \in \mathbb{N}$, $\frac{k}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{2^n}$ esetén legyen $e_n(x) = \frac{k}{2^n}$, $f(x) \geqslant n$ esetén legyen $e_n(x) = n$. Ekkor e_n triviálisan egyszerű, létezik $\varepsilon > 0$, hogy $e_n^{-1}\left(\frac{k}{2^n}\right) = f^{-1}\left(B\left(\frac{k}{2^n}, \varepsilon\right)\right)$, így e_n mérhető. $e_n \leqslant e_{n+1}$ triviális.
$n > f(x)$ esetén $|e_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^n}$, így $e_n \to f$, és ha f korlátos, akkor n helyett választható egy N konstans is, így ekkor $e_n \to f$ egyenletesen.
3. E_n legyen azon x-ek halmaza, amelyekre $f(x)$ n. bináris jegye 1. (Ha $f(x)$ többféleképpen is felírható, válasszuk azt az alakot, amelyikben nincsen végtelen sok 1-es.) Ekkor E_n balról zárt, jobbról nyílt intervallumok uniójának ősképe, így mérhető, és

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \chi_{E_n}$$

4.20. tétel (Luzin)**.** *Ha $(\mathbb{R}^p, \mathcal{M}, \mu)$ Lebesgue–Stieltjes-mérték, $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ mérhető és $\varepsilon > 0$, akkor létezik $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ folytonos, hogy $\mu\big(\{x \in \mathbb{R}^p : f(x) \neq g(x)\}\big) < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f korlátos, ekkor $f(\mathbb{R}^p) \subseteq [0, 1)$ nyilván feltehető, így a lemma szerint létezik $E_1, E_2 ... \in \mathcal{M}$, hogy

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \chi_{E_n}$$

μ regularitása miatt léteznek F_n zártak és G_n nyíltak, hogy $F_n \subseteq E_n \subseteq G_n$, és $\mu(G_n \backslash F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Ekkor az Uriszon-lemma miatt létezik $h_n : \mathbb{R}^p \to [0, 1]$ folytonos, amely F_n-en 1 és $\mathbb{R}^p \backslash G_n$-en 0. Legyen $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} h_n(x)$ $\frac{1}{2^n} h(x) \leqslant \frac{1}{2^n}$, így a Weierstraß-kritérium miatt g folytonos függvények egyenletes limesze, tehát g folytonos.

$$\{x \in \mathbb{R}^p : f(x) \neq g(x)\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \backslash F_n$$

Így $\mu\big(\{x \in \mathbb{R}^p : f(x) \neq g(x)\}\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
Most tegyük fel, hogy f nem korlátos. Legyen $T \subset \mathbb{R}^p$ tégla, $A_n = \{x \in T : |f(x)| > n\}$. Ekkor az A_n halmazok triviálisan mérhetőek, a metszetük üres, így a mértékük 0-hoz tart, tehát létezik n, hogy $\mu(A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor f-et A_n-en 0-ra változtatva a fentebb bizonyított eset szerint létezik ilyen g a T téglán.
$\mathbb{R}^p$-ben vehető megszámlálhatóan sok diszjunkt zárt tégla úgy, hogy legfeljebb $\frac{\varepsilon}{2}$ mértékű rész ne legyen lefedve. Ekkor minden ilyen T_k téglán vehető g_k függvény úgy, hogy a T_k-n legfeljebb egy $\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ méretű halmazon térjen el f-től. Legyen g^* az ezek által a g_k-k által meghatározott függvény, ekkor g^* egy zárt halmazon értelmezett folytonos függvény, így a Tietze-tétel szerint kiterjeszthető $\mathbb{R}^p$-re. Ez a kiterjesztés megfelelő g.

5. Integrálás

5.1. definíció (egyszerű függvény integrálja)**.** Legyen $f : X \to [0,\infty]$ egyszerű mérhető függvény, $A_1, A_2 ... A_n \subseteq X$ diszjunkt mérhetőek, $c_1, c_2 ... c_n \in \mathbb{R}$ páronként különbözük, hogy

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = X,\ f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k}$$

Ekkor ha $E \subseteq X$ mérhető, akkor

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k \cap E)$$

5.2. *megjegyzés.* A fenti definícióban $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$. Ha $E = X$, akkor az integráljel alól elhagyható a halmaz jelölése.

5.3. *megjegyzés.* Ha $\mu(E) = 0$, akkor tetszőleges egyszerű mérhető függvény integrálja E-n 0.

5.4. lemma. *$(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, $f : X \to \mathbb{R}$ nemnegatív egyszerű mérhető, akkor $(X, \mathcal{M}, \varphi)$ mértéktér, ahol*

$$\varphi(E) = \int_E f \mathrm{d}\mu$$

Bizonyítás. $\varphi(\emptyset) = 0$ triviális.
Legyen $A_1, A_2 ... A_n \in \mathcal{M}$ páronként diszjunktak, $c_1, c_2 ... c_n$ páronként különbözőek, hogy

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k}$$

Legyenek $E_1, E_2 ... \in \mathcal{M}$ diszjunktak, ekkor μ σ-additivitását használva

$$\varphi\left(\bigcup_{\ell=1}^{\infty} E_\ell\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu\left(A_k \cap \bigcup_{\ell=1}^{\infty} E_\ell\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{\infty} c_k \mu(A_k \cap E_\ell)$$

Mivel a külső összeg véges, a két szumma felcserélhető, így

$$\varphi\left(\bigcup_{\ell=1}^{\infty} E_\ell\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k \cap E_\ell) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \varphi(E_\ell)$$

5.5. lemma. *Ha $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, $f, g : X \to [0,\infty]$ egyszerű mérhető függvények, E mérhető, akkor*

$$\int_E f \mathrm{d}\mu + \int_E g \mathrm{d}\mu = \int_E f + g \mathrm{d}\mu$$

Ha $f \leqslant g$, akkor

$$\int_E f \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E g \mathrm{d}\mu$$

Bizonyítás. Triviális.

5.6. definíció (nemnegatív függvény integrálja)**.** Legyen $f : X \to [0, \infty]$ mérhető, $E \subseteq X$ mérhető, ekkor

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \sup \left\{ \int_E e \mathrm{d}\mu : e \leqslant f \text{ egyszerű} \right\}$$

5.7. *megjegyzés.* 1. A fenti definíció értelmes, mert a konstans 0 függvény egyszerű és minden nemnegatív függvényt alulról becsül, így az integrál egy nemüres halmaz szuprémuma.

2. Vegyük észre, hogy ugyan egyszerű függvények esetén most két definíció van, de ez a kettő egybeesik az előző lemma második fele miatt.

5.8. Állítás. *Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, $f, g : X \to [0, \infty)$ mérhetőek, A, B, E mérhető halmazok. Ekkor*
1. *ha $f \leqslant g$, $\int_E f \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E g \mathrm{d}\mu$,*
2. *ha $A \subseteq B$, $\int_A f \mathrm{d}\mu \leqslant \int_B g \mathrm{d}\mu$,*
3. *$0 \leqslant c < \infty$ esetén $\int_E c f \mathrm{d}\mu = c \cdot \int_E f \mathrm{d}\mu$,*
4. *ha $f_{|E} \equiv 0$, akkor $\int_E f \mathrm{d}\mu = 0$,*
5. *ha $\mu(E) = 0$, akkor $\int_E f \mathrm{d}\mu = 0$ és*
6. *$\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_X \chi_E f \mathrm{d}\mu$.*

Bizonyítás. Triviális.

5.9. tétel (monoton konvergencia-tétel)**.** *Ha $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \ldots$ nemnegatív mérhetőek X-en, $E \in \mathcal{M}$, akkor*

$$\int_E \lim_{n \to \infty} f_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu$$

(És mindkét határérték létezik.)

Bizonyítás. (f_n) triviálisan konvergens. Tegyük fel hogy $f_n \to f$, ekkor f nemnegatív mérhető függvény. A fenti állítás szerint az integrálálás monoton, így $\int_E f_n \mathrm{d}\mu$ is konvergens. Triviálisan

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E f \mathrm{d}\mu$$

Legyen $0 \leqslant e \leqslant f$ egyszerű mérhető, $0 < c < 1$. Legyen $E_n = \{x \in E : f_n(x) \geqslant c e(x)\}$. Ekkor E_n triviálisan mérhető, $E_n \subseteq E_{n+1}$, és tetszőleges $x \in E$ eleme valamelyik E_n-nek. Ekkor

$$\int_E f_n \mathrm{d}\mu \geqslant \int_{E_n} f_n \mathrm{d}\mu \geqslant \int_{E_n} c e \mathrm{d}\mu = c \cdot \int_{E_n} e \mathrm{d}\mu$$

Ekkor a mérték folytonossága miatt

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu \geqslant c \cdot \lim_{n \to \infty} \int_{E_n} e \mathrm{d}\mu = c \cdot \int_E e \mathrm{d}\mu$$

5.10. következmény. *Ha $f, g : X \to [0, \infty]$ mérhetők, $E \subseteq X$ mérhető, akkor*

$$\int_E f + g \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu + \int_E g \mathrm{d}\mu$$

Bizonyítás. Legyenek $(e_n), (d_n)$ egyszerű nemnegatív mérhetők, hogy $e_n \to f$, $d_n \to g$, $e_n \leqslant e_{n+1}$, $d_n \leqslant d_{n+1}$. Ekkor $\int_E e_n + d_n \mathrm{d}\mu = \int_E e_n \mathrm{d}\mu + \int_E d_n \mathrm{d}\mu$, innen a monoton konvergencia-tétel miatt látható.

5.11. tétel (Beppo Levi). *Legyenek $f_1, f_2 ... X \to [0,\infty]$ mérhetőek, $E \subseteq X$ mérhető, ekkor*

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu$$

Bizonyítás. Véges összegre a fenti következményből indukcióval következik, és a monoton konvergencia-tétel miatt vehető határérték.

5.12. következmény. *$a_{n,k} \geqslant 0$ esetén*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k}$$

Bizonyítás. Az állítás a Beppo Levi-tétel elmondva $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \xi)$-n, ahol ξ a számlálómérték.

5.13. lemma (Fatou). *Ha $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, $f_1, f_2 ... : X \to [0,\infty]$ mérhető függvények, akkor*

$$\int \liminf f_n \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf \int f_n \mathrm{d}\mu$$

Bizonyítás. Legyen $g_k = \inf\{f_n : n \geqslant k\}$. Ekkor

$$\liminf f_n = \lim_{k\to\infty} g_k, \ \lim_{k\to\infty} \int g_k \mathrm{d}\mu = \int \lim_{k\to\infty} g_k \mathrm{d}\mu = \int \liminf f_n \mathrm{d}\mu$$

$g_n \leqslant f_n$, mivel g_n egy f_n-t tartalmazó halmaz infímuma, így

$$\liminf \int g_n \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf \int f_n \mathrm{d}\mu$$

Mivel $\int g_n \mathrm{d}\mu$ konvergens, ebből következik a lemma állítása.

5.14. tétel. *Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, $f : X \to [0,\infty]$ mérhető, $\varphi : E \mapsto \int_E f \mathrm{d}\mu$. Ekkor **1.** $(X, \mathcal{M}, \varphi)$ mértéktér és **2.** ha $g : X \to [0,\infty]$ mérhető, akkor*

$$\int g \mathrm{d}\varphi = \int f \cdot g \mathrm{d}\mu$$

Bizonyítás. 1. $\varphi(\emptyset) = 0$ triviális.
Legyenek $E_1, E_2 ... \in \mathcal{M}$ páronként diszjunktak, és legyen az uniójuk E. Ekkor

$$\varphi(E) = \int_E f \mathrm{d}\mu = \int_X f \cdot \chi_E \mathrm{d}\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n} f \mathrm{d}\mu$$

Innen a Beppo Levi-tétel miatt következik φ σ-additivitása.
2. Ha létezik $E \in \mathcal{M}$, hogy $g = \chi_E$, akkor teljesül, hogy

$$\int_X g \mathrm{d}\varphi = \int_X \chi_E \mathrm{d}\varphi = \varphi(E) = \int_X f \cdot \chi_E \mathrm{d}\mu$$

Ha g egyszerű, akkor felbontható véges sok karakterisztikus függvény lineáris kombinációjára. Innen a monoton konvergencia-tétel miatt az állítás teljesül.

5.15. definíció (Lebesgue-integrál)**.** Ha $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ mérhető, $E \in \mathcal{M}$, akkor

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_E f^+ \mathrm{d}\mu - \int_E f^- \mathrm{d}\mu$$

(Ha ez az érték létezik.)

5.16. definíció (integrálhatóság)**.** Egy kiterjesztett valós értékű függvény integrálható, ha az integrálja létezik és véges.

5.17. definíció (komplex értékű függvény integrálja)**.** Ha $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, $f : X \to \mathbb{C}$ mérhető, $E \in \mathcal{M}$, akkor

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_E \operatorname{Re} f \mathrm{d}\mu + i \cdot \int_E \operatorname{Im} f \mathrm{d}\mu$$

5.18. definíció ($\mathcal{L}_p$ függvény)**.** $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér esetén

$$\mathcal{L}_p(X, \mathcal{M}, \mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{C} \text{ mérhető} : \int_x |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty \right\}$$

5.19. Állítás. *Adott halmaz $\mathcal{L}_1$ függvényeinek a halmaza vektorteret alkot a pontonkénti műveletekre nézve, és ezen a vektortéren az integrálás lineáris forma.*

Bizonyítás. Triviális.

5.20. Állítás. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *mérhető tér,* $f : X \to \mathbb{C}$ $\mathcal{L}_1$ *függvény esetén*

$$\left| \int f \mathrm{d}\mu \right| \leqslant \int |f| \, \mathrm{d}\mu$$

Bizonyítás. Legyen $\int f \mathrm{d}\mu = z$. $z = 0$ esetén az állítás triviális, ekkor a bal oldal 0, a jobb oldal pedig nemnegatív.
Tegyük fel, hogy $z \neq 0$, és legyen $\alpha = \frac{z}{|z|}$. Ekkor

$$\left| \int f \mathrm{d}\mu \right| = |z| = \frac{z}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \int f \mathrm{d}\mu = \int \frac{f}{\alpha} \mathrm{d}\mu = \int \operatorname{Re} \frac{f}{\alpha} \mathrm{d}\mu + i \cdot \int \operatorname{Im} \frac{f}{\alpha} \mathrm{d}\mu$$

Mivel $|z| \in \mathbb{R}$, $\int \operatorname{Im} \frac{f}{\alpha} \mathrm{d}\mu = 0$, így (mivel $|\alpha| = 1$)

$$\left| \int f \mathrm{d}\mu \right| = \int \operatorname{Re} \frac{f}{\alpha} \mathrm{d}\mu \leqslant \int \left| \frac{f}{\alpha} \right| \mathrm{d}\mu = \int |f| \mathrm{d}\mu$$

6. Függvénysorozatok integrálja

(Van egy kis átfedés az előző anyag végével.)

Előjeles és komplex függvények integrálja. Az $\mathcal{L}_1$ tér. Az $\mathcal{L}_1$ tér egységgömbje zárt a pontonkénti konvergenciára. Fatou-Lebesgue tétel. Korlátos kovergencia tétel. Dominált konvergencia tétel. Az integrál kiterjesztése majdnem mérhető függvényekre. Ha $\sum ||f_n||_1$ konvergens, akkor $f_n \to 0$ m.m.

6.1. definíció. Valós értékű függvényekre

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \int_X f_+\mathrm{d}\mu - \int_X f_-\mathrm{d}\mu$$

ha kivonhatók.

Az f mérhető függvény a μ mérték szerint "integrálható", ha $\int_X f_+\mathrm{d}\mu$ és $\int_X f_-\mathrm{d}\mu$ is véges.
Komplex értékű függvényre valós + képzetes rész, de csak akkor értelmezzük, ha mindkettő véges.

6.2. tétel. *(1) $\int_X f\mathrm{d}\mu$ véges $\Leftrightarrow$ $\int_X |f|\mathrm{d}\mu$ véges.*
(2) $\int_X cf = c\int f$ (komplexre is).
(3) $\int_X (f+g) = \int f + \int g$, ha mindkettő értelmes és összeadható.
(4) $\left|\int_X f\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_X |f|\mathrm{d}\mu$.

Bizonyítás. (1) trivi.
(2a) a valós esetben pozitív és negatív valós c-re is trivi:

$$\int cf = \int (cf)_+ - \int (cf)_- = c\int f_+ - c\int f_- = c\left(\int f_+ - \int f_-\right) = c\int f \qquad (c \geqslant 0);$$

$$\int cf = \int (cf)_+ - \int (cf)_- = \int |c|f_- - \int |c|f_+ = -|c|\left(\int f_+ - \int f_-\right) = c\int f \qquad (c < 0).$$

(2b) A komplex esetben kibontjuk valós és képzetes részekre: legyen $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, $d = \operatorname{Re} c$, $e = \operatorname{Im} c$;

$$\int cf = \int (d+ei)(u+iv) = \int \Big((du-ev) + (dv+eu)i\Big) = \int (du-ev) + i\int (dv+eu) =$$
$$= d\int u - e\int v + di\int v + ei\int u = (d+ei)\left(\int u + i\int v\right) = c\int f.$$

(3): Elég valósra. Szétbontjuk az alaphalmazt 6 részre a két függvény előjele és nagysága szerint:

$$A_1 = \{x \in X : f(x) \geqslant 0, g(x) \geqslant 0\}; \quad A_2 = \{x \in X : f(x) < 0, g(x) < 0\};$$
$$A_3 = \{x \in X : f(x) \geqslant 0, g(x) < 0, f(x) \geqslant |g(x)|\}; \quad A_4 = \{x \in X : f(x) \geqslant 0, g(x) < 0, f(x) < |g(x)|\};$$
$$A_5 = \{x \in X : f(x) < 0, g(x) \geqslant 0, |f(x)| \geqslant g(x)\}; \quad A_6 = \{x \in X : f(x) < 0, g(x) \geqslant 0, |f(x)| < g(x)\};$$

részenként igaz az állítás.

(4) Először elforgatjuk f-et úgy, hogy $\int_X f\mathrm{d}\mu$ pozitív valós legyen; egy alkalmas egységnyi ω komplex számmal

$$\left|\int_X f\mathrm{d}\mu\right| = \operatorname{Re}\left(\omega\int_X f\mathrm{d}\mu\right) = \operatorname{Re}\left(\int_X (\omega f)\mathrm{d}\mu\right) = \int_X \operatorname{Re}(\omega f)\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X |f|\mathrm{d}\mu.$$

6.3. tétel (kis Lebesgue-tétel; korlátos konvergencia tétel)**.** *Ha $\mu(X)$ véges, f_n egyenletesen korlátos, és $f_n \to f$ pontonként, akkor*

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \lim\int_X f_n\mathrm{d}\mu,$$

avagy

$$\int_X (\lim f_n)\mathrm{d}\mu = \lim\int_X f_n\mathrm{d}\mu.$$

6.4. tétel (nagy Lebesgue-tétel; dominált konvergencia tétel). *Ha $g \geqslant 0$ integrálható, $|f_n| \leqslant g$ és $f_n \to f$ pontonként, akkor*

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim \int_X f_n \mathrm{d}\mu,$$

avagy

$$\int_X (\lim f_n) \mathrm{d}\mu = \lim \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

A g a "domináns" függvény.

6.5. tétel (Fatou-Lebesgue). *Ha $g \geqslant 0$ integrálható, és $|f_n| \leqslant g$, akkor*

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n) \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu \leqslant \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X (\limsup_{n\to\infty} f_n) \mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. A nagy Lebesgue-tételből következik a kis Lebesgue-tétel: ha $|f_n| \leqslant M$ minden n-re, akkor $g = M$ jó domináns.

A Fatou-Lebesgue tételből következik a nagy Lebesgue, mert $\liminf f_n = \limsup f_n = \lim f_n$.

A Fatou-Lebesgue tételben a egyenlőtleségek bizonyítása: Fatou-lemma a $g + f_n$ függvényre; triviális; Fatou-lemma a $g - f_n$ függvényre.

6.6. definíció. Legyen $T : X \to \{igaz, hamis\}$. T az A halmazon μ-m.m. teljesül, ha van olyan N nullmértékű halmaz, hogy $A \backslash N$-en T konstans igaz.

Trivi: Ha $f = g$ m.m., akkor $\int_X f = \int_X g$.

f μ-majdnem mérhető, ha egy nullmértékű halmazon megváltoztathatjuk/definiálhatjuk úgy, hogy mérhető legyen.

6.7. *megjegyzés.* **KT** Teljes mértéktéren ekvivalens az a definíció, hogy $T : X \to \{igaz, hamis\}$. T az A halmazon μ-m.m. teljesül, ha a $\{x | x - en\ T\ hamis\}$ halmaz μ-nullmértékű

6.8. *megjegyzés.* **KT** A fent definiált m.m. = reláció ekvivalencia-reláció

6.9. *megjegyzés.* **KT** Egy nem mindenütt, csak m.m. értelmezett függvénynek is definiálható az integrálja. Pl.$\int_{(-1,2]} |x|' \,\mathrm{d}x$ értelmes.

6.10. következmény. *Az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktéren integrálható, valós vagy komplex értékű függvények valós, illetve komplex vektorteret alkotnak. Ezt $\mathcal{L}_1(X)$-szel vagy $\mathcal{L}_1(X, \mathcal{M}, \mu)$-vel vagy csak $\mathcal{L}_1$-gyel fogjuk jelölni.*

Egy $f \in \mathcal{L}_1$ függvény "normája": $\|f\|_1 = \int_X |f| \mathrm{d}\mu$.

A háromszög-egyenlőtlenség triviálisan teljesül.

Ez így még nem metrikus tér, de faktorizálhatunk a m.m. nulla függvények terével.

6.11. *megjegyzés.* **KT** Hasonlóan megy más normá(k)ra is:

$f \in \mathcal{L}_2$ függvény "normája": $\|f\|_2 = \int_X |f|^2 \mathrm{d}\mu$.

6.12. tétel. *Ha $\|f_n\|_1 \leqslant 1$, és $f_n \to f$, akkor $\|f\|_1 \leqslant 1$.*

Bizonyítás. A Fatou-lemmából

$$\|f\|_1 = \int_X (\liminf |f_n|) \,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf \int_X |f_n| \mathrm{d}\mu \leqslant 1.$$

6.13. tétel. *Ha $\sum \|f_n\|_1 < \infty$, akkor m.m. x-re $\sum f_n(x)$ konvergens.*

Bizonyítás. Legyen $g = \sum |f_n|$. A Beppo Levi tétel miatt

$$\int_X g \mathrm{d}\mu = \sum \int_X |f_n| \mathrm{d}\mu = \sum \|f_n\|_1 < \infty,$$

ezért $g < \infty$ m.m.. Akkor viszont $\sum f_n(x)$ m.m. x-re abszolút konvergens, tehát konvergens.

6.14. tétel. ***KT*** *$f_n : X \to \mathbb{C}$ mérhető, $\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_1 < \infty \Rightarrow \sum f_n$ konvergens és $\int \sum f_n(x) = \sum \int f_n(x)$*

Bizonyítás. KT Használjuk a D.K.T.-t: $|\sum_{n=1}^{N} f_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| := g \Rightarrow \int g < \infty$.

6.15. lemma. ***KT*** *$f \geqslant 0$ mérhető, $\int_E f < \infty \Rightarrow f < \infty$ m.m.*

Bizonyítás. KT Ha azon pontok halmaza, melyen f végtelen, nem nullmértékű, akkor f nemnegativitása és az integrál definíciója alapján az integrál értéke végtelen lenne. Vegyük ugyanis azt az egyszerű függvényt, ami pontosan ott végtelen, ahol f, a többi helyen nulla. Ennek integrálja végtelen, ami f nemnegativitása miatt definíció szerint alsó becslés az integrál értékére.

6.16. tétel (Borel-Cantelli)**.** ***KT*** *$E_1, E_2, \ldots \in M, \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty \Rightarrow$ m.m. $x \in X$ csak véges sok E_n-ben van benne.*

Bizonyítás. KT tétel állítása $\Leftrightarrow \sum \chi_{E_n}$ m.m. véges $\Leftarrow \int \sum \chi_{E_n} \overset{\text{B-L}}{=} \sum \int \chi_{E_n} = \sum \mu(E_n) < \infty$

7. Riemann- és Lebesgue-Stieltjes integrálok

Alsó és felső burkoló. A burkoló függvények félig folytonosak, ezért Borel-mérhetők. Kapcsolat az alsó és felső Stieltjes integrállal. A Riemann-Stieltjes integrál létezésének feltétele. A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-féle ekvivalens feltétele.

Alsó és felső burkoló; félig folytonos függvények

7.1. definíció. Legyen A az $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{R}^p$ vagy egy más metrikus tér részhalmaza és $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$.
Az f függvény felső és alsó burkolója

$$\overline{f}(a) = \inf_{r>0} \Big(\sup f\big(B(a,r) \cap A\big)\Big) = \lim_{r\to+0} \Big(\sup f\big(B(a,r) \cap A\big)\Big) = \max \Big(\limsup_{x\to a} f(x), f(a)\Big)$$

és

$$\underline{f}(a) = \sup_{r>0} \Big(\inf f\big(B(a,r) \cap A\big)\Big) = \lim_{r\to+0} \Big(\inf f\big(B(a,r) \cap A\big)\Big) = \min \Big(\liminf_{x\to a} f(x), f(a)\Big).$$

7.2. lemma.
(1) $\underline{f} \leqslant f \leqslant \overline{f}$;
(2) $\underline{f}(a) = \overline{f}(a)$ akkor és csak akkor, ha f folytonos a-ban.

7.3. definíció. Legyen A az $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{R}^p$ vagy egy más metrikus tér részhalmaza és $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$.
Az f függvény "felülről félig folytonos" (f.f.f.) az $a \in A$ pontban, ha $f(a) = \overline{f}(a)$; ezzel ekvivalens, hogy

$$\forall c > f(a) \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in B(a,\delta) \cap A \ \ f(x) < c.$$

Az f függvény "alulról félig folytonos" (a.f.f.) az $a \in A$ pontban, ha

$$\forall c < f(a) \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in B(a,\delta) \cap A \ \ f(x) > c.$$

7.4. *megjegyzés.* Ha $f(a)$ véges, akkor c helyett $f(a) \pm \varepsilon$-t is írhatunk: az ekvivalens feltételek

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in B(a,\delta) \cap A \ \ f(x) < f(a) + \varepsilon,$$

illetve

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in B(a,\delta) \cap A \ \ f(x) > f(a) - \varepsilon.$$

7.5. lemma.
(1a) $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ akkor és csak akkor f.f.f., ha bármely $c \in \mathbb{R}$-re $f^{-1}\big([-\infty, c)\big)$ relatív nyílt.
(1b) $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ akkor és csak akkor a.f.f., ha bármely $c \in \mathbb{R}$-re $f^{-1}\big((c, \infty]\big)$ relatív nyílt.
(2) A felső burkoló f.f.f., az alsó burkoló a.f.f..

7.6. következmény. *Az alsó és a felső burkoló is Borel-mérhető.*

7.7. lemma. *Ha $I_1, I_2, \ldots$ intervallumsorozat, amelyeknek a közös belső pontja, és $|I_n| \to 0$, akkor* $\inf f(I_n \cap A) \to \underline{f}(a)$ *és* $\sup f(I_n \cap A) \to \overline{f}(a)$.

7.1. Riemann- és Lebesgue-integrálok

7.2. A Riemann-integrál létezésének feltételei

7.8. tétel.

$$\underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x = \int_{[a,b]} \underline{f} \mathrm{d}\lambda \quad \textit{és} \quad \overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x = \int_{[a,b]} \overline{f} \mathrm{d}\lambda.$$

Bizonyítás. Az integrálok léteznek, mert a burkolók Borel-mérhetők.

Vegyük a következő felosztássorozatot: $F_0 = \{a, b\}$. Ha F_{n-1} már van: vegyünk egy-egy olyan G_1, G_2, G_3 felosztást, amire $\delta(G_1) < \frac{1}{n}$; $s_{G_2} > \underline{\int_a^b} f \text{ d}x - \frac{1}{n}$; $S_{G_3} < \overline{\int_a^b} f \text{ d}x + \frac{1}{n}$. Ezek után legyen F_n az F_{n-1}, G_1, G_2, G_3 egy közös finomítása.

az F_n felosztásból készített alsó és felső lépcsősfüggvény legyen $\alpha_n(x)$, illetve $\beta_n(x)$.

A finomodás miatt $\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$ és $\beta_n \geqslant \beta_{n+1}$.

Majdnem minden $x \in [a, b]$ pontra ráhúzódnak a felosztások intevallumai, így $\alpha_n(x) \to \underline{f}(x)$ és $\beta_n(x) \to \overline{f}(x)$, kivéve azokat a pontokat, amik valamelyik felosztásnak belső osztópontjai, de ezekből megszámlálható sok van, így ezek halamaza λ-nullmértékű.

A felosztás belső intervallumainak mértéke $\lambda([x_{i-1}, x_i]) = x_i - x_{i-1}$. A végpontokban $\lambda([a, x_1]) = x_1 - a$ és $\lambda([x_{m-1}, b]) = b - x_{m-1}$. α_n, β_n egyszerűek, ezért

$$\int_{[a,b]} \alpha_n \text{d}\lambda = \sum_{i=1}^{m} \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \cdot \lambda([x_{i-1}, x_i]) = s_{F_n}$$

Hasonlóan β_n-re. Továbbá, mint láttuk $\alpha_n \to \underline{f}$ és $\beta_n \to \overline{f}$, λ-m.m. Tehát

$$\underline{\int_a^b} f \text{ d}x = \lim s_{F_n} = \lim \int_{[a,b]} \alpha_n \text{d}\lambda \overset{\text{KKT}}{=} \int_{[a,b]} \lim \alpha_n \text{d}\lambda = \int_{[a,b]} \underline{f} \text{d}\lambda$$

és

$$\overline{\int_a^b} f \text{ d}x = \lim S_{F_n} = \lim \int_{[a,b]} \beta_n \text{d}\lambda \overset{\text{KKT}}{=} \int_{[a,b]} \lim \beta_n \text{d}\lambda = \int_{[a,b]} \overline{f} \text{d}\lambda$$

7.9. Állítás. *$f \geqslant 0$ mérhető, $\int_E f = 0 \Rightarrow f = 0$ E-n m.m.*

Bizonyítás. $F = \{x \in E : f(x) > 0\}$
Kéne $\mu(F) = 0$. Ehhez legyen $F_n = \{x \in E : f(x) > \frac{1}{n}\}$. $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$

$$0 = \int_E f \geqslant \int_{F_n} f \geqslant \frac{1}{n} \mu(F_n) \Rightarrow \mu(F_n) = 0 \Rightarrow \mu(F) = 0$$

7.10. tétel. *(1) Az $\int_a^b f \text{ d}x$ Riemann-integrál akkor és csak akkor létezik, ha az f függvény λ-m.m. folytonos.*

(2) Ha az $\int_a^b f \text{ d}x$ Riemann-integrál létezik, akkor az f függvény λ-mérhető, és $\int_a^b f \text{ d}x = \int_{[a,b]} f \text{d}\lambda$.

Bizonyítás. (1) A Riemann-integrál létezik $\Leftrightarrow \underline{\int_a^b} f \text{ d}x = \overline{\int_a^b} f \text{ d}x \Leftrightarrow \int_{[a,b]} \underline{f} \text{d}\lambda = \int_{[a,b]} \overline{f} \text{d}\lambda \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \int_{[a,b]} (\overline{f} - \underline{f}) \text{d}\lambda = 0 \Leftrightarrow \overline{f} - \underline{f} = 0$ λ-m.m. $\Leftrightarrow f$ λ-m.m. folytonos.

(2) Ha a Riemann-integrál létezik, akkor $f = \underline{f}$ λ-m.m., tehát f λ-majdnem Borel-mérhető.

7.11. *megjegyzés.* Abból, hogy az $\int_a^b f$ Riemann-integrál létezik, nem következik, hogy f Borel-mérhető. Például a Jordan-nullmértékű Cantor-halmaznak létezik nem Borel-mérhető N részhalmaza (mert csak kontinuum sok Borel-hamaz létezik). A χ_N függvény Riemann-integrálható, de nem Borel-mérhető.

7.12. *megjegyzés.* A bizonyítások átvihetők például a többdimenziós Jordan-mérték szerinti integrálokra. Ha $A \subset \mathbb{R}^p$ Jordan-mérhető és $f : A \to \mathbb{R}$ korlátos, akkor az $\int_A f$ Riemann-integrál akkor és csak akkor létezik, ha f az A λ-m.m. pontjában folytonos, ilyenkor f Lebesgue-mérhető is, és a Riemann- és a Lebesgue-integrál értéke ugyanaz.

A Riemann- és Riemann-Stieltjes integrál létezésének feltételei

A továbbiakban $G \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $g : G \to \mathbb{R}$ monoton növekvő; μ a g megváltozásából származtatott LS-mérték. Továbbá $[a, b] \subset G$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos, és feltételezzük, hogy f-nek és g-nek az $[a, b]$ intervallumra megszorítva nincs közös szakadási helye.

7.13. definíció. Felosztás: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$; az $x_1, \ldots, x_{n-1}$ pontok g-nek folytonossági pontjai.

$$s_F = \sum_{i=1}^{n} \Big(\inf f\big([x_{i-1}, x_i]\big)\Big)\big(g(x_i) - g(x_{i-1})\big), \quad S_F = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup f\big([x_{i-1}, x_i]\big)\Big)\big(g(x_i) - g(x_{i-1})\big)$$

$$\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g = \sup\Big\{s_F : \ F \text{ felosztás}\Big\}, \qquad \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g = \inf\Big\{S_F : \ F \text{ felosztás}\Big\}$$

7.14. lemma.
(1) Ha F_2 finomítása F_1-nek, akkor $s_{F_1} \leqslant s_{F_2} \leqslant \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g$ és $S_{F_1} \geqslant S_{F_2} \geqslant \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g$.

(2) $\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g \leqslant \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g$.

(3) Minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy bármely, δ-nál finomabb F felosztásra $s_F > \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g - \varepsilon$ és $S_F < \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g + \varepsilon$. A bizonyítás ugyanaz, mint a Riemann-integrálnál, házi feladat végiggondolni.
(A kis gusztustalan lemma visszatér az előadás tanulsága szerint)

(4) A RS-integrál akkor és csak akkor létezik, ha $\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g = \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g$; ilyenkor persze $\int_a^b f \,\mathrm{d}g = \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g = \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g$.
A bizonyítás ugyanaz, mint a Riemann-integrálnál, házi feladat végiggondolni.

7.15. lemma. *Van olyan F_n felosztássorozat, amiben*
(1) mindegyik felosztásnak finomítása a következő felosztás;
(2) $\delta(F_n) \to 0$;
(3) $s_{F_n} \to \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g$ és $S_{F_n} \to \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g$.

Bizonyítás. Rekurzívan, $F_0 = (a, b)$. Ha F_{n-1} már van: vegyünk egy-egy olyan G_1, G_2, G_3 felosztást, amire $\delta(G_1) < \frac{1}{n}$; $s_{G_2} > \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g - \frac{1}{n}$; $S_{G_3} < \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g + \frac{1}{n}$. Ezek után legyen F_n az F_{n-1}, G_1, G_2, G_3 egy közös finomítása.

7.16. tétel. *Tegyük fel, hogy g balról folytonos a-ban és jobbról folytonos b-ben.*
Legyen μ a g megváltozásából származtatott LS-mérték. Ekkor

$$\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g = \int_{[a,b]} \underline{f} \mathrm{d}\mu \quad \text{és} \quad \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g = \int_{[a,b]} \overline{f} \mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. Az integrálok léteznek, mert a burkolók Borel-mérhetők.

Vegyük az előbbi felosztássorozatot; az F_n felosztásból készített alsó és felső lépcsősfüggvény legyen $\alpha_n(x)$, illetve $\beta_n(x)$.

A finomodás miatt $\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$ és $\beta_n \geqslant \beta_{n+1}$.

Majdnem minden $x \in [a,b]$ pontra ráhúzódnak a felosztások intevallumai, így $\alpha_n(x) \to \underline{f}(x)$ és $\beta_n(x) \to \overline{f}(x)$, kivéve azokat a pontokat, amik valamelyik felosztásnak belső osztópontjai.

A belső osztópontok a g-nek folytonossági pontjai, ezért az összes belső osztópontok halmaza μ-nullmértékű. A felosztás belső intervallumainak mértéke $\mu((x_i, x_j)) = g(x_j) - g(x_i)$. A végpontokban g a belső odalról folytonos, ezért $\mu([a, x_1)) = g(x_1) - g(a)$ és $\mu((x_i, b]) = g(b) - g(x_i)$. Tehát $\alpha_n \to \underline{f}$ és $\beta_n \to \overline{f}$, μ-m.m., és

$$\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g = \lim s_{F_n} = \lim \int_{[a,b]} \alpha_n \mathrm{d}\mu \overset{\text{kkt}}{=} \int_{[a,b]} \underline{f} \mathrm{d}\mu$$

és

$$\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g = \lim S_{F_n} = \lim \int_{[a,b]} \beta_n \mathrm{d}\mu \overset{\text{kkt}}{=} \int_{[a,b]} \overline{f} \mathrm{d}\mu$$

7.17. tétel. *Tegyük fel, hogy g balról folytonos a-ban és jobbról folytonos b-ben, és legyen μ a g megváltozásából származtatott LS-mérték.*

(1) Az $\int_a^b f \,\mathrm{d}g$ Riemann-Stieltjes integrál akkor és csak akkor létezik, ha nincs olyan pont, ahol f és g is szakad, és az f függvény μ-m.m. folytonos.

(2) Ha az $\int_a^b f \,\mathrm{d}g$ Riemann-Stieltjes integrál létezik, akkor az f függvény μ-majdnem mérhető, és $\int_a^b f \,\mathrm{d}g = \int_{[a,b]} f \mathrm{d}\mu$.

Bizonyítás.

(1) A RS integrál létezik $\Leftrightarrow \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g = \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g \Leftrightarrow \int_{[a,b]} \underline{f} \mathrm{d}\mu = \int_{[a,b]} \overline{f} \mathrm{d}\mu \Leftrightarrow \int_{[a,b]} (\overline{f} - \underline{f}) \mathrm{d}\mu = 0 \Leftrightarrow$ $\overline{f} - \underline{f} = 0$ μ-m.m. $\Leftrightarrow f$ μ-m.m. folytonos.

(2) Ha a RS integrál létezik, akkor $f = \underline{f}$ μ-m.m., tehát f μ-majdnem Borel-mérhető.

8. Mérhető függvény közelítése függvénysorozattal

8.1. *emlékeztető* (Luzin-tétel). $(\mathbb{R}^p, M_\mu, \mu)$ L-S mértéktér, $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}$ mérhető, $\varepsilon > 0$ akkor létezik g folytonos, hogy $\mu(f \neq g) < \varepsilon$.

8.2. tétel. *A Luzin-tétel feltételei mellett minden mérhető f-hez létezik (g_n) folytonosak egy sorozata, melyre $g_n(x) \to f(x)$ μ-m.m..*

8.3. *megjegyzés.* A konvergencia erős értelemben teljesül, ha nem kivételes egy pont, akkor elég nagy n-re $g_n(x) = f(x)$.

Bizonyítás. Alkalmazzuk $\varepsilon = 1/n^2$-re a Luzin tételt, igy kapva a g_n függvénysorozatot. A Borel-Cantelli lemmát használjuk. Legyen G_n az n. függvényhez tartozó kivételhalmaz, a konstrukció miatt ezek összmértéke véges. A B-C lemmából kapjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}^p$ csak véges sok G_n-ben van benne, a legutolsó ilyen indexnél nagyobbat választva kapjuk, hogy valóban $g_n(x) = f$.

8.4. *megjegyzés.* A μ-m.m. feltétel nem elhagyható, hiszen az azt jelentené, hogy minden mérhető függvény Baire-1, de ez pl. a Dirichlet-fvre nem teljesül.

II. rész:
Differenciálás

9. Előjeles mértékek és variációik

Előjeles és komplex mértékek. Előjeles mérték nem veheti fel mindkét végtelent. Majoráns mérték. Pozitív, negatív és totális variáció. A totális variáció majorálja a pozitív és a negatív variációt.

Eddig olyan mértékekkel foglalkoztunk, amelyeknek minden értéke nemnegatív. Most egy kicsit az olyan halmazfüggvényeket fogjunk megvizsgálni, amelyek negatívak (sőt, komplexek) is lehetnek, mint például a gazdasági növekedés vagy az intelligencia.

Mindig ugyanazon az $(X, \mathcal{M})$ mérhető téren fogunk játszani.

9.1. definíció.
$\vartheta : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ előjeles mérték, ha $\vartheta(\varnothing) = 0$ és σ-additív.
$\vartheta : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ komplex mérték, ha $\vartheta(\varnothing) = 0$ és σ-additív. (Az értéke csak véges lehet.)

9.2. *példa.* Hogy gyárthatunk előjeles és komplex mértékeket?

Pl. előjeles mértéket készíthetünk úgy, hogy vesszük két mérték különbségét: $\vartheta = \mu_1 - \mu_2$. Fontos, hogy $\mu_1(X)$ és $\mu_2(X)$ közül legalább az egyik véges legyen, hogy mindig el lehessen végezni a kivonást.

A komplex mértékeknek a valós és a képzetes része is egy-egy véges előjeles mérték. Ennek a mintájára gyárthatunk vektorértékű mértékeket is: minden koordináta egy-egy előjeles mérték...

Egy másik, nagyon fontos lehetőség, ha egy függvényt integrálunk: vegyünk egy f mérhető függvényt, egy μ mértéket, és legyen $\vartheta(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu$.

9.3. tétel. *Előjeles mérték nem veheti fel mindkét végtelent.*

Bizonyítás. Ha $(X, \mathcal{M}, \vartheta)$ előjeles mérték, és felveszi a $+\infty$ értéket, tehát $\vartheta(P) = \infty$ valamilyen $P \subset X$ halmazra, akkor az additivitás miatt $\vartheta(X) = \vartheta(P) + \vartheta(X \backslash P) = \infty$

Ha pedig $\vartheta(N) = -\infty$ valamilyen $N \subset X$ halmazra, akkor az additivitás miatt $\vartheta(X) = \vartheta(N) + \vartheta(X \backslash N) = -\infty$.

9.4. definíció. Az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mérték majorálja az $(X, \mathcal{M}, \vartheta)$ előjeles mértéket, ha minden $A \in \mathcal{M}$-re $\vartheta(A) \leqslant \mu(A)$. Illetőleg abszolút értékben majorálja, ha $|\vartheta(A)| \leqslant \mu(A)$.

Variációk

9.5. definíció. KT Az $(X, \mathcal{M}, \vartheta)$ előjeles mérték totális variációja

$$\tau(A) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\vartheta(B_k)| : \ B_k \subset A, \ B_k \cap B_\ell = \varnothing \right\}.$$

Az $(X, \mathcal{M}, \vartheta)$ komplex mérték totális variációja

$$\tau(A) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |\vartheta(B_n)| : \ n \in \mathbb{N}, \ B_k \subset A, \ B_k \cap B_\ell = \varnothing \right\}$$
$$= \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\vartheta(B_k)| : \ B_k \subset A, \ B_k \cap B_\ell = \varnothing \right\}$$

Az $(X, \mathcal{M}, \vartheta)$ előjeles mérték pozitív variációja

$$\pi(A) = \sup\{\vartheta(B) : B \subset A\}$$

Az $(X, \mathcal{M}, \vartheta)$ előjeles mérték negatív variációja

$$\nu(A) = \sup\{-\vartheta(B) : B \subset A\}$$

9.6. Állítás. ***KT***

$$\begin{aligned}\tau(A) &= \sup\left\{|\vartheta(B)| + |\vartheta(C)| : \ B, C \subset A, \ B \cap C = \varnothing\right\} \\ &= \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |\vartheta(B_k)| : \ n \in \mathbb{N}, \ B_k \subset A, \ B_k \cap B_\ell = \varnothing\right\}.\end{aligned}$$

Bizonyítás. Legyenek $B_1, B_2 \ldots \subset A$ páronként diszjunktak. Legyen $B = \bigcup_{\vartheta(B_k)<0} B_k$, $C = \bigcup_{\vartheta(B_k)\geqslant 0} B_k$. Ezzel beláttuk, hogy a kéttagú és a megszámlálható összeges definíció ekvivalens. A véges összegek szuprémuma pedig alulról becsülhető a kéttagú összegek, felülről a megszámlálható összegek szuprémumával.

9.7. tétel.

1. τ, π, ν mértékek.

2. τ majorálja ϑ-t.

3. Ha ϑ előjeles mérték, akkor τ majorálja π-t és ν-t.

4. A τ a legkisebb mérték, ami majorálja ϑ-t.

9.8. *megjegyzés.* **KT** Ha ϑ előjeles ez már a Hahnból megvan, illetve meg lesz, de komplexekre még nem tudjuk.

Bizonyítás. (1a) π mérték: trivi, hogy $\pi(A) \geqslant \vartheta(\varnothing) = 0$, tehát $\pi \geqslant 0$. Az is trivi, hogy $\pi(\varnothing) = 0$. Azt kell bizonyítani, hogy π σ-additív. Tegyük fel, hogy $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ diszjunktak és $A = \bigcup A_n$. Azt kell igazolnunk, hogy $\pi(A) = \sum \pi(A_n)$.

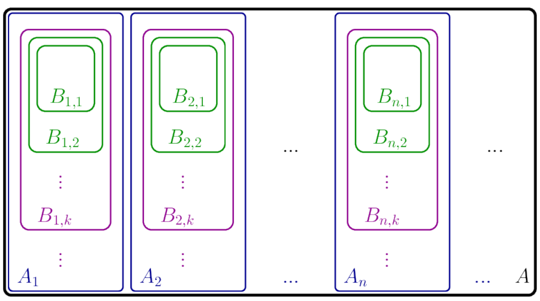
Mindegyik n-hez vegyünk egy olyan $B_{n,1}, B_{n,2}, \ldots \subset A_n$ sorozatot, amelyre $0 \leqslant \vartheta(B_{n,k}) \to \pi(A_n)$. Ekkor minden k-ra és N-re

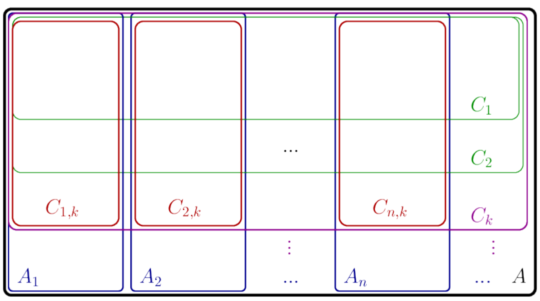
$$\sum_{n=1}^{N} \vartheta(B_{n,k}) = \vartheta\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_{n,k}\right) \leqslant \pi(A).$$

Most $k \to \infty$, majd $N \to \infty$ határátmenet:

$$\sum_{n=1}^{N} \pi(A_n) \leqslant \pi(A)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi(A_n) \leqslant \pi(A). \qquad (*)$$





Megfordítva, legyen $C_1, C_2, \ldots \subset A$ olyan sorozat, amelyre $\vartheta(C_k) \to \pi(A)$, és legyen $C_{n,k} = A_n \cap C_k$. Ekkor

$$\vartheta(C_k) = \vartheta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{n,k}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(C_{n,k}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \pi(A_n);$$

A $k \to \infty$ határátmenetből

$$\pi(A) = \lim_{k\to\infty} \vartheta(C_k) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \pi(A_n). \tag{$**$}$$

Az $(*)$ és $(**)$ együtt azt adja, hogy $\pi(A) = \sum \pi(A_n)$.

(1b) τ mérték: $\tau(\emptyset) = 0$, és triviális, hogy $\tau(A) \geqslant \vartheta(\emptyset) = 0$; most is a σ-additivitás kell; Legyen megint $A = \bigcup A_n$, diszjunktak.

Mindegyik A_n-hez és mindegyik k-hoz vegyük $\tau(B_n)$-nek egy közelítő összegét úgy, hogy ezek $k \to \infty$ esetén $\tau(B_n)$-hez tartsanak, vagyis vegyük $B_{n,k,\ell} \subset A_n$ halmazok sorozatának egy sorozatát úgy, hogy mindegyik n, k-ra a $B_{n,k,1}, B_{n,k,2}, \ldots \subset A_n$ halmazok diszjunktak, és $\lim_{k\to\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} |\vartheta(B_{n,k,\ell})| = \tau(A_n)$. Rögzített k-ra a $B_{n,k,\ell}$ halmazok diszjunkt részei A-nak, ezért minden N-re

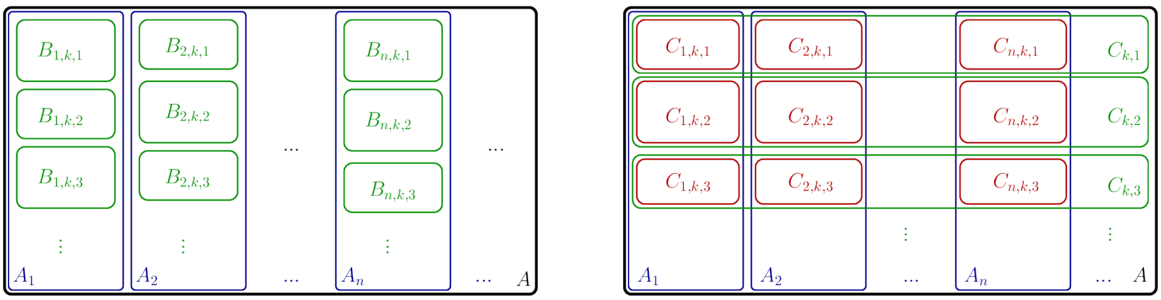
$$\sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} |\vartheta(B_{n,k,\ell})|\right) \leqslant \tau(A).$$

$k \to \infty$:

$$\sum_{n=1}^{N} \tau(A_n) \leqslant \tau(A).$$

$N \to \infty$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n) \leqslant \tau(A).$$



22

A megfordításhoz vegyük $\tau(A)$ közelítő összegeinek egy sorozatát, vagyis $C_{k,\ell} \subset A$ halmazokat úgy, hogy rögzített k-ra $C_{k,1}, C_{k,2}, \ldots$ diszjunktak és $\lim_{k\to\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} |\vartheta(C_{k,\ell})| = \tau(A)$.
Legyen $C_{n,k,\ell} = A_n \cap C_{k,\ell}$. Ekkor:

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} |\vartheta(C_{k,\ell})| = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left|\vartheta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{n,k,\ell}\right)\right| = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left|\sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(C_{n,k,\ell})\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\vartheta(C_{n,k,\ell})| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} |\vartheta(C_{n,k,\ell})|\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n)$$

$k \to \infty$:

$$\tau(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n).$$

Az triviális, hogy τ majorál, és a legkisebb.

10. Előjeles mértékek felbontási tételei

Előjeles mérték szerint létezik maximális és minimális mértékű halmaz.
Hahn-felbontás. Jordan-felbontás. $\tau = \pi + \nu$.

10.1. tétel (Hahn felbontási tétele)**.** *Legyen ϑ előjeles mérték az $S \subset P(X)$ σ-gyűrűn. Ekkor létezik egy $N \subset X$ halmaz úgy, hogy bármely $H \in S$ halmazra $H \cap N,\ H \backslash N \in S$, és $\vartheta(H \cap N) \leqslant 0 \leqslant \vartheta(H \backslash N)$. Másképp: N minden részhalmaza nempozitív és minden N-től diszjunkt halmaz nemnegatív mértékű.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $\vartheta > -\infty$, hiszen ϑ nem veheti fel ∞ és $-\infty$ mindegyikét, és szükség esetén áttérhetünk $-\vartheta$ vizsgálatára. Emlékeztető: adott ϑ mellett π jelöli a pozitív variációt, azaz $\pi(H) = \sup\{\vartheta(A) \colon A \subset H,\ A \in S\}$ minden $H \in S$-re. Most definiáljuk az N halmazt. Legyen

$$a = \inf\{\vartheta(H) \colon H \in S,\ \pi(H) = 0\},$$

legyenek $N_k \in S$ olyan halmazok, melyekre $\pi(N_k) = 0$ és $\vartheta(N_k) \to a$ és végül legyen $N = \bigcup_k N_k$.

Tegyük fel indirekt, hogy $\pi(N) > 0$. Ekkor létezik $A \subset N$, hogy $\vartheta(A) > 0$. Legyen $A_k = N_k \cap A$. Ekkor $\vartheta(A_k) > 0$ valamely k-ra. Ez ellentmondás, így $\pi(N) = 0$. Az a definíciója miatt $\vartheta(N) \geqslant a$ nyilvánvaló, most belátjuk az egyenlőséget. Legyen $B_k = N_k \backslash \bigcup_{i<k} N_i$. Ekkor $B_k \subset N_k$, így $\pi(B_k) = 0$ és $\vartheta(B_k) \leqslant \vartheta(N_k) \leqslant 0$. Nyilván $N = \bigcup B_k$, vagyis $\vartheta\left(\bigcup B_k\right) = \sum \vartheta(B_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \vartheta(B_k) \leqslant \vartheta(B_k) \leqslant \vartheta(N_k)$. Tehát azt kaptuk, hogy $a \leqslant \vartheta(N) \leqslant \vartheta(N_k)$, így a rendőrelv miatt $\vartheta(N) = a$. Az infimum felvétetik az N halmazon.

Ebből egyrészt azonnal következik, hogy $a > -\infty$. Másrészt ha egy $H \in S$ halmaz diszjunkt N-től és $\pi(H) = 0$, akkor $\vartheta(H) = 0$, különben N mértékét csökkenthetnénk. Tehát már csak azt kell belátni, hogy N-től diszjunkt $H \in S$-re, $\pi(H) > 0$ esetén is $\vartheta(H) \geqslant 0$ teljesül, egyéb esetben ugyanis, $H \subset N$ mellett $\vartheta(H) \leqslant 0$ áll (mivel $\pi(N) = 0$ miatt $\vartheta(H)$ ekkor nem lehet pozitív).

Ha tehát $H \cap N = \varnothing$ és $\pi(H) > 0$, válasszunk egy $B_1 \subset H,\ B_1 \in S$ halmazt, amelyre

$$\vartheta(B_1) \geqslant \min(1, \pi(H)/2).$$

Ha a $B_1, \ldots, B_n$ halmazokat már kiválasztottuk, akkor legyen $C_n = H \backslash \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, és válasszunk egy olyan $B_{n+1} \subset C_n,\ B_{n+1} \in S$ halmazt, amelyre

$$\vartheta(B_{n+1}) \geqslant \min(1, \pi(C_n)/2).$$

Az így definiált B_n halmazokra nyilván $\vartheta(B_n) \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Legyen $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(B_n) = \infty$, akkor $\vartheta(B) = \infty$, tehát $\vartheta(H) = \infty$. Ha viszont $\sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(B_n) < \infty$, akkor $\vartheta(B_n) \to 0$. Így $\vartheta(B_n) < 1$ ha $n > n_0$. Mivel

$$\pi(H \backslash B) \leqslant \pi(C_n) \leqslant 2\vartheta(B_{n+1})$$

ha $n \geqslant n_0$, így $\pi(H \backslash B) = 0$. Mint fentebb láttuk, ebből következik, hogy $\vartheta(H \backslash B) = 0$, tehát $\vartheta(H) = \vartheta(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(B_n) \geqslant 0$.

10.2. következmény.
(1)Legyen ϑ Hahn felbontása $X = P \cup N$, ekkor $\forall A \subset X$:

$$\pi(A) = \vartheta(A \cap P)$$

$$\nu(A) = -\vartheta(A \cap N)$$

(2) (Jordan felbontási tétel) $\vartheta = \pi - \nu$.
(3) $\tau = \pi + \nu$.

Bizonyítás. (1) π-re bizonyitunk. Bármilyen $B \subset A$-ra $\vartheta(B) = \vartheta(B \cap P) + \vartheta(B \cap N) \leqslant \vartheta(A \cap P) + 0$. Ha $B = A \cap P$, akkor egyenlőség van. Tehát

$$\pi(A) = \max\big\{\vartheta(B) : B \subset A\big\} = \vartheta(A \cap P).$$

(2) Legyen a Hahn-felbontás $X = P \cup N$. Bármilyen H mérhető halmazra

$$\vartheta(H) = \vartheta(H \cap P) + \vartheta(H \cap N) = \pi(H) - \nu(H).$$

(3) Legyen a Hahn-felbontás $X = P \cup N$. Bármilyen H mérhető halmazra és bármilyen $A, B \subset H$ diszjunkt részeire

$$\begin{aligned}\big|\vartheta(A)\big| + \big|\vartheta(B)\big| &\leqslant \Big(\big|\vartheta(A \cap P)\big| + \big|\vartheta(A \cap N)\big|\Big) + \Big(\big|\vartheta(B \cap P)\big| + \big|\vartheta(B \cap N)\big|\Big) = \\ &= \big(\pi(A) + \nu(A)\big) + \big(\pi(B) + \nu(B)\big) = \pi(A \cup B) + \nu(A \cup B) \leqslant \pi(H) + \nu(H);\end{aligned}$$

például ha $A = H \cap P$ és $B = H \cap N$, akkor egyenlőség van. Ezért

$$\tau(H) = \max\big\{|\vartheta(A)| + |\vartheta(B)| : A, B \subset H \text{ diszjunktak}\big\} = \pi(H) + \nu(H).$$

10.3. következmény. *Minden előjeles mértéknek van maximuma és minimuma, avagy:*
Ha ϑ előjeles mérték, akkor léteznek olyan $A, B \subset X$ halmazok, amelyekre $\vartheta(A) = \pi(X)$ és $\vartheta(B) = -\nu(X)$.

Azt eddig is tudtuk, hogy $-\nu(X) \leqslant \vartheta(A) \leqslant \pi(X)$; az a kérdés, hogy ϑ felveszi-e a $-\nu(X)$ és $\pi(X)$ értékeket.

Bizonyítás. A válasz pedig igenlő, a Hahn felbontásból adódó P és N pont ezt szolgáltatja.

10.4. *kérdés.* Egyértelmű-e a Hahn-felbontás?

Nem, de τ-majdnem: ha $X = P_1 \cup N_1 = P_2 \cup N_2$ két Hahn-felbontás, akkor a $P_1 \triangle P_2 = N_1 \triangle N_2 = (P_1 \cup P_2) \cap (N_1 \cup N_2)$ halmazon $\pi = \nu = 0$, vagyis $\tau(P_1 \triangle P_2) = 0$; a szimetrikus differencia részhalmazain ϑ konstans 0.

10.5. következmény. *$\pi(X)$ és $\nu(X)$ közül legalább az egyik véges.*

Bizonyítás. A 10.3 lemma szerint $\pi(X)$ és $-\nu(X)$ is értéke ϑ-nak, de a 9.3 tétel szerint nem lehet mindkettő végtelen.

10.6. következmény. *$\vartheta(X)$ akkor és csak akkor véges, ha $\pi(X)$ és $\nu(X)$ véges.*
Minden komplex mérték totális variációja véges.

Bizonyítás. Az első állitás triviális, a komplexhez pedig bontsuk fel ϑ-t a valós és komplex részére. Nyilvánvaló, hogy $Re\vartheta$ és $Im\vartheta$ véges előjeles mértékek. Állitjuk, hogy $\tau \leqslant \tau_{Re\vartheta} + \tau_{Im\vartheta}$. Ez azért igaz, mert

$$\tau_{Re\vartheta} + \tau_{Im\vartheta} \geqslant |Re\vartheta| + |Im\vartheta| \geqslant |\vartheta|$$

. Mivel τ a legkisebb $|\vartheta|$-t majoráló mérték, kész vagyunk.

Az előjeles mérték, mint integrál

10.7. következmény. *Ha ϑ előjeles mérték, a pozitív, negatív és totális variációi π, ν és τ, akkor bármely $A \in \mathcal{M}$ mérhető halmazra*

$$\vartheta(A) = \int_A (\chi_P - \chi_N)\ \mathrm{d}\tau.$$

Tehát, minden előjeles mérték előáll integrálként...

10.8. *kérdés.* Vajon igaz-e valami hasonló összefüggés komplex mértékekre? Avagy, ha ϑ komplex mérték, akkor létezik-e olyan mérhető f függvény, amelyre $|f| = 1$, és bármely A mérhető halmazra

$$\vartheta(A) = \int_A f\ \mathrm{d}\tau?$$

11. Lebesgue-felbontás

Mérték tartója. Abszolút folytonos és szinguláris mértékek. Adott mértéknél nem nagyobb maximális szinguláris mérték. Lebesgue-felbontás. Egyértelműség.

11.1. *mese.* A következő fejezetekben azt fogjuk vizsgálni, hogy milyen előjeles és komplex mértékek írhatók fel integrál alakban.

Vegyük elő újra azt az esetet, amikor mértéket valamilyen függvény integráljaként definiáltunk: mondjuk $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, f olyan mérhető függvény, amelynek létezik integrálja X-en, és bármely $A \in \mathcal{M}$-re $\vartheta(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu$. Speciálisan, ha $f : R \to \overline{R}$ Borel-mérhető, és létezik a Lebesgue-integrálja, akkor $\vartheta(A) = \int_A f \mathrm{d}\lambda$ egy előjeles Borel-mérték.

Könnyű mutatni olyan mértéket, amely nem áll elő Lebesgue-integrál alakban, pl. a számlálómérték, vagy a Dirac-delta ($\delta(A) = 1$, ha $0 \in A$, egyébként 0). Nincs olyan Borel- vagy Lebesgue-mérhető f függvény, amelyre $\int_A f \mathrm{d}\lambda = |A|$ vagy $\int_A f \mathrm{d}\lambda = \delta(A)$ teljesülhetne.

Mindkét példánkban közös, hogy van egy olyan λ-nullmértékű A halmaz, amelyben $\vartheta(A) \neq 0$. Márpedig nullmértékű halmazon az integrál is nulla.

Most is egy közös $(X, \mathcal{M})$ mérhető téren fogunk dolgozni.

11.2. definíció. Az $A \in \mathcal{M}$ halmaz a ϑ előjeles/komplex mértéknek "tartója", ha az $X \backslash A$ halmazon ϑ konstans 0.

Például az $X = P \cup N$ Hahn-felbontásban π-nek a P, a ν-nek N egy tartója.

11.3. definíció. Legyen α és β két komplex vagy előjeles mérték az $(X, \mathcal{M})$ mérhető téren.

(1) Az α abszolút folytonos a β-ra nézve, ha bármely $H \in \mathcal{M}$ esetén, ha $\beta(H) = 0$, akkor $\alpha(H) = 0$. Jele: $\alpha \ll \beta$,

(2) Az α és a β szinguláris egymásra nézve, ha X felbomlik két diszjunkt halmazra, $X = A \cup B$ úgy, hogy $\alpha|_B = 0$ és $\beta|_A = 0$. Avagy, α-nak és β-nak van diszjunkt tartója. Ezzel ekvivalens: α-nak van β-nullmértékű tartója. Jele: $\alpha \perp \beta$.

(3) Ha előjeles vagy komplex mértékekről van szó, akkor ekvivalens definíciót kapunk, ha a mértékeket a totális variációjukra cseréljük: Ha ϑ a H halmaz minden részén 0, akkor a totális variáció is 0.

11.4. *példa.* Ha $f : X \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, és μ mérték, akkor a $\varphi(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu$ előjeles mérték abszolút folytonos μ-re nézve.

Ha μ abszolút majorálja a ϑ előjeles mértéket, akkor $\vartheta \ll \mu$.

Ha ϑ előjeles mérték, és a variációi τ, π és ν, akkor $\vartheta \ll \tau$, $\pi \ll \tau$, $\nu \ll \tau$, $\pi \perp \nu$.

11.5. lemma.

1. Ha $\alpha \ll \beta$ és $\alpha \perp \beta$, akkor $\alpha = 0$.

2. Ha $\alpha \ll \beta$ és $\beta \ll \gamma$, akkor $\alpha \ll \gamma$. ($\ll$ egy tranzitív reláció, mint például az "osztója", a "részhalmaza" vagy a "megette".)

3. Ha $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \geqslant 0$ mértékek, akkor $\alpha_1 \ll \sum \alpha_k$.

4. Ha $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \ll \beta$, akkor $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \ll \beta$.

5. Ha $\alpha \ll \beta$ és $\beta \perp \gamma$, akkor $\alpha \perp \gamma$.

6. Ha $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \perp \beta$, akkor $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \perp \beta$.

Bizonyítás. 1. Legyen α és β egy-egy, diszjunkt tartója A, illetve B. Bármely H-ra $\alpha(H \backslash A) = 0$, mert az A halmaz tartója α-nak; továbbá $\beta(H \cap A) = 0$, mert A diszjunkt β tartójától. De $\alpha \ll \beta$ miatt ebből következik, hogy $\alpha(H \cap A) = 0$. Így $\alpha(H) = \alpha(H \backslash A) + \alpha(H \cap A) = 0$.

2. Ha $\gamma(H) = 0$, akkor $\beta(H) = 0$, de akkor $\alpha(H) = 0$.

3. A tagot majorálja az összeg.

4. Ha $\beta(H) = 0$, akkor minden k-ra $\alpha_k(H) = 0$, de akkor ezek összege is 0.

5. Legyen β és γ egy-egy diszjunkt tartója B, illetve C. A B-n kívül β konstans 0, de akkor α is. Ezért B az α mértéknek is tartója.

6. Mindegyik α_n-nek van egy β-nullmértékű A_n tartója. Az $A = \bigcup A_n$ halmaz tartója a $\sum \alpha_n$ mértéknek, és β-nullmértékű.

11.6. tétel (Lebesgue-felbontás)**.** *Legyen ϑ σ-véges előjeles vagy komplex mérték, $\mu \geqslant 0$ σ-véges mérték a közös $(X, \mathcal{M})$ mérhető téren.*

Ekkor ϑ egyértelműen felbontható egy μ-re nézve abszolút folytonos és egy μ-re nézve szinguláris előjeles, illetve komplex mérték összegére, azaz egyértelműen vannak olyan $\alpha \ll \mu$ és $\beta \perp \mu$ előjeles, illetve komplex mértékek, amelyekre $\vartheta = \alpha + \beta$.

11.7. *megjegyzés.* Arra nem is lesz szükségünk, hogy μ σ-véges.

Bizonyítás.

1. eset: ϑ véges.

Konstruálunk egy maximális szinguláris mértéket; ez lesz β, a maradék α.

Legyen ϑ totális variációja τ, legyen $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{M} : \mu(N) = 0\}$ a μ-nullmértékű halmazok gyűrűje, és legyen

$$s = \sup\{\tau(N) : N \in \mathcal{N}\}.$$

A jobboldalon a halmazban szerepel a $0 = \tau(\varnothing)$, így a definíció értelmes, és $s \geqslant 0$. Az is igaz, hogy bármely $N \in \mathcal{N}$-re $\tau(N) \leqslant \tau(X)$, így $s \leqslant \tau(X)$, ami véges (mert véges mérték totális variációja is véges).

A szuprémumot tetszőleges pontossággal megközelíthetjük: minden pozitív egész n-hez van egy olyan $Z_n \in \mathcal{N}$ halmaz, amelyre $\tau(Z_n) > s - \frac{1}{n}$. Legyen $Z = \bigcup Z_n$; ez megszámlálható sok μ-nullmértékű hamaz uniója, ez is μ-nullmértékű: $Z \in \mathcal{N}$.

Bármely n-re $Z_n \subset Z$; a τ monotonitása miatt

$$\forall n \qquad s - \frac{1}{n} < \tau(Z_n) \leqslant \tau(Z) \leqslant s,$$

az $n \to \infty$ határátmenetből

$$\tau(Z) = s.$$

Tehát a szuprémum valójában maximum.

Ezek után legyen $H \in \mathcal{M}$ esetén

$$\alpha(H) = \vartheta(H \backslash Z), \qquad \beta(H) = \vartheta(H \cap Z),$$

Az világos, hogy $\alpha(H) + \beta(H) = \vartheta(H)$.

A Z halmaz a β mértéknek μ-nullmértékű tartója, tehát $\beta \perp \mu$.

Annak igazolásához, hogy $\alpha \ll \mu$, vegyünk egy tetszőleges μ-nullmértékű N halmazt. Erre $N \cup Z$ is μ-nullmértékű, és

$$0 \leqslant \big|\alpha(N)\big| = \big|\vartheta(N \setminus Z)\big| \leqslant \tau(N \setminus Z) = \tau(N \cup Z) - \tau(Z) \leqslant s - s = 0.$$

Tehát, ha $\mu(N) = 0$, akkor $\alpha(N) = 0$; tényleg $\alpha \ll \mu$.

Az egyértelműség bizonyítása:

Tegyük fel, hogy kétféle Lebesgue-felbontás is van:

$$\vartheta = \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2.$$

Ekkor az

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_2 - \beta_1$$

mérték egyszerre abszolút folytonos és szinguláris, vagyis konstans 0.

2. eset: ϑ σ-véges.

Bontsuk fel az alaphalmazt megszámlálható sok, páronként diszjunkt ϑ-véges cellára: $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Mindegyik X_n cellán a $\vartheta\big|_{X_n}$ mérték véges, így van egy egyértelmű Lebesgue-felbontása: $\vartheta\big|_{X_n} = \alpha_n + \beta_n$. Ezeket próbáljuk — kellő óvatossággal — összeadni.

Az α_n és β_n-nek diszjunkt tartója is létezik: legyen α_n tartója $A_n \subset X_n$, a β_n tartója $B_n \subset X_n$, ekkor tehát $H \subset X_n$ esetén $\alpha_n(H) = \vartheta(H \cap A_n)$ és $\beta_n(H) = \vartheta(H \cap B_n)$.

Ezek után legyen $A = \bigcup A_n$, $B = \bigcup B_n$,

$$\alpha(H) = \vartheta(H \cap A) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(H \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(H \cap X_n),$$
$$\beta(H) = \vartheta(H \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(H \cap B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(H \cap X_n).$$

Világos hogy ez a definíció értelmes, $\alpha + \beta = \vartheta$, $\alpha \ll \mu$ és $\beta \perp \mu$.

Az egyértelműséghez tegyük fel, hogy $\alpha_1 + \beta_1$ és $\alpha_2 + \beta_2$ is Lebesgue-felbontás; ekkor mindegyik X_n-re megszorítva a $\vartheta\big|_{X_n}$ mértéknek Lebesgue-felbontása a $\alpha_1\big|_{X_n} + \beta_1\big|_{X_n}$ és $\alpha_2\big|_{X_n} + \beta_2\big|_{X_n}$. A véges esetben a felbontás egyértelmű, ezért $\alpha_1\big|_{X_n} = \alpha_2\big|_{X_n}$ és $\beta_1\big|_{X_n} = \beta_2\big|_{X_n}$; de ezeket összeadva visszakapjuk az eredeti mértékeket.

11.8. *megjegyzés* (**KT**). Az egyértelműséget általános esetben is bizonyíthatjuk: tegyük fel, hogy $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$, α_i abszulút folytonos, β_i szinguláris μ-re nézve. $\beta_i \perp \mu \Rightarrow \ \exists A_i : \beta_i|_{X \setminus A_i} = 0$, és $\mu(A_i) = 0$. Ezért $\beta_i|_{X \setminus (A_1 \cup A_2)} = 0$, azaz $\beta_1|_{X \setminus (A_1 \cup A_2)} = \beta_2|_{X \setminus (A_1 \cup A_2)} (= 0) \Rightarrow \alpha_1|_{X \setminus (A_1 \cup A_2)} = \alpha_2|_{X \setminus (A_1 \cup A_2)}$. Továbbá $\mu(A_i) = 0$ és $\alpha_i \ll \mu$ miatt $\alpha_i(A_j) = 0$, így $\alpha_1|_{(A_1 \cup A_2)} = \alpha_2|_{(A_1 \cup A_2)} (= 0)$. Ismét $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$-re hivatkozva kapjuk, hogy $\beta_1|_{(A_1 \cup A_2)} = \beta_2|_{(A_1 \cup A_2)}$. Ezt összevetve az előző egyenlőségekkel adódik, hogy $\alpha_1 = \alpha_2$ és $\beta_1 = \beta_2$.

11.9. *megjegyzés.* Ha ϑ nem σ-véges, akkor nem biztos, hogy létezik Lebesgue-felbontás. Legyen például $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}$, $\mu = \lambda$ és ϑ a számlálómérték. Bármely pont Lebesgue-mértéke 0, a számlálómértéke poztív, így az abszolút folytonos rész tartója csak az üres halmaz lehetne. A szinguláris rész tartója csak Lebesgue-nullmértékű lehet. Ez a kettő együtt nem adhatja ki a teljes $\mathbb{R}$-et.

12. Radon–Nikodym derivált

Radon–Nikodym derivált. Radon–Nikodym tétel. Helyettesítéses integrálás. A totális variáció szerinti RN derivált. Előjeles és komplex mérték szerinti integrál definíciói.

12.1. definíció. Legyen $\mu \geqslant 0$ mérték, és legyen ϑ előjeles vagy komplex mérték az $(X, \mathcal{M})$ mérhető téren. Az $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, illetve $f : X \to \mathbb{C}$ mérhető függvényt a ϑ mérték μ szerinti "Radon–Nikodym-deriváltjának" nevezzük, ha bármely $H \in \mathcal{M}$-re $\vartheta(H) = \int_H f \mathrm{d}\mu$.

Használatos az $f = \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\mu}$ jelölés is: $\int_H \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu = \int_H \mathrm{d}\vartheta$.

12.2. *megjegyzés.* Látni fogjuk, hogy a Radon-Nikodym derivált, ha létezik egyáltalán, csak μ-m.m. egyértelmű; ezért kényelmesebb a függvények "μ-m.m.-egyenlő" relációja szerinti ekvivalencia-osztályokon értelmezni.

12.3. *megjegyzés.* A Radon–Nikodym-derivált létezésének triviális szükséges feltétele, hogy $\vartheta \ll \mu$ legyen, mert nullmértékű halmazokon az integrál is mindig nulla.

Ugyanakkor az abszolút folytonosság önmagában nem elég. Pl. $\mathbb{R}$ Borel-halmazain nem létezik a Lebesgue-mértéknek Radon–Nikodym-deriváltja a számlálómérték szerint, mert

$$\int_H f \mathrm{d}|.| = \sum_{a \in H} f(a),$$

és az egyelemű halmazokra ez azt adja, hogy f konstans 0, de a konstans 0 integrálja minden halmazon 0.

12.4. tétel (Radon–Nikodym)**.** *Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ szigma-véges mérték, és legyen α előjeles vagy komplex mérték az $(X, \mathcal{M})$ mérhető téren, és tegyük fel, hogy $\alpha \ll \mu$.*

Ekkor létezik a $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\mu}$ Radon–Nikodym derivált, vagyis létezik olyan $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, illetve $X \to \mathbb{C}$ μ-mérhető függvény, amelyre bármely $H \in \mathcal{M}$ esetén $\alpha(H) = \int_H f \mathrm{d}\mu$.

A Radon–Nikodym derivált μ-majdnem egyértelmű, vagyis ha f és g is Radon–Nikodym derivált, akkor $f = g$ μ-m.m.

Bizonyítás. I.a eset: $\alpha \geqslant 0$, mindkét mérték véges.

Legyen

$$\Phi = \left\{ f : X \to [0, \infty] \ \text{ mérhető}, \ \forall H \in \mathcal{M} \quad \int_H f \mathrm{d}\mu \leqslant \alpha(H) \right\}$$

a nem túl nagy függvények halmaza, és

$$s = \sup \left\{ \int_X f \mathrm{d}\mu : f \in \Phi \right\}$$

Világos, hogy $0 \leqslant s \leqslant \alpha(X)$.

(1) $0 \in \Phi$ (trivi).

(2) Ha $g, h \in \Phi$, akkor $m = \max(g, h) \in \Phi$.

Biz. Legyen $A = X(g \geqslant h)$ és $B = X(g < h)$. Bármely H-ra

$$\int_H m \mathrm{d}\mu = \int_{H \cap A} g \mathrm{d}\mu + \int_{H \cap B} h \mathrm{d}\mu \leqslant \alpha(H \cap A) + \alpha(H \cap B) = \alpha(H).$$

(3) Ha $g_1, g_2, \ldots \in \Phi$ és $g_1 \leqslant g_2 \leqslant \ldots$, akkor $h = \lim g_n \in \Phi$.

Biz. Bármely $H \in \mathcal{M}$-re és n-re

$$\int_H g_n \mathrm{d}\mu \leqslant \alpha(H);$$

A monoton konvergencia tételből

$$\int_H h\mathrm{d}\mu \overset{\text{mkt}}{=} \lim \int_H g_n \mathrm{d}\mu \leqslant \alpha(H).$$

(4) Van olyan $f \in \Phi$, amelyre $\int_X f\mathrm{d}\mu = s$. Avagy, a szuprémum maximum is.

Biz. Vegyünk egy olyan $g_1, g_2, \ldots \in \Phi$ sorozatot, amelyre $\int_X g_n \mathrm{d}\mu \to s$, és legyen $f_n = \max(g_1, \ldots, g_n) \in \Phi$. Ekkor $0 \leqslant g_n \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$; legyen $f = \lim f_n$. Ekkor $\int_X g_n\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X f_n\mathrm{d}\mu \leqslant s$; a rendőr-elv miatt $\int_X f_n\mathrm{d}\mu \to s$. A monoton konvergencia tétel miatt $\int_X f\mathrm{d}\mu = \lim \int_X f_n\mathrm{d}\mu = s$.

(5) $s = \alpha(X)$.

Biz: indirekt. tegyük fel, hogy $s < \alpha(X)$. Ekkor van olyan $\varepsilon > 0$ amire $\varepsilon \cdot \mu(X) < \alpha(X) - s = \alpha(X) - \int_X f\mathrm{d}\mu$.

Legyen

$$\varphi(H) = \alpha(H) - \int_H (f+\varepsilon)\mathrm{d}\mu = \alpha(H) - \int_H f\mathrm{d}\mu - \varepsilon \cdot \mu(H).$$

Ekkor φ előjeles mérték, $\varphi \ll \mu$ és $\varphi(X) > 0$.

Legyen φ Hahn-felbontása $X = P \cup N$. Ekkor tehát bármely $H \subset P$ esetén $\varphi(H) \geqslant 0$, azaz $\int_H (f+\varepsilon)\mathrm{d}\mu \leqslant \alpha(H)$.

Mivel $\varphi(X) > 0$, ezért $\varphi(P) > 0$; viszont $\varphi \ll \mu$ miatt ebből következik, hogy $\mu(P) > 0$.

Legyen most $g = f + \varepsilon \cdot \chi_P$. Ez a függvény Φ-beli, mert bármely $H \in \mathcal{M}$-re

$$\int_H g\mathrm{d}\mu = \int_{H\cap N} f\mathrm{d}\mu + \int_{H \cap P} (f+\varepsilon)\mathrm{d}\mu \leqslant \alpha(H\cap N) + \alpha(H \cap P) = \alpha(H).$$

Ugyanakkor

$$\int_X g\mathrm{d}\mu = \int_X f\mathrm{d}\mu + \varepsilon \cdot \mu(P) > \int_X f\mathrm{d}\mu = s,$$

ellentmondás.

(6) Minden H-ra $\alpha(H) = \int_H f\mathrm{d}\mu$.

Biz. $\psi(H) = \alpha(H) - \int_H f\mathrm{d}\mu \geqslant 0$ (mert $f \in \Phi$) mérték, de $\psi(X) = 0$ ($\int_X f\mathrm{d}\mu = s = \alpha(X)$ miatt), tehát $\psi(H) = 0$.

I.b eset: α véges előjeles mérték. (μ véges)

Vegyük α Jordan-felbontását: $\alpha = \pi - \nu$, végesek. Mivel $\pi, \nu \ll \alpha \ll \mu$, a pozitív és negatív variációnak is létezik Radon–Nikodym deriváltja.

I.c eset: α (véges) komplex mérték. (μ véges)

Az α valós és képzetes része is véges, abszolút folytonos mérték, van Radon–Nikodym deriváltjuk.

Egyértelműség:

Elég a valós esetre. Ha f és g is Radon–Nikodym derivált, akkor legyen $A = X(f > g)$ és $B = X(f < g)$. Ekkor

$$\int_A (f-g)\mathrm{d}\mu = \int_A f\mathrm{d}\mu - \int_A g\mathrm{d}\mu = \alpha(A) - \alpha(A) = 0;$$

A baloldalon az integrandus pozitív; az integrál csak úgy lehet 0, ha $\mu(A) = 0$. Hasonlóan látjuk, hogy $\mu(B) = 0$. Így hát $f = g$ μ-m.m.

II.a eset: α előjeles, és σ-véges. ((innentől μ σ-véges))

Legyen α Jordan-felbontása $\alpha = \pi - \nu$.

Osszuk fel a teret diszjunkt cellákra: $X = \bigcup X_n$ úgy, hogy minden cellán α és μ is véges. Mindegyik X_n cellán van π-nek és ν-nek is Radon–Nikodym deriváltja; legyenek ezek

$$g_n = \frac{\mathrm{d}\,\pi|_{X_n}}{\mathrm{d}\,\mu|_{X_n}} \quad \text{és} \quad h_n = \frac{\mathrm{d}\,\nu|_{X_n}}{\mathrm{d}\,\mu|_{X_n}};$$

ezekből készítsünk egy-egy nagy közös g, illetve h függvényt, amelynek a cellákra vett megszorításai a RND-k:

$$g(x) = g_n(x) \quad \text{ha } x \in X_n; \qquad h(x) = h_n(x) \quad \text{ha } x \in X_n.$$

Azt állítjuk, hogy $f = g - h$ jó lesz.

Bármely H-ra

$$\pi(H) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(H \cap X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{H \cap X_n} g_n \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{H \cap X_n} g \mathrm{d}\mu = \int_H g \mathrm{d}\mu$$

és ugyanígy

$$\nu(H) = \int_H h \mathrm{d}\mu.$$

A $\pi(X)$ és $\nu(X)$ közül az egyik véges, ezért g és h közül valamelyik μ-m.m. véges, ezért

$$\alpha(H) = \pi(H) - \nu(H) = \int_H g \mathrm{d}\mu - \int_H h \mathrm{d}\mu = \int_H (g - h) \mathrm{d}\mu = \int_H f \mathrm{d}\mu.$$

Egyértelműség: az f μ-m.m. egyértelmű mindegyik cellán, tehát a megszámlálható sok cellán együtt is.

II.b eset: α komplex, σ-véges. (μ σ-véges)

Külön-külön létezik és m. egyértelmű a valós és a képzetes rész Radon–Nikodym deriváltja.

III. eset: α nem σ-véges (μ σ-véges).

Feltehetjük, hogy $\alpha(X) = \infty$ (a másik eset a $-\infty$ lenne). Azt állítjuk, hogy X felbontható két részre: $X = S \cup V$ úgy, hogy S-en α σ-véges, a V részhalmazain pedig $\alpha(H) = \infty$ ha $\mu(H) > 0$. Ha ez sikerül, akkor készen vagyunk: S-en csinálhatunk Radon-Nikodym deriváltat úgy, mint eddig; V-n pedig f-et definiálhatjuk ∞-nek: ha valamilyen $H \subset V$-re $\mu(H) = 0$, akkor a H-n vett integrál is 0; ha pedig $\mu(H) > 0$, akkor ugyan az integrál $f = \infty$ miatt végtelen, de $\alpha(H)$ is végtelen lesz V választása miatt.

A teret felcellázzuk olyan cellákra, amelyeken μ véges; vegyük észre, hogy az állításunkat elég egy cellára igazolni. Tehát azt is feltehetjük, hogy $\mu(X)$ véges.

Minden n-re legyen $\varphi_n = \alpha - n \cdot \mu$; ez előjeles mérték, a Hahn-felbontása legyen $X = P_n \cup N_n$. A definíció miatt $\varphi_{n+1} \leqslant \varphi_n$, így $P_{n+1} \subset P_n$ és $N_{n+1} \supset N_n$. Legyen $S = \bigcup N_n$ és $V = \bigcap P_n$.

Mivel $0 \geqslant \varphi_n(N_n) = \alpha(N_n) - n \cdot \mu(N_n)$, ezért $-\infty < \alpha(N_n) \leqslant n \cdot \mu(N_n) < \infty$ vagyis $\alpha(N_n)$ véges. Ezért α valóban σ-véges S-en ($S = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$, és N_n-en α az előbbiek szerint véges).

Ha $H \subset V = \bigcap P_n$ és $\mu(H) > 0$, akkor minden n-re $H \subset P_n$; akkor $\varphi_n(H) \geqslant 0$, $\alpha(H) \geqslant n \cdot \mu(H)$. Ez minden n-re igaz, tehát $\alpha(H) = \infty$.

Ezek után a Radon–Nikodym deriváltat előállíthatjuk a σ-véges S részen úgy mint eddig, a V halmazon pedig legyen $f = \infty$.

Egyértelműség: az S-en az egyértelműséget már tudjuk; azt kell igazolni, hogy a V halmazon csak a (μ-m.m.) konstans ∞ lehet a RND. Legyen tehát f RND a V halmazra megszorítva; ekkor tehát minden $H \subset V$ és $\mu(H) > 0$ esetén $\int_H f \mathrm{d}\mu = \infty$.

Legyen $V_n = V(f \leqslant n)$. Mivel $\alpha(V_n) = \int_{V_n} f \mathrm{d}\mu \leqslant \mu(V_n) \cdot n < \infty$ véges, ez csak úgy lehet, ha $\mu(V_n) = 0$. De ekkor a $V(f < \infty) = \bigcup V_n$ halmaz μ-nullmértékű. Tehát a V halmazon $f = \infty$ μ-m.m.

12.5. tétel. *Legyenek $\alpha \ll \beta$ (pozitív) mértékek $(X, \mathcal{M})$-en, $g = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\beta}$ és $f \in \mathcal{L}(\alpha)$. Ekkor*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\alpha = \int_X fg \, \mathrm{d}\beta.$$

Bizonyítás. Ha f egyszerű függvény, akkor trivi, majd monoton konvergencia.

12.6. *megjegyzés* (**KT**). A Radon-Nikodym derivált formulájának megjegyzési módja ugyan az, mint a helyettesítéses integrálnál: hagyjuk el az integráljelet, majd f-et. Átosztva $\mathrm{d}\beta$-val adódik az állítás.

12.7. lemma. *Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mérték, f mérhető függvény, amelyre létezik $\int_X f\mathrm{d}\mu$. Ekkor a $\vartheta(H) = \int_H f\mathrm{d}\mu$ előjeles/komplex mérték totális variációja*

$$\tau(H) = \int_H |f|\mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. Trivi, hogy bármely $H \subset X$-re

$$\left|\vartheta(H)\right| = \left|\int_H f\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_H |f|\mathrm{d}\mu.$$

A másik irányhoz vegyünk egy $n \geqslant 4$ egészt, és $k = 1, \dots, n$ esetén legyen $A_k = \left\{x \in H : \frac{2\pi(k-1)}{n} \leqslant \arg f(x) < \frac{2\pi k}{n}\right\}$.

$$\tau(H) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \left|\vartheta(A_k)\right| = \sum_{k=1}^{n} \left|\int_{A_k} f\mathrm{d}\mu\right| \geqslant \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}\left(e^{-i\frac{2\pi k}{n}} \int_{A_k} f\mathrm{d}\mu\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} \operatorname{Re}\left(e^{-i\frac{2\pi k}{n}} f\right)\mathrm{d}\mu \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} |f| \cos\frac{2\pi}{n}\mathrm{d}\mu = \cos\frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} |f|\mathrm{d}\mu = \cos\frac{2\pi}{n} \int_H |f|\mathrm{d}\mu.$$

Így hát

$$\cos\frac{2\pi}{n} \int_H |f|\mathrm{d}\mu \leqslant \tau(H) \leqslant \int_H |f|\mathrm{d}\mu,$$

és $n \to \infty$-vel kész.

12.8. tétel. *Ha ϑ komplex mérték $(X, \mathcal{M})$-en, és a totális variációja τ, akkor van olyan f függvény, amelyre $|f| = 1$ és*

$$\vartheta(H) = \int_H f\mathrm{d}\tau.$$

Bizonyítás. Legyen $g = \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\tau}$, avagy $\vartheta(H) = \int_H g\mathrm{d}\tau$. Az előző lemma szerint $\tau(H) = \int_H |g|\mathrm{d}\tau$, vagyis $\int_H(|g| - 1)\mathrm{d}\tau = 0$ minden H-ra, ami azt jelenti, hogy $|g| = 1$ τ-mm. Ahol g nem egységnyi, ott tetszés szerint megváltoztathatjuk...

12.9. definíció. Előjeles/komplex mérték szerinti integrál: ha ϑ előjeles/komplex mérték és a totális variációja τ, akkor legyen

$$\int_H f\mathrm{d}\vartheta := \int_H f\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau.$$

Alternatív definícó: Ha ϑ előjeles mérték és a variációi π, ν, akkor

$$\int_H f\mathrm{d}\vartheta := \int_H f\mathrm{d}\pi - \int_H f\mathrm{d}\nu.$$

13. A maximális operátor

Differenciálbázis. Alsó és felső deriváltak. Szimmetrikus, közönséges és erős derivált. Maximális operátor. A maximális operátor, az alsó és a felső derivált mérhetősége. A maximális operátor tétele. Lokálisan véges mérték alsó és felső deriváltja m.m. véges.

Most $\mathbb{R}^p$-beli lokálisan véges előjeles Borel-mértékeket fogunk deriválni.

Differenciálbázisok; előjeles mérték deriváltja

13.1. definíció. Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(G)$. A $\mathcal{D} \subset G \times \mathcal{B}$ halmaz "differenciálbázis", ha minden $(a, A) \in \mathcal{D}$ esetén A korlátos, $\lambda(A) > 0$, és $a \in G$ és $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $(a, A) \in \mathcal{D}$, amelyre $A \subset B(a, \varepsilon)$.

A $\mathcal{D}$ differenciálbázis "reguláris", ha minden $a \in G \in \mathcal{D}$-hez van olyan $\varrho(a) > 0$ sűrűség, hogy minden (a, A)-ra van olyan r, hogy $A \backslash B(a, r)$ nullmértékű és $\lambda(A) \geqslant \varrho(a) \cdot \lambda(B(a, r))$, vagyis ha vesszük a legkisebb, az A-t majdnem tartalmazó gömböt, akkor az A a gömbnek legalább a $\varrho(a)$ részét kitölti.

A $\mathcal{D}$ differenciálbázis "egyenletesen reguláris", ha a $\varrho(x)$ függvény konstans.

13.2. definíció. Legyen μ előjeles Borel-mérték G-n, $\mathcal{D}$ differenciálbázis. A μ alsó és felső deriváltja az $a \in G$ pontban legyen

$$\underline{D_{\mathcal{D}}}\mu(a) = \lim_{r \to 0+} \inf \left\{ \frac{\mu(A)}{\lambda(A)} : (a, A) \in \mathcal{D}, A \subset B(a, r) \right\},$$

illetve

$$\overline{D_{\mathcal{D}}}\mu(a) = \lim_{r \to 0+} \sup \left\{ \frac{\mu(A)}{\lambda(A)} : (a, A) \in \mathcal{D}, A \subset B(a, r) \right\}.$$

Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{D}$ bázis differenciálja μ-t az a pontban, ha az alsó és a felső derivált egyenlő és véges. Ilyenkor $D_{\mathcal{D}}\mu(a)$-val is jelöljük.

13.3. *példa.* 1. Legyen μ egydimenziós Lebesgue-Stieltjes mérték, aminek az eloszlásfüggvénye F.

A $\mathcal{D}_1 = \{(a, [a, a + r)) : a \in G, r > 0\}$ bázis szerinti derivált

$$D_{\mathcal{D}_1}\mu(a) = \lim_{r \to +0} \frac{\mu\big([a, a + r)\big)}{\lambda\big([a, a + r)\big)} = \lim_{r \to +0} \frac{F(a + r) - F(a)}{r} = F'(a + 0);$$

a $\mathcal{D}_2 = \{(a, [a - r, a)) : a \in G, r > 0\}$ bázis szerinti derivált

$$D_{\mathcal{D}_2}\mu(a) = \lim_{r \to +0} \frac{\mu\big([a - r, a)\big)}{\lambda\big([a - r, a)\big)} = \lim_{r \to +0} \frac{F(a) - F(a - r)}{r} = F'(a - 0);$$

a $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ bázis szerinti derivált $F'(a)$.

2. Szimmetrikus bázis: $\mathcal{D} = \{(a, B(a, r)) : r > 0\}$, a szimmetrikus bázis szerinti derivált a "szimmetrikus derivált".

3. Kockabázis: $\mathcal{D} = \{(a, Q) : Q \ni a$ tengelypárhuzamos, zárt kocka$\}$, ebből lesz a "közönséges derivált".

4. Téglabázis: $\mathcal{D} = \{(x, T) : T \ni x$ tengelypárhuzamos, zárt tégla$\}$, ebből lesz az "erős derivált".

A szimetrikus és a kockabázis egyenletesen reguláris, a téglabázis nem reguláris.

13.4. *megjegyzés* (**KT**). Bár természetes lenne, de a differenciálbázis definíciójában nem kötjük ki, hogy az a pont benne legyen a halmazban; például a $\mathcal{D}_2 = \{a, [a - r, a) : a \in G, r > 0\}$ differenciálbázisban a halmazok nem tartalmazzák az a pontot.

13.5. *megjegyzés.* $\mathbb{R}^p$ helyett tetszőleges metrikus térben is van értelme az előbbi fogalmaknak, ekkor a Lebesgue-mérték helyett azt a mértéket is szabadon megválaszthatjuk, ami szerint deriválunk.

13.6. lemma.

$$\overline{D}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \leqslant \overline{D}\vartheta_1 + \overline{D}\vartheta_2$$

$$\underline{D}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \geqslant \underline{D}\vartheta_1 + \underline{D}\vartheta_2$$

Ha ϑ_1 és ϑ_2 is differenciálható a $\mathcal{D}$ bázisban, akkor

$$D(\vartheta_1 + \vartheta_2) = D\vartheta_1 + D\vartheta_2.$$

Bizonyítás. A lim sup szub-, illetve a lim inf szuperadditivitásából következik

A továbbiakban $\mathcal{D}$ a szimmetrikus bázis, a legtöbb helyen nem is fogjuk kiírni. Sőt, egy darabig csak pozitív mértéket (ami majd a ϑ totális variációja lesz) fogjuk deriválni.

Először is azt fogjuk megmutatni, hogy Borel-mértékek deriváltjai Borel-mérhető függvények.

13.7. lemma. *Ha $\mu \geqslant 0$ Borel-mérték G-n, és $0 < t \leqslant \infty$ rögzített, akkor az*

$$f^t(x) = \sup\left\{\frac{\mu(B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} : 0 < r < t\right\}$$

függvény a.f.f., az

$$g^t(x) = \inf\left\{\frac{\mu(B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} : 0 < r < t\right\}$$

függvény f.f.f., ezért mindkettő Borel-mérhető.

Bizonyítás. (a) Rögzítsünk egy $a \in G$ pontot és egy $c < f^t(a)$ számot tetszőlegesen.

Vegyünk egy olyan c_1-et, amelyre $c < c_1 < f^t(a)$. Ehhez létezik olyan $A = B(a,r)$ úgy, hogy $r < t$ és $\dfrac{\mu(A)}{\lambda(A)} > c_1$.

Ha $\delta \leqslant \frac{t-r}{2}$ és $x \in B(a,\delta)$, akkor $B(a,r) \subset B(x, r+\delta) \subset B(a,t)$,

$$f^t(x) \geqslant \frac{\mu(B(x,r+\delta))}{\lambda(B(x,r+\delta))} \geqslant \frac{\mu(B(a,r))}{\left(\frac{r+\delta}{r}\right)^p \lambda(B(a,r))} > \left(\frac{r}{r+\delta}\right)^p c_1 > c,$$

az utolsó előtti egyenlőtlenség akkor igaz, ha δ elég kicsi.

Tehát bármely $c < f^t(a)$ esetén van olyan kicsi $\delta > 0$, hogy a $B(a,\delta)$ környezetben $f^t > c$. Vagyis az f^t függvény a.f.f.

(b) Ugyanígy, vegyünk egy $a \in G$ pontot és egy $c > g^t(a)$ számot tetszőlegesen, majd ezekhez egy c_1-et, amelyre $c > c_1 > g^t(a)$. Ehhez létezik olyan $A = B(a,r)$ úgy, hogy $r < t$ és $\dfrac{\mu(A)}{\lambda(A)} < c_1$.

Ha $\delta < r$ és $x \in B(a,\delta)$, akkor $B(x, r-\delta) \subset B(a,r) \subset B(a,t)$, és

$$g^t(x) \leqslant \frac{\mu(B(x,r-\delta))}{\lambda(B(x,r-\delta))} \leqslant \frac{\mu(B(a,r))}{\left(\frac{r-\delta}{r}\right)^p \lambda(B(a,r))} < \left(\frac{r}{r-\delta}\right)^p c_1 < c,$$

az utolsó egyenlőtlenség most is csak elég kicsi δ esetén igaz.

Tehát bármely $c > g^t(a)$ esetén van olyan kicsi $\delta > 0$, hogy a $B(a,\delta)$ környezetben $g^t < c$. Vagyis a g^t függvény f.f.f.

13.8. lemma. *Ha $\mu \geqslant 0$ Borel-mérték G-n, akkor $\overline{D}\mu$ és $\underline{D}\mu$ Borel-mérhető.*

Bizonyítás. Az előző lemma jelöléseivel

$$\overline{D}\mu(x) = \lim_{t\to+0} f^t(x) = \lim_{n\to\infty} f^{1/n}(x) \qquad \text{és} \qquad \underline{D}\mu(x) = \lim_{t\to+0} g^t(x) = \lim_{n\to\infty} g^{1/n}(x),$$

ahol $f^t(x)$ illetve $g^t(x)$ az előző lemma szerint a.f.f. illetve f.f.f., tehát Borel-mérhetőek, és Borel-mérhetők pontonkénti limesze is Borel-mérhető.

A maximális operátor

13.9. definíció. Legyen ϑ előjeles vagy komplex Borel-mérték, a totális variációja τ, és legyen $0 < t \leqslant \infty$. Ekkor legyen

$$M^t\vartheta(x) = \sup\left\{\frac{\tau(B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} : 0 < r < t\right\}.$$

Ha $t = \infty$, akkor a jelölésből elhagyhatjuk a t indexet: $M\vartheta$. Ha ϑ az f függvény integrálja, akkor írhatjuk azt is, hogy M^tf vagy Mf. Vagyis $Mf(x) = \sup\left\{\frac{\int_{B(x,r)}|f|\mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x,r))} : 0 < r\right\}$

Az M^t neve "maximális operátor" (mert mértékhez vagy függvényhez rendel függvényt), az $M^t\vartheta$ a "maximális függvény".

Triviális, hogy ha ϑ előjeles mérték, akkor $-M\vartheta \leqslant \underline{D}\vartheta \leqslant \overline{D}\vartheta \leqslant M\vartheta$ (lim inf és lim sup az inf és sup között van).

13.10. lemma. *Az $M^t\vartheta$ maximális függvény a.f.f., tehát Borel-mérhető.*

Bizonyítás. A 13.7 lemma első fele a τ mértékre.

13.11. lemma. *Véges sok gömb közül kiválaszthatóak páronként diszjunktak úgy, hogy a háromszorosuk az összes gömböt fedje (A $B(a, r)$ gömb háromszorosa $3B(a, r) = B(a, 3r)$).*

Bizonyítás. Legyen a gömbök $B_1, \ldots, B_n$ sorrendje olyan, hogy $r_1 \geqslant \ldots \geqslant r_n > 0$

A gömbök közül kiválasztunk néhányat, amelyek páronként diszjunktak. Mohón, a gömbök mindegyikét sorban vagy kiválasztjuk, vagy nem. A B_1-et kiválasztjuk. A B_2-t akkor választjuk ki, ha nem metszi B_1-et. Ha a $B_1, \ldots, B_{k-1}$ gömbökről már eldöntöttük, hogy kiválasztjuk-e: a B_k gömböt akkor választjuk ki, ha nem metszi egyik korábban kiválasztott gömböt sem.

Legyenek a kiválasztott gömbök $B_{i_1}, \ldots, B_{i_N}$; ezek páronként diszjunktak. Azt állítjuk, hogy a 3-szorosra nagyított $B(x_{i_1}, 3r_{i_1}), \ldots, (x_{i_N}, 3r_{i_N})$ gömbök lefedik $\bigcup_{i=1}^n B_i$-t. Vegyünk egy tetszőleges $x \in \bigcup_{i=1}^n B_i$ pontot; ezt valamelyik B_k gömb lefedi. Ha B_k kiválasztott gömb, akkor ennek 3-szoros nagyítása is fedi x-et. Ha B_k nem kiválasztott, akkor belemetsz egy nála korábban kiválasztott, tehát egy nála nem kisebb kiválasztott gömbbe: legyen ez B_j, és legyen y a B_k és B_j gömbök egy közös pontja. Ekkor $|x - x_j| \leqslant |x - x_k| + |x_k - y| + |y - x_j| < r_k + r_k + r_j \leqslant 3r_j$, így $x \in B(x_j, 3r_j)$.

13.12. lemma (A maximális operátor tétele). *Ha ϑ véges előjeles vagy komplex mérték a $G \subset \mathbb{R}^p$ halmazon, akkor*

$$\lambda(M\vartheta > t) \leqslant \frac{3^p\tau(G)}{t}.$$

Bizonyítás. Ha $K \subset G(M\vartheta > t)$ kompakt, akkor minden $x \in K$-hoz van olyan $r = r(x)$ sugár, amelyre $\frac{\tau(B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} > t$. $\bigcup_{x\in K} B(x, r(x))$ lefedi K-t; a kompaktság miatt kiválasztható közülük egy véges fedés; ezt a sugarak szerint csökkenő sorrendbe tesszük. Tehát vannak olyan $x_1, \ldots, x_n \in K$ pontok és $r_1 \geqslant \ldots \geqslant r_n > 0$ sugarak, avagy $B_k = B(x_k, r_k)$ gömbök, amelyek fedik K-t.

Ezek után alkalmazzuk az előző lemmát a gömbökre, kapunk olyan diszjunkt $B_{i_1}, \ldots, B_{i_N}$ gömböket, amelyekre $K \subset \bigcup_{k=1}^N 3B_{i_k}$. Tehát

$$\lambda(K) \leqslant \sum_{k=1}^N \lambda(B(x_{i_k}, 3r_{i_k})) = 3^p \sum_{k=1}^N \lambda(B(x_{i_k}, r_{i_k})) < 3^p \sum_{k=1}^N \frac{\tau(B(x_{i_k}, r_{i_k}))}{t} \leqslant \frac{3^p\tau(G)}{t}.$$

Ez minden kompakt $K \subset G$-re igaz, tehát a Lebesgue-mérték regularitása miatt a $G(M\vartheta > t)$ halmazra is.

13.13. következmény. *Ha ϑ lokálisan véges, akkor $\underline{D}\vartheta$ és $\overline{D}\vartheta$ is λ-m.m. véges.*

Bizonyítás. A G felbomlik megszámlálható sok olyan $G_1, G_2, \ldots$ gömbre, amelyen τ véges. Legyen $\vartheta_n(H) = \vartheta(H \cap G_n)$; ez egy véges előjeles mérték; az G_n gömbön belül ϑ és ϑ_n alsó és felső deriváltja megegyezik.

Mivel $-M\vartheta_n \leqslant \underline{D}\vartheta_n \leqslant \overline{D}\vartheta_n \leqslant M\vartheta_n$, bármely $t > 0$ esetén

$$\lambda(|\overline{D}\vartheta_n| = \infty) \leqslant \lambda(M\vartheta_n = \infty) \leqslant \lambda(M\vartheta_n > t) \leqslant \frac{3^p \tau_n(G)}{t}.$$

Az $t \to \infty$ határátmenetből

$$\lambda(|\overline{D}\vartheta_n| = \infty) = 0.$$

A G_n belsejében tehát $\overline{D}\vartheta$ m.m. véges, tehát a gömbök unióján is.

13.14. *megjegyzés* (**KT**). Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{L}_1$-operátor gyenge egy-egy tulajdonságú, ha teljesül rá a maximális operátor tétel. Azt mondjuk, hogy erős egy-egy tulajdonságú, ha tetszőleges $\mathcal{L}_1$ függvény $\mathcal{L}_1$-normáját legfeljebb konstansszorosára növeli.

A maximális operátor tétel függvényekre vonatkozó alakja a következő:

$$\lambda(Mf > t) \leqslant \frac{3^p \|f\|_1}{t}$$

Ennél erősebb lenne, ha

$$\|Mf\|_1 = c \cdot \|f\|_1$$

teljesülne alkalmas c konstansra, de ez sajnos általában nem igaz.

14. Borel-mértékek differenciálása

Lokálisan véges Borel-mérték akkor és csak akkor szinguláris, ha a deriváltja m.m. 0. Lebesgue-pont. Abszolút folytonos mérték m.m. differenciálható, és a deriváltja megegyezik a Radon–Nikodym deriválttal. Mérhető burok. Alsó és felső sűrűség. Sűrűségi tétel. [Petruska, 100–105. o.]

Lebesgue-pontok

14.1. definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}$ vagy $f : H \to \mathbb{C}$ mérhető. Az $x_0 \in \operatorname{int} H$ pont az f függvénynek "Lebesgue-pontja", ha

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\int_{B(x_0,r)} |f - f(x_0)| \mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x_0, r))} = 0.$$

Trivi, hogy minden folytonossági pont Lebesgue-pont.

14.2. *megjegyzés* (**KT**). Ezzel a definícióval az a célunk, hogy $\lim\limits_{r \to 0+} \frac{\int_{B(x_0,r)} f \mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x_0, r))} = f(x_0)$ teljesüljön (azaz a pont körül az integrálátlag egyenlő legyen a pontbeli függvényértékkel); és látszik, hogy a háromszög-egyenlőtlenség miatt a Lebesgue- pontokra ez valóban fennáll.

Az is világos, hogy ez nem teljesül minden függvényre: ha egy f függvényre és egy x_0 pontra véletlenül igaz, akkor $f(x_0) - t$ tetszőlegesen megváltoztatva a limesz változatlan marad, míg a jobb oldal nem.

14.3. definíció. Az f függvényt lokálisan integrálhatónak nevezzük H-n, ha minden pontnak van olyan környezete, amelyen az integrál véges (Vagy ekvivalensen: minden $K \subset H$ kompakt halmazon az integrál véges. Még ekvivalensebben: minden $K \subset H$ korlátos halmazon az integrál véges).

14.4. tétel. *Ha f lokálisan integrálható H-n, akkor H m.m. belső pontja Lebesgue-pontja f-nek.*

Bizonyítás. A H-t lefedhetjük olyan gömbökkel, amelyeken f integrálható, így elég integrálható f-re bizonyítani, vagyis $f \in L_1$ esetén.

Rögzítsünk két pozitív egészt, k-t és m-et.

Az L_1 térben sűrűn vannak az olyan "szép" függvények, amelyek véges sok téglalapon konstansok, azokon kívül az értékük 0. Legyen g egy olyan szép függvény, amelyre $\|f-g\|_1 < \frac{1}{k}$, és legyen $h = f-g$; ekkor tehát $\|h\|_1 < \frac{1}{k}$.

Ha egy x pont nem esik egyik téglalap határára sem, akkor x egy kis környezetében $g = 0$, és így

$$\int_{B(x,r)} |f - f(x)| \mathrm{d}\lambda = \int_{B(x,r)} |h - h(x)| \mathrm{d}\lambda \leqslant \int_{B(x,r)} \big(|h| + |h(x)|\big) \mathrm{d}\lambda,$$

(ez utóbbi egyenlőtlenség a háromszög-egyenlőtlenség miatt teljesül),

$$\frac{\int_{B(x,r)} |f - f(x)| \mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x,r))} \leqslant |h(x)| + \frac{\int_{B(x,r)} |h| \mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x,r))} \leqslant |h(x)| + Mh(x),$$

$$\limsup_{r\to 0+} \frac{\int_{B(x,r)} |f - f(x)| \mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x,r))} \leqslant |h(x)| + Mh(x).$$

Ha az x pontban $\limsup_{r\to 0+} \frac{\int_{B(x,r)} |f-f(x)| \mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x,r))} > \frac{1}{m}$, akkor ott $|h(x)|$ és $Mh(x)$ valamelyike legalább $\frac{1}{2m}$. Ezért

$$\lambda\left(\limsup_{r\to 0+} \frac{\int_{B(x,r)} |f - f(x)| \mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x,r))} > \frac{1}{m}\right) \leqslant \lambda\left(|h| > \frac{1}{2m}\right) + \lambda\left(Mh > \frac{1}{2m}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\int |h| \mathrm{d}\lambda}{1/(2m)} + \frac{3^p \int |h| \mathrm{d}\lambda}{1/(2m)} = 2m(1+3^p)\|h\|_1 < \frac{2m(1+3^p)}{k}.$$

Itt

$$\lambda\left(|h| > \frac{1}{2m}\right) \leqslant \frac{\int |h| \mathrm{d}\lambda}{1/(2m)}$$

a triviális Csebisev-tételből következik, míg

$$\lambda\left(Mh > \frac{1}{2m}\right) \leqslant \frac{3^p \int |h| \mathrm{d}\lambda}{1/(2m)}$$

a maximális operátor tételéből.

Ebből $k \to \infty$, majd $m \to \infty$ határátmenettel

$$\lambda\left(\limsup_{r\to 0+} \frac{\int_{B(x,r)} |f - f(x)| \mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x,r))} > \frac{1}{m}\right) = 0,$$

$$\lambda\left(\limsup_{r\to 0+} \frac{\int_{B(x,r)} |f - f(x)| \mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x,r))} > 0\right) = 0.$$

14.5. *megjegyzés* (**KT**). Azt az állítást, hogy: az L_1 térben sűrűn vannak az olyan "szép" függvények, amelyek véges sok téglán konstansok, azokon kívül az értékük 0; gyakorlaton bizonyítjuk.

A továbbiakban a fenti tétel következményeit vizsgáljuk.

14.6. következmény. *[**KT**] Ha f lokálisan integrálható H-n, akkor*

$$\lim_{r\to 0+} \frac{\int_{B(x_0,r)} f \mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x_0,r))} = f(x_0)$$

m.m. $x_0 \in H$-ban

Bizonyítás.

$$\left|\frac{\int_{B(x_0,r)} f \mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x_0,r))} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int_{B(x_0,r)} (f - f(x_0)) \mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x_0,r))}\right| \leqslant \frac{\int_{B(x_0,r)} |f - f(x_0)| \mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x_0,r))} \to 0.$$

Itt az egyenlőség azért teljesül, mert $f(x_0)$ átlaga önmaga; az egyenlőtlenség pedig azért, mert az integrál abszolútértéke legfeljebb az abszolútérték integrálja.

14.7. következmény. *[**KT**] Ha ϑ lok. véges, abszolút folytonos (a Lebesgue-mértékre nézve) előjeles mérték $\mathbb{R}^p$-n, akkor $D\vartheta$ λ-m.m. létezik és $D\vartheta = \dfrac{d\vartheta}{d\lambda}$ λ-m.m.*

Bizonyítás. A Radon-Nikodym tételt alkalmazva kapunk egy lokálisan integrálható $f = \dfrac{d\vartheta}{d\lambda}$ függvényt, amelyre $\vartheta(E) = \int_E f \mathrm{d}\lambda$ minden E halmazra. Erre a 14.6 következményt alkalmazva kész vagyunk, hiszen

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\int_{B(x_0,r)} f \mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x_0,r))} = D\vartheta(x_0).$$

14.8. *megjegyzés* (**KT**). Ezt később általánosítani fogjuk (megengedünk más differenciálbázist is a gömbökön kívül; illetve nem abszolút folytonos ϑ esetén a Lebesgue-felbontásának abszolút folytonos tagja fog bejönni.).

14.9. következmény (Lebesgue sűrűségi tétel mérhető halmazokra)**.** *[**KT**] Tetszőleges $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető halmazra*

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\lambda(H \cap B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} = 1$$

λ-m.m. $x \in H$, és

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\lambda(H \cap B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} = 0$$

λ-m.m. $x \in \mathbb{R}^p \backslash H$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 14.6 következményt $f = \chi_H$-ra.

14.10. definíció. A

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\lambda(H \cap B(x,r))}{\lambda(B(x,r))}$$

határértéket az x pont H-beli sűrűségének nevezzük, és $d(x,H)$-val jelöljük.
A H halmaz sűrűségi pontjai azon $x \in H$ pontok, melyekre $d(x,H) = 1$.

Ezekkel a definíciókkal 14.9-et a következőképpen fogalmazhatjuk meg: tetszőleges $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető halmaznak λ-m.m. pontja sűrűségi pontja.

14.11. *mese.* A szakasz hátralevő részében a tételek bizonyítását az olvasóra bízzuk.

14.12. *definíció* (Sűrűségtopológia). $H \subset \mathbb{R}^p$ d-nyílt (azaz a sűrűségtopológia szerint nyílt), ha $\forall x \in H: \ d(x,H) = 1$, azaz minden pontja sűrűségi pont.

14.13. *tétel. A sűrűségtopológia tényleg topológia.*

Bizonyítás. Trivi: a teljes tér, illetve üreshalmaz nyílt, és véges metszetre zárt.
Nem trivi: tetszőleges unióra zárt.

14.14. *lemma.* $\tau_e \subset \tau_d$, *vagyis a sűrűségtopológia bővebb, mint az euklideszi.*

Bizonyítás. Triviális.

14.15. *definíció.* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ approximatíve folytonos, ha τ_e-nyílt őse τ_d-nyílt.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ approximatíve folytonos az x_0 pontban, ha $\forall\ V_{f(x_0)}$ τ_e-nyílt környezetre $\exists\ U_{x_0}$ τ_d-nyílt környezet, hogy $f(U_{x_0}) \subset V_{f(x_0)}$.

14.16. *tétel.*

1. *f mérhető $\Leftrightarrow$ f approximatíve folytonos majdnem minden pontban.*
2. *f korlátos és approximatíve folytonos $\Rightarrow$ f deriváltfüggvény ($\exists\ F : F' = f$)*
3. *f approximatíve folytonos $\Rightarrow$ f Darboux és Borel (ez következik 2.-ből)*
4. *Ha f korlátos és f.f.f. vagy a.f.f., akkor f approximatíve folytonos $\Leftrightarrow$ f deriváltfüggvény*

14.17. *tétel.* $(\mathbb{R}^p, \tau_d)$ *összefüggő.*

Derivált és Radon–Nikodym derivált

14.18. lemma. *Ha β lok. véges, szinguláris Borel-mérték, akkor $D\beta = 0$ m.m.*

Bizonyítás. Komplex mérték esetén a valós és a képzetes részt külön-külön deriváljuk, ezért elég előjeles mértékekre bizonyítani. A 13.13. következményhez hasonlóan elég zárt gömbök belsejére bizonyítani, ezért az is feltehető, hogy β véges.

Legyen τ a β totális varációja; ez is véges Borel-mérték.

Rögzítsünk két pozitív egészt, k-t és m-et.

Legyen H a β egy Lebesgue-nullmértékű tartója. A τ lok. véges Borel-mérték, tehát reguláris; van olyan $K \subset H$ kompakt halmaz, amelyre $\tau(G \backslash K) < \frac{1}{k}$.

Legyen $\vartheta(A) = \beta(A \backslash K)$; ekkor persze ϑ totális variációja $\tau(A \backslash K)$. A K komplementuma nyílt, ezen ϑ és β alsó és felső deriváltja ugyanaz, tehát $\overline{D}\vartheta = \overline{D}\beta$ és $\underline{D}\vartheta = \underline{D}\beta$ λ-m.m.

Ezek után

$$\lambda\left(|\overline{D}\beta| > \frac{1}{m}\right) = \lambda\left(|\overline{D}\vartheta| > \frac{1}{m}\right) \leqslant \lambda\left(|M\vartheta| > \frac{1}{m}\right) \leqslant \frac{3^p \tau(G \backslash K)}{1/m} < \frac{3^p m}{k}.$$

$k \to \infty$ majd $m \to \infty$,

$$\lambda\left(|\overline{D}\beta| > \frac{1}{m}\right) = 0$$

$$\lambda\left(|\overline{D}\beta| > 0\right) = 0$$

Ugyanígy látható, hogy

$$\lambda\left(|\underline{D}\beta| > 0\right) = 0.$$

14.19. tétel (Mértékek differenciálásának fő tétele)**.** *Legyen $\mathcal{D}$ reguláris differenciálbázis, ϑ lok. véges előjeles vagy komplex mérték, a Lebesgue-felbontása $\vartheta = \int f \mathrm{d}\lambda + \beta$. Ekkor $D_{\mathcal{D}}\vartheta = f$ λ-m.m.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha = \int f \mathrm{d}\lambda$; megmutatjuk, hogy az f minden Lebesgue-pontjában $D\alpha = f$. Mivel $D\beta = 0$ λ-m.m. (lásd 14.18), és λ-m.m. pont Lebesgue-pontja f-nek (lásd 14.4); ez elég is.

Legyen tehát x_0 Lebesgue-pont, és $0 < \rho = \rho(x_0) \leqslant 1$ a differenciálbázis regularitásában szereplő arány. Ha $A \subset B(x_0, r)$ és $\lambda(A) > \rho \cdot \lambda(B(x_0, r))$, akkor

$$\left|\frac{\alpha(A)}{\lambda(A)} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int_A (f - f(x_0))\mathrm{d}\lambda}{\lambda(A)}\right| \leqslant \frac{\int_A |f - f(x_0)|\mathrm{d}\lambda}{\lambda(A)} \leqslant \frac{\int_{B(x_0,r)} |f - f(x_0)|\mathrm{d}\lambda}{\rho \cdot \lambda(B(x_0, r))} \to 0.$$

14.20. tétel. *Egy β lok. véges előjeles vagy komplex mérték akkor és csak akkor szinguláris, ha $D\beta = 0$ λ-m.m.*

A sűrűségi tétel

14.21. definíció. $H \subset \mathbb{R}^p$-nek A mérhető burka, ha $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$, $A \supset H$ és $(*)$ minden $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$, $B \supset H$-ra $\lambda(A \backslash B) = 0$, avagy, minden $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$, $H \subset B \subset A$-ra $\lambda(A \backslash B) = 0$.

14.22. lemma. *1. Minden halmaznak létezik mérhető burka; még G_δ is.*
2. Ha M_1 és M_2 is mérhető burok, akkor $\lambda(M_1 \triangle M_2) = 0$.
3. Ha M mérhető burka H-nak és A mérhető, akkor $M \cap A$ mérhető burka $H \cap A$-nak.

Bizonyítás. 1. Tekintsünk egy tetszőleges $H \subset \mathbb{R}^p$ halmazt; ehhez konstruálunk mérhető burkot.

Osszuk fel a teret korlátos kockákra: $\mathbb{R}^p = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, és legyen a H halmaznak az n-edik kockába eső része $H_n = H \cap K_n$.

Vegyünk minden k-hoz és n-hez egy olyan $G_{n,k}$ nyílt halmazt, ami $1/k$-nál pontosabban fedi a H_n halmazt: $H_n \subset G_{n,k}$, $\lambda(G_{n,k}) < \overline{\lambda}(H \cap K_n) + \frac{1}{k}$. Ezek után legyen

$$M_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_{n,k}, \qquad M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Azt állítjuk, hogy M mérhető burka H-nak. Az trivi, hogy M is mérhető, $M_n \supset H_n$ és $M \supset H$.

A $(*)$ ellenőrzéséhez vegyünk egy tetszőleges $B \supset H$ mérhető halmazt. A K_n kockában $H_n \subset B \cap M_n \subset M_n$, ezért minden k-ra

$$\overline{\lambda}(H_n) \leqslant \lambda(B \cap M_n) \leqslant \lambda(M_n) \leqslant \lambda(G_{n,k}) < \overline{\lambda}(H_n) + \frac{1}{k};$$

A $k \to \infty$ határátmenetből

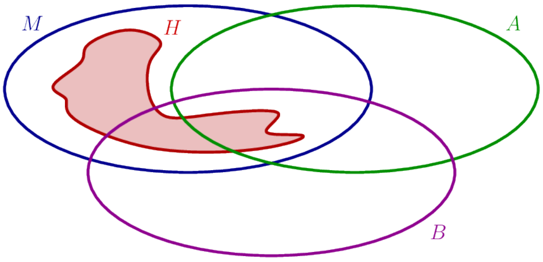
$$\lambda(B \cap M_n) = \lambda(M_n) = \overline{\lambda}(H_n),$$

a kettő külöbnségéből $\lambda(M_n \backslash B) = 0$, végül

$$\lambda(M \backslash B) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(M_n \backslash B) = 0.$$

2. Mivel M_1 és $M_2 \supset H$, a mérhető burok definíciójából $\lambda(M_2 \backslash M_1) = 0$. Az M_1, M_2 felcserélésével $\lambda(M_1 \backslash M_2) = 0$.

3. Az világos, hogy $M \cap A$ mérhető és tartalmazza $H \cap A$-t; ismét csak $(*)$-t kell ellenőrizni. Tegyük fel, hogy B mérhető és $B \supset H \cap A$. Mivel B fedi a $H \cap A$ halmazt, Az M pedig a teljes H halmazt, H-nak nem lehet eleme az $(M \cap A) \backslash B$ atomban:



Akkor viszont H-t fedi az $M \backslash \big((M \cap A) \backslash B\big)$, és így, mivel M mérhető burka H-nak,

$$\lambda\Big((M \cap A) \backslash B\Big) = 0.$$

14.23. *megjegyzés.* A bizonyításban egy $G_{\delta\sigma}$ halmazt konstruáltunk, de nem túl nehéz meggondolni, hogy valójában G_δ is.

14.24. definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, a mérhető burka M, és tekintsük a $\mu(A) = \overline{\lambda}(A \cap H) = \lambda(A \cap M)$ mértéket. A H halmaz alsó és felső sűrűsége az $x \in \mathbb{R}^p$ pontban

$$\overline{d}(x, H) = \overline{D}\mu(x) = \limsup_{r\to 0+} \frac{\overline{\lambda}(B(x,r) \cap H)}{\lambda(B(x,r))},$$

illetve

$$\underline{d}(x, H) = \underline{D}\mu(x) = \liminf_{r\to 0+} \frac{\overline{\lambda}(B(x,r) \cap H)}{\lambda(B(x,r))},$$

sűrűsége

$$d(x, H) = D\mu(x) = \lim_{r\to 0+} \frac{\overline{\lambda}(B(x,r) \cap H)}{\lambda(B(x,r))}.$$

Az x a H-nak sűrűségi pontja, ha $d(x, H) = 1$.

14.25. tétel (Lebesgue-féle sűrűségi tétel)**.** *(a) m.m. $x \in H$ sűrűségi pont.*
(b) H akkor és csak akkor Lebesgue-mérhető, ha m.m. $x \notin H$-ra $d(x, H) = 0$.

Bizonyítás. (a) Legyen M mérhető burka H-nak és $f = \chi_M$. Ekkor $\mu(A) = \lambda(A \cap M) = \int_A f\,\mathrm{d}\lambda$. Ezért $D\mu = \chi_M$ m.m.; speciálisan m.m.$x \in H \subset M$-re $D\mu(x) = 1$.

(b) Legyen N az $\mathbb{R}^p \setminus H$ mérhető burka, $\nu(A) = \lambda(A \cap N)$ és $g = \chi_N$.

Ha H mérhető, akkor lehet $M = H$ és $N = \mathbb{R}^p \setminus H$, és a két sűrűség is komplementere egymásnak.

Ha H nem mérhető, akkor $\lambda(M \cap N) > 0$. Ugyanis $\mathbb{R}^p \setminus N \subset H \subset M$, vagyis H két mérhető halmaz közé esik, ezek különbsége nem lehet nullmértékű (mivel ekkor $M \setminus ((M \cap N) \cap (\mathbb{R}^p \setminus H)) = H$ is mérhető lenne a teljesség miatt). A különbség viszont éppen $M \cap N$. A metszet pontjaiban H sűrűsége 1 m.m. .

15. Abszolút folytonos és szinguláris függvények

Abszolút folytonos és szinguláris függvények. Az abszolút folytonosság átfogalmazása ε, δ-val. Példa szigorúan monoton és folytonos, szinguláris függvényre. A Lipschitz-tulajdonság, az abszolút folytonosság és korlátos változás kapcsolata. Szinguláris függvény deriváltja m.m. 0. Abszolút folytonos függvény m.m. differenciálható, és a derivált integrálfüggvénye. Korlátos változású (spec. monoton) függvény m.m. differenciálható. (Petruska II, 22. fej.)

Most azzal fogunk játszani, hogy a Borel-mértékek differenciálásáról szóló tételeinket átírjuk az eloszlásfüggvényeikre.

Monoton növő függvények

15.1. definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $F : I \to \mathbb{R}$ monoton növő, φ_F a megváltozásából származó Lebesgue-Stieltjes mérték.

F "abszolút folytonos", ha $\varphi_F \ll \lambda$.

F "szinguláris", ha $\varphi_F \perp \lambda$.

15.2. *példa.* A Cantor-függvény folytonos, és szinguláris, nem abszolút folytonos.

Végtelen sok szinguláris, folytonos mérték összegéből nyerhetünk szigorúan monoton, folytonos, szinguláris függvényt.

(Emlékeztetőül, az eloszlásfüggvény a 0 mértékű pontokban folytonos.)

15.3. tétel. *Minden monoton növő függvény felbomlik egy abszolút folytonos és egy szinguláris függvény összegére. :-o*

Bizonyítás. A monoton növő függvényből kapunk egy mértéket, erre alkalmazzuk a Lebesgue felbontási tételt.

16. Abszolút folytonos függvények (részben KT által utólag leírt tálalása) és Newton-Leibniz szabály Lebesgue integrálra

Tanultuk, hogy a Riemann integrál és a deriválás bizonyos értelemben egymás inverzei: alkalmas enyhe feltételekkel

(i) adott f függvény F integrálfüggvényének deriváltja f,

(ii) adott F függvény f deriváltjának integrálfüggvénye F plusz konstans.

A pontos feltételeket az alábbi klasszikus tételek tartalmazzák:

16.1. tétel. *1. Ha f folytonos egy I nyílt intervallumon, $x_0 \in I$ és $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$, akkor $F' = f$ az I intervallum minden pontjában.*

2. (Newton-Leibniz szabály) Ha az F függvény differenciálható egy I nyílt intervallumon, és $f = F'$ integrálható I zárt részintervallumain, akkor $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$ teljesül minden $[a, b] \subset I$ intervallumon.

Azt fogjuk vizsgálni, hogy (i) és (ii) milyen formában teljesülnek Lebesgue integrálra.

Kezdjük az (i)-essel. Ha f-et nullmértékű halmazon megváltoztatjuk, akkor a Lebesgue integrálással vett integrálfüggvénye nem változik, tehát az a természetes kérdés, hogy milyen (I nyílt intervallumon értelmezett) függvényekre teljesül az alábbi állítás:

(i') adott $f : I \to \mathbb{R}$ függvény F integrálfüggvényének deriváltja majdnem mindenütt f.

Az nyilván szükséges, hogy f lokálisan integrálható legyen. A jó hír az, hogy ez elég is, sőt ehhez most már dolgoznunk sem kell, mert szinte azonnal következik a Mértékek differenciálásának fő tételéből (14.19).

16.2. tétel. *Ha f lokálisan integrálható az I nyílt intervallumon, $x_0 \in I$ és $F(x) = \int_{x_0}^{x} f$, akkor $F' = f$ I-n majdnem mindenütt.*

Bizonyítás. Legyen $\vartheta(E) = \int_E f d\lambda$ és legyen $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, úgy mint a 13.3 példában. Ekkor a Mértékek differenciálásának fő tétele (14.19) szerint $D_{\mathcal{D}}\vartheta = f$ majdnem mindenütt, másrészt $\mathcal{D}$ definíciója miatt $D_{\mathcal{D}}\vartheta = F'$.

Ezért a továbbiakban a (ii)-es problémával foglalkozunk. Mivel az integrálfüggvény definiálásához elég, ha f majdnem mindenütt létezik, ezért természetes azt a kérdést nézni, hogy milyen (I nyílt intervallumon értelmezett) F függvényekre teljesül az alábbi állítás:

(ii') Ha $F' = f$ majdnem mindenütt I-n, akkor $F(b) - F(a) = \int_{[a,b]} f$ teljesül minden $[a,b] \subset I$ intervallumon.

A F függvény m. m. differenciálhatósága és F' lokális integrálhatósága nyilván szükséges. Az ördöglépcső (más néven Cantor függvény) mutatja, hogy ez nem elég: (ii') még monoton nővő folytonos függvényekre sem mindig igaz, hiszen ez egy olyan nem konstans függvény, amelynek a deriváltja majdnem mindenütt nulla.

Vegyük észre, hogy ha F előáll integrálfüggvényként, akkor lokálisan korlátos változású, és így előáll két mononoton növő függvény összegeként. Ezért van értelme először azt azt vizsgálni, hogy mely monoton növő függvényekre teljesül a fenti (ii') állítás.

Monoton függvények

16.3. tétel. *Ha F monoton nő az I nyílt intervallumon, ezek ekvivalensek:*

(1) Az F függvény megváltozásából származó Lebesgue-Stieltjes mérték abszolút folytonos.

(2) Az F függvény majdnem mindenütt deriválható I-n és $F(b)-F(a) = \int_{[a,b]} F'$ minden $[a,b] \subset I$ intervallumon.

(2') Van olyan $f \geqslant 0$ mérhető függvény, amelyre $F(b) - F(a) = \int_{[a,b]} f$ minden $[a,b] \subset I$ intervallumon.

(3) Minden $[a,b] \subset I$ kompakt intervallumhoz és $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy bármely n és $a \leqslant x_1 < y_1 \leqslant x_2 < y_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n < y_n \leqslant b$, $\sum(y_i - x_i) < \delta$ esetén $\sum |F(y_i) - F(x_i)| < \varepsilon$.

Bizonyítás. (1) $\Longrightarrow$ (2): Először is $\varphi_F \ll \lambda$, ezért minden pont mértéke 0, és ezért F folytonos.

Legyen $f = \frac{\mathrm{d}\varphi_F}{\mathrm{d}\lambda}$. A $\mathcal{D} = \big\{[x, x+r), [x-r, x) : x \in I, r > 0\big\}$ differenciálbázisban $F' = D_{\mathcal{D}}\varphi_F = f$ m.m.

(2) $\Longrightarrow$ (2'): Világos.

(2') $\Longrightarrow$ (3): Legyen a, b, ε adott, ezekhez szeretnénk megfelelő δ számot találni.

Az f függvény integrálható $[a,b]$-n, ezért van olyan szép $g : [a,b] \to [0,\infty)$ függvény, amely tehát véges sok szakaszon konstans, és $\int_{[a,b]} |f - g| \mathrm{d}\lambda < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen $K = \max g + 1$. Azt állítjuk, hogy $\delta = \frac{\varepsilon}{2K}$ jó lesz.

Tekintsünk egy tetszőleges $a \leqslant x_1 < y_1 \leqslant x_2 < y_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n < y_n \leqslant b$ intervallumsorozatot, amelyre $\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i) < \delta$. Erre a sorozatra

$$\sum_{i=1}^{n} \big(F(y_i) - F(x_i)\big) = \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_i,y_i)} f \mathrm{d}\lambda \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_i,y_i)} \big(g + |f-g|\big)\mathrm{d}\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_i,y_i)} K \mathrm{d}\lambda + \int_{[a,b]} |f - g| \mathrm{d}\lambda \leqslant \sum_{i=1}^{n} K(y_i - x_i) + \frac{\varepsilon}{2} < K\delta + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(3) $\Longrightarrow$ (1): Tekintsünk egy tetszőleges $N \subset I$ nullmértékű halmazt; azt kell igazolnunk, hogy $\varphi_F(N) = 0$. A φ_F reguláris, ezért elég ezt az N kompakt részeire igazolni. Legyen tehát $K \subset I$ kompakt, $\lambda(K) = 0$. A K benne van egy $[a, b] \subset I$ intervallum belsejében: $K \subset (a, b) \subset [a, b] \subset I$.

Tetszőleges ε-hoz vegyünk egy, a (3) tulajdonságnak megfelelő δ-t. Fedjük le K-t nyílt intervallumokkal, amelyek Lebesgue-összmértéke δ-nál kisebb. Ebből válasszunk ki egy véges fedést. A fedésben lehetnek többszörösen fedett részek, de a fedés uniója mindenképpen véges sok diszjunkt relatív nyílt intervallumból áll; legyenek ezek $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. A fedés Lebesgue-mértéke

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i) < \delta,$$

a (3) tulajdonság alapján

$$\varphi_F(K) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \varphi_F\big((x_i, y_i)\big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \big(F(y_i) - F(x_i)\big) < \varepsilon.$$

Az $\varepsilon \to 0$ határátmenetből $\varphi_H(K) = 0$.

A 16.3 tétel (1) ekvivalens állítása magyarázza, hogy a monoton F függvénynek ezt a tulajdonságát abszolút folytonosságnak nevezzük. Mivel a (3) tulajdonságnak bármilyen függvény esetén van értelme, ezért általános esetben az lesz a definíció.

16.4. definíció. Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényt *abszolút folytonos*nak mondunk, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy bármely n és $a \leqslant x_1 < y_1 \leqslant x_2 < y_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n < y_n \leqslant b$, $\sum(y_i - x_i) < \delta$ esetén $\sum |F(y_i) - F(x_i)| < \varepsilon$.

Egy I nyílt intervallumon értelmezett függvényt *abszolút folytonos*nak mondunk, ha minden $[a, b] \subset I$ intervallumon abszolút folytonos.

Tehát monoton növő függvény esetén az abszolút folytonosság ekvialens a 16.3 tétel mindegyik állításával.

16.5. *megjegyzés.* Sajnos nyílt intervallumon a terminológia nem egyértelmű. Sokan ott is ugyanazt követelik meg az abszolút folytonossághoz mint amit mi $[a, b]$-n megkövetelünk, és *lokálisan abszolút folytonos*-nak hívják azt, amit mi abszolút folytonosnak hívunk.

A 16.3 (1) ekvivalens állításának analógiájára definiálhatjuk monoton növő függvények szingularitását is.

16.6. definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $F : I \to \mathbb{R}$ monoton növő, φ_F a megváltozásából származó Lebesgue-Stieltjes mérték. Az F függvényt *szinguláris*nak mondjuk, ha $\varphi_F \perp \lambda$.

16.7. *megjegyzés.* Itt sem egyértelmű a terminológia. Van aki a konstans függvényt nem hívja szingulárisnak.

16.8. *példa.* A Cantor-függvény folytonos, és szinguláris, nem abszolút folytonos.

A fejezet végén látni fogjuk, hogy végtelen sok szinguláris, folytonos mérték összegéből nyerhetünk szigorúan monoton, folytonos, szinguláris függvényt.

(Emlékeztetőül, az eloszlásfüggvény a 0 mértékű pontokban folytonos.)

16.9. tétel. *Minden monoton növő függvény felbomlik egy abszolút folytonos és egy szinguláris függvény összegére.*

Bizonyítás. A monoton növő függvényből kapunk egy mértéket, erre alkalmazzuk a Lebesgue felbontási tételt.

16.10. tétel. *Egy F monoton növő függvény akkor és csak akkor szinguláris, ha $F' = 0$ m.m.*

Bizonyítás. Ha F szinguláris, akkor a φ_F Lebesgue-Stieltjes mérték szinguláris a Lebesgue mértékre nézve, ezért az F deriváltját adó differenciálbázis szerint differenciálva majdnem mindenütt nullát kapunk.

Ha $F' = 0$ majdnem mindenütt, akkor az előző tétel szerinti $F = F_a + F_s$ felbontást véve $F_a' = 0$ m.m., ezért a 16.3 tétel szerint F_a konstans, tehát F szinguláris.

16.11. tétel. *Ha F monoton, akkor m.m. differenciálható.*

Bizonyítás. Mivel az abszolút folytonos és a szinguláris monoton függvények is majdnem mindenütt differenciálhatóak, ezért ez következik a felbontási tételből.

16.12. *kérdés.* Láttuk, hogy Lebesgue integrált véve és majdnem mindenütt deriválhatóságot megengedve, monoton függvényekre a Newton-Leibniz szabály pontosan akkor teljesül, ha a függvény abszolút folytonos. Mondhatunk valamit akkor is, ha a függvény nem abszolút folytonos?

16.13. tétel. *Tetszőleges $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton növő esetén $\int_{[a,b]} F' \leqslant F(b) - F(a)$. Egyenlőség pedig akkor és csak akkor van, ha F abszolút folytonos.*

Bizonyítás. A tétel második fele következik a 16.3 tételből.

Ha F monoton, akkor felírható $F = F_a + F_s$ alakban, ahol F_a abszolút folytonos, F_s szinguláris. Ekkor F, F_a, F_s majdnem mindenütt differenciálhatóak: $F' = F_a' + F_s'$ m.m. Továbbá: $F_s' = 0$ m.m. $\Longrightarrow F' = F_a'$ m.m.

$F(b) - F(a) = F_a(b) - F_a(a) + F_s(b) - F_s(a)$ itt $F_s(b) - F_s(a) \geqslant 0$

$\int_{[a,b]} F' = \int_{[a,b]} F_a' = F_a(b) - F_a(a) \leqslant F(b) - F(a)$.

Eddig a Newton-Leibniz szabálynak azt a változatát vizsgáltuk, amikor az integrált Lebesgue értelemben vesszük, a deriválásnál pedig megelégszünk majdnem mindenütt differenciálhatósággal. Most azt fogjuk nézni, hogy mindenütt differenciálható monoton függvényekre mikor igaz a Newton-Leibniz szabály Lebesgue integrállal. A jó hír az, hogy mindig! Mindez az alábbi lemmán múlik.

16.14. lemma. *Ha egy monoton növő F szinguláris és nem konstans, akkor van olyan pont, ahol $\overline{F'} = \infty$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $F(a) < F(b)$ és legyen φ_F az F megváltozásából kapott Lebesgue-Stieltjes mérték. Mivel φ_F szinguláris, ezért van olyan nullmértékű $H \subset [a,b]$ halmaz, amelyre $\varphi_F(H) = \varphi_F([a,b]) = F(b) - F(a) > 0$. Fedjük le H-t nagyon kis összhosszúságú intervallumokkal. Ekkor valamelyikben nagy lesz F meredeksége a két végpont között. Erre az intervallumra ugyanezt eljátszva, majd ezt ismételgetve, az intervallumok metszetében kapunk egy pontot, amelyben végtelen a felső derivált.

16.15. tétel. *Ha F monoton nő és mindenhol differenciálható, akkor abszolút folytonos, és $F(b) - F(a) = \int_{[a,b]} F' \mathrm{d}\lambda$.*

Bizonyítás. A 16.3 tétel miatt elég belátni az abszolút folytonosságot. A szokásos $F_a + F_s$ felbontást véve az előző lemma miatt F_s csak konstans lehet.

Korlátos változású és általános eset

Miután a monoton függvényeket ilyen alaposan megvizsgáltuk, visszatérünk az általános esetre, és az eddig belátott állítások jelentős részét belátjuk akkor is - alkalmas módosításokkal, megszorításokkal.

A 16.4 definícióból tetszőleges függvényekre könnyen adódnak az alábbiak.

16.16. tétel.

1. *Minden Lipschitz függvény abszolút folytonos.*
2. *Minden abszolút folytonos függvény folytonos és lokálisan korlátos változású.*

Bizonyítás. Az első állítás világos. Ha F absz. folyt, legyen $\varepsilon = 1$-hez δ jó. Ekkor egy $|[u, v]| = \delta$ intervallumon. $V_F([u, v]) < 1$. Ilyen intervallumokat összegezve: $V_F([a, b]) = \lceil \frac{b-a}{\delta} \rceil$.

Mivel minden korlátos változású, vagy akár lokálisan korlátos változású függvény előáll két monoton növő függvény különbségeként, ezért az alábbi állítások azonnal következnek a monoton növő függvényekre vonatkozó megfelelő állításokból.

16.17. tétel. *Ha F lokálisan korlátos változású, akkor m.m. differenciálható.*

16.18. tétel. *Ha F lok. k.v. és mindenhol differenciálható, akkor abszolút folytonos, és $F(b)-F(a) = \int_{[a,b]} F' \mathrm{d}\lambda$.*

Alkalmas módosításokkal a 16.3 tétel is igaz marad lok. k.v. függvényekre, de látni fogjuk, hogy ott az ekvivalenciák nagy részé valójában bármely függvényre teljesül.

Az egyetlen kivétel a Lebesgue-Stieltjes mértékre vonatkozó, hiszen csak monoton növő függvény generál Lebesgue-Stieltjes mértéket. Mivel két mérték különbsége előjeles mérték (ha legalább az egyik mérték véges), ezért két monoton függvény különbségére, vagyis k.v. függvényekre mindez kiterjeszthető Lebesgue-Stieltjes féle előjeles mértéket definiálva.

16.19. tétel. *Egy korlátos változású F függvény pontosan akkor abszolút folytonos, ha az általa generált Lebesgue-Stieltjes féle előjeles mérték abszolút folytonos.*

Az abszolút folytonosság Newton-Leibnizes ekvivalenciájához semmi extra feltétel nem kell.

16.20. tétel. *Legyen F tetszőleges valós függvény egy I nyílt intervallumon. Ekkor a következők ekvivalensek.*

(1) Az F függvény abszolút folytonos.

(2) Az F függvény majdnem mindenütt deriválható I-n és $F(b)-F(a) = \int_{[a,b]} F'$ minden $[a, b] \subset I$ intervallumon.

(2') Van olyan f függvény, amelyre $F(b) - F(a) = \int_{[a,b]} f$ minden $[a, b] \subset I$ intervallumon.

Bizonyítás. (1) $\Rightarrow$ (2): Ha F abszolút folytonos, akkor korlátos változású, tehát előáll két monoton növő függvény különbségére, melyekre külön alkalmazható az analóg tétel.

(2) $\Rightarrow$ (2') világos.

(2') $\Rightarrow$ (1): Mivel a véges értékű F integrálfüggvénye f-nek, ezért f biztosan lokálisan integrálható. Tehát azt kell belátni, hogy lok. integrálható függvény integrálfüggvénye mindig absz. folyt., vagy azt, hogy mindig lok. korlátos változású, és így két monoton függvény különbsége, amire már tudjuk. Mindkét út járható:

1. Remélhetőleg szerepelt gyakorlaton az a feladat, hogy ha f lok. integrálható egy tetsz. mértéktéren, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, amelyre $\left|\int_E f\right| < \varepsilon$ valahányszor E egy δ-nál kisebb mértékű halmaz. Ebből kapásból következik, hogy bármely lok. intható fv. integrálfüggvénye teljesíti az absz. folytonosság definícióját.

2. Mivel f lok. integrálható, ezért bármely véges intervallumon $|f|$ integrálható, az pedig könnyen látszik, hogy az integrálja felső korlát f totális variációjára az adott intervallumon.

Fubini tétele monoton függvényekből képezett sorok tagonkénti deriválásáról

(Ez az alfejezet http://people.math.sc.edu/howard/Notes/fubini.pdf alapján készült.)

Fubini alábbi (a híres tételéhez képest kevésbé közismert, de szintén alapvető) tételének látszólag nincs köze abszolút folytonos függvényekhez, de a bizonyítás a 16.13 tételen alapul, amely szerint tetszőleges $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton függvény esetén $\int_a^b F' \leqslant F(b) - F(a)$. További kapcsolódás, hogy ennek a Fubini tételnek a segítségével viszonylag könnyű szigorúan monoton növő, folytonos szinguláris függvényt konstruálni.

16.21. tétel (Fubini)**.** *Legyen* $f_k : [a, b] \to \mathbf{R}$ *monoton növő,* $k = 1, 2, \cdots$ *és az*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

sorozat konvergáljon pontonként $[a, b]$*-n. Ekkor* $[a, b]$*-n m.m.*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x).$$

Bizonyítás. Legyen

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + R_n(x)$$

ahol

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$

A maradéka az n. $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ részösszegnek. Vegyük észre, hogy f és R_n szintén monoton növő függvények és ezáltal a 16.13 tétel alapján m.m. differenciálhatóak. Legyen E azon pontok halmaza, ahol az összes f_k és f függvények differenciálhatóak. Nyilvánvaló, hogy $[a, b] \setminus E$ nullmértékű. Ha $x \in E$, akkor az $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ részösszeg is differenciálható x-ben és ezáltal $R_n'(x) = f'(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k'(x)$ is létezik. Tehát, mivel $R_n' \geqslant 0$,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) + R_n'(x) \geqslant \sum_{k=1}^{n} f_k'(x)$$

minden $x \in E$. Tehát $n \to \infty$ alapján

$$f'(x) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) \tag{1}$$

minden $x \in E$-re.

Most ismét a 16.13 tételt az R_n monoton növő függvényekre, ebből adódik

$$0 \geqslant \int_a^b R_n'(x) \, \mathrm{d}x \geqslant R_n(b) - R_n(a) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (f_k(b) - f_k(a)).$$

Mivel $\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(a)$ és $\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(b)$ sorok konvergálnak, az $\sum_{k=n+1}^{\infty} (f_k(b) - f_k(a))$ sor is konvergál, ezáltal $lim_{n \to \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} (f_k(b) - f_k(a)) = 0$. Ezt kihasználva kapjuk, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b R_n'(x) \, \mathrm{d}x = 0 \tag{2}$$

Ezen felül

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'(x) \, \mathrm{d}x &= \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right)' \mathrm{d}x + \int_a^b R_n'(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) + \int_a^b R_n'(x) \, \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) + \int_a^b R_n'(x) \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Most $n \to \infty$ és 2 adja, hogy

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x).$$

De 1 miatt $f'(x) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ m.m.. Tehát az egyetlen eset, melyben az utolsó egyenlőtlenség állhat az $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ m.m.. És ezt akartuk belátni.

A fenti tétel a kulcs az alábbi konstrukcióban.

16.22. tétel. *Létezik szigorúan monoton növő, folytonos szinguláris függvény.*

Bizonyítás. Legyen $h(x)$ az a függvény, amelyet úgy kapunk, hogy a Cantor függvényt kiterjesztjük 0-ként a negatív számokra és 1-ként az 1-nél nagyobb számokra. Így h a teljes számegyenesen monoton növő, folytonos szinguláris függvény, amely a Cantor halmazon szig. mon. nő. Legyen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} h(x - r_n),$$

ahol (r_n) a racionális számok egy felsorolása. Könnyen látható, hogy a kapott f függvény a teljes számegyenesen szigorúan monoton nő és folytonos. Mivel h szinguláris, ezért $h' = 0$ m. m., ezért a fenti Fubini tétel szerint $f' = 0$ m. m., tehát f is szinguláris.

16.23. *megjegyzés.* Másik lehetőség a fenti konstrukcióra, hogy mindig a kiegészítő intervallumokba pakolunk a Cantor függvény egy-egy megfelelő affin képét.

VI. rész:

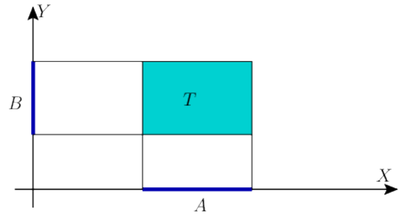
Szorzatmértékek

17. Véges sok mértéktér szorzata

σ-additivitás két mértéktér direkt szorzatán. Két mértéktér szorzata. Fubini-tétel (bizonyítás nélkül). Véges sok mértéktér szorzata.

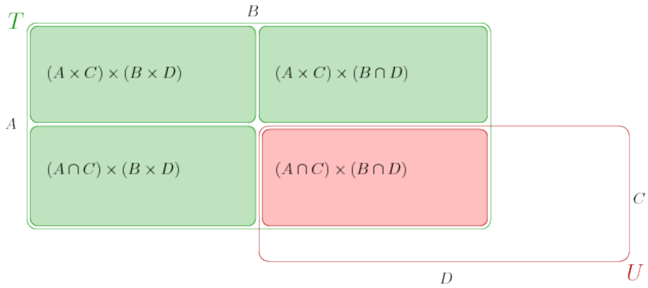
Két mértéktér szorzata

17.1. lemma. *Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ két mértéktér.*



(a) A $\mathcal{T} = \{A \times B : A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{N}\}$, a "téglák" halmaza félgyűrű;
(b) A $\mathcal{T}$ félgyűrűn az $\alpha(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$ halmazfüggvény σ-additív, σ-szubadditív, és additív.

Bizonyítás. (a) Ahhoz, hogy $\mathcal{T}$ félgyűrű legyen, három dolog kell: $\varnothing \in \mathcal{T}$, bármely két tégla metszete tégla, és bármely két tégla különbsége előáll, mint véges sok tégla diszjunkt uniója; mindhárom triviális. Az ábrán a $T \cap U$ és $Y \backslash U$ felbontása látható.



Az üres halmaz is tégla, például $\varnothing \times \varnothing \in \mathcal{T}$.

(b) Tegyük fel, hogy a $T = A \times B$ tégla felbomlik a $T_n = A_n \times B_n$ téglák ($n = 1, 2, \ldots$) diszjunkt uniójára. Ekkor $x \in X$, $y \in Y$ esetén

$$\chi_A(x)\ \chi_B(y) = \chi_T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{T_n}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)\ \chi_{B_n}(y).$$

Előbb x, majd y szerint integrálva,

$$\mu(A)\ \chi_B(y) = \left(\int_X \chi_A(x)\ \mathrm{d}\mu(x)\right) \chi_B(y) = \int_X \chi_A(x)\ \chi_B(y)\ \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)\chi_{B_n}(y)\right) \mathrm{d}\mu(x) \overset{\text{Beppo Levi}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \chi_{A_n}(x)\chi_{B_n}(y)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\chi_{B_n}(y)$$

$$\alpha(T) = \mu(A)\ \nu(B) = \int_Y \mu(A)\ \chi_B(y)\ \mathrm{d}\nu(y) = \int_Y \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\ \chi_{B_n}(y)\right) \mathrm{d}\nu(y) =$$

$$\overset{\text{Beppo Levi}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_Y \mu(A_n)\chi_{B_n}(y)\mathrm{d}\nu(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\nu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(T_n)$$

tehát α tényleg σ-additív (és persze additív is).

A σ-szubadditivitás következik abból, hogy $\mathcal{T}$ félgyűrű: a szokott módon minden fedés kicserélhető diszjunkt téglákkal való fedésre, és elmetszhető a lefedett téglával.

A 17.1. Lemma biztosítja mértékkiterjesztés feltételeit: az α téglafüggvény kiterjeszthető mértékké a téglák által generált σ-algebrára.

17.2. definíció. Az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ mértékterek szorzata a $(Z, \mathcal{S}, \varphi)$ mértéktér, ahol $Z = X \times Y$, φ_α a lemmabeli α-hoz asszociált külső mérték a Z halmazon, $\mathcal{S}$ a φ_α szerint mérhető halmazok rendszere, és φ az φ_α megszorítása $\mathcal{S}$-re.

Véges sok mértéktér szorzata

A lemma és a definíció minden nehézség nélkül kiterjeszthető n mértéktér szorzatára is.

17.3. definíció. (véges sok mértéktér szorzata)

Ha $(X_k, \mathcal{M}_k, \mu_k)$ $(k = 1, 2 \ldots, n)$ mértékterek, akkor $\mathcal{T} = \{A_1 \times \ldots \times A_n : A_1 \in \mathcal{M}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}_n\}$ a téglák félgyűrűje, ezen az $\alpha(A_1 \times \ldots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdot \ldots \cdot \mu_n(A_n)$ függvény σ-additív. A mértékterek szorzata $(Z, \mathcal{S}, \varphi)$, ahol $Z = X_1 \times \ldots \times X_n$ halmazon, $\varphi_\alpha : Z \to [0, \infty]$ az α-hoz asszociált külső mérték, $\mathcal{S}$ a φ_α szerint mérhető halmazok rendszere, és φ a φ_α megszorítása $\mathcal{S}$-re.

A σ-additivitásának bizonyítása ugyanúgy megy, mint a 17.1 lemmában, csak a Beppo Levi tételt nem kétszer, hanem n-szor kell alkalmazni.

17.4. *példa.* Ha μ a p-dimenziós, ν a q-dimenziós Lebesgue-mérték, akkor a szorzat a $(p+q)$-dimenziós Lebesgue-mérték. Ez majdnem triviális, a valamelyik mérték szerint nullmértékű halmazokat kell egy kicsit diszkutálni: minden mérhető halmaz egy F_σ halmaz és egy nullmértékű halmaz uniója stb.

A szorzatmérték szerinti integrál átírása többszörös integrállá

17.5. tétel (Fubini)**.** *Legyen a $(Z, \mathcal{S}, \varphi)$ az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ mértékterek szorzata, és f φ-m.mérhető Z-n. Ha f (végesen) integrálható, vagy ha Z σ-véges és $\int_Z f \mathrm{d}\varphi$ létezik, akkor*
(a) μ-m.m. x-re létezik a $g(x) = \int_Y f(x, y) \mathrm{d}\nu(y)$ paraméteres integrál;
(b) $\int_X g \mathrm{d}\mu = \int_Z f \mathrm{d}\varphi$, avagy

$$\int_Z f(x, y) \mathrm{d}\varphi(x, y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) \; \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x).$$

Bizonyítás. Külön fejezetben.

17.6. *megjegyzés* (**KT**). Az $f \geqslant 0$ esetet szokás Tonelli-tételnek is nevezni.

17.7. következmény (17.5)**.** *[**KT**] Tegyük fel, hogy az $(X, \mu), (Y, \nu)$ mértékterek szorzata, (Z, φ) σ-véges, $f : Z \to \mathbb{R}$ mérhető, és $\int_X \left(\int_Y |f| \; \mathrm{d}\nu\right) \mathrm{d}\mu$, $\int_X \left(\int_Y f^+ \; \mathrm{d}\nu\right) \mathrm{d}\mu$, $\int_X \left(\int_Y f^- \; \mathrm{d}\nu\right) \mathrm{d}\mu$ közül legalább az egyik véges. Ekkor $\int_X \left(\int_Y f \; \mathrm{d}\nu\right) \mathrm{d}\mu$ és $\int_Y \left(\int_X f \; \mathrm{d}\mu\right) \mathrm{d}\nu$ léteznek, és $\int_X \left(\int_Y f \; \mathrm{d}\nu\right) \mathrm{d}\mu = \int_Y \left(\int_X f \; \mathrm{d}\mu\right) \mathrm{d}\nu$.*

Bizonyítás. A Tonelli-tétel szerint ($|f|$, f^+, f^- nemnegatívak, ezért a tétel feltételei automatikusan teljesülnek) például $\infty > \int_X \left(\int_Y f^+ \; \mathrm{d}\nu\right) \mathrm{d}\mu = \int_Z f^+ \mathrm{d}\varphi$, így $\int_z f \mathrm{d}\varphi$ létezik (ha a pozitív és negatív rész közül legalább az egyiknek véges az integrálja, akkor a függvény integrálja létezik.), ezért a Fubini-tétel miatt készen vagyunk.

Ez a következmény a Fubini-tételnek egy használhatóbb alakját adja a kezünkbe, hiszen a Fubini-tétel eredeti alakjában a feltételek ellenőrzéséhez gyakran magát a tételt kellene használni.

17.8. *megjegyzés.* A Fubini-tétel lehetőséget ad az integrálok felcserélgetésére, feltéve, hogy a szorzatmérték szerinti integrál létezik. A Jordan-mértéknél szokott eljönni az a kérdés, hogy tudunk-e olyan nemnegatív $f : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, \infty)$ függvényt mondani, amelyre $\int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 f(x, y) \; \mathrm{d}y\right) \; \mathrm{d}x$ és $\int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^1 f(x, y) \; \mathrm{d}x\right) \; \mathrm{d}y$ is létezik, de az értékük különböző. A Fubini-tétel szerint Lebesgue-mérhető függvényekre a két integrál mindig egyenlő, mi pedig csak Borel-mérhető függvényeket tudunk felírni. Nem mérhető függvények konstruálásához muszáj a kiválasztási axiómát használni.

17.9. *példa.* Tegyük fel, hogy igaz a kontinuumhipotézis, és legyen $\prec$ a $[0, 1]$ halmaz egy ω_1 típusú jólrendezése. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x \prec y \\ 0 & x \succeq y \end{cases}$$

Bármely x-re csak megszámlálható sok olyan y van, amely megelőzi x-et a jólrendezésünkben. Ezért bármely rögzített x-re $f(x, y) = 1$ m.m. y-ra, és így $\int_{[0,1]} f(x, y) \mathrm{d}\lambda(y) = 1$, tehát

$$\int_{x \in [0,1]} \left(\int_{y \in [0,1]} f(x, y) \; \mathrm{d}\lambda(y) \right) \mathrm{d}\lambda(x) = 1.$$

Megfordítva, bármely $y \in [0, 1]$-hez csak megszámlálható sok $x \preceq y$ létezik, tehát rögzített y esetén $f(x, y) = 0$ m.m. x-re, ezért

$$\int_{y \in [0,1]} \left(\int_{x \in [0,1]} f(x, y) \; \mathrm{d}\lambda(x) \right) \mathrm{d}\lambda(y) = 0.$$

17.10. *megjegyzés* (**KT**). A kontiuumhipotézis nélkül is tudunk példákat gyártani, amelyre a Fubini-tétel nem igaz: legyen (X, μ) mértéktér, ahol $X = \omega_1$, és

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |E| \leqslant \omega \\ 1, & \text{ha } |X \backslash E| \leqslant \omega, \end{cases}$$

a többi halmaz nem mérhető. Erre az előbbi konstrukció ismét egy ellenpéldát szolgáltat.

17.11. *megjegyzés.* Mindkét esetben a Fubini-tétel azon feltétele sérült, hogy az f függvénynek mérhetőnek kell lennie. Ez mutatja azt, hogy f mérhetősége nem hagyható el a feltételek közül.

17.12. tétel (Friedman, 1980)**.** *A ZFC-vel konzisztens a következő állítás: Legyen $f : [0,1]^2 \to [0, \infty)$ tetszőleges függvény. Ha az $\int_{x\in[0,1]} \left(\int_{y\in[0,1]} f(x,y) \mathrm{d}\lambda(y)\right) \mathrm{d}\lambda(x)$ és $\int_{y\in[0,1]} \left(\int_{x\in[0,1]} f(x,y) \mathrm{d}\lambda(x)\right) \mathrm{d}\lambda(y)$ kettős integrálok léteznek, akkor egyenlők.*

Tehát, ha akarjuk, legalábbis pozitív függvények esetén, szabadon szabad cserélgetni a többszörös szummákat és Lebesgue-integrálokat. Ha akarjuk, létezik olyan eset, amikor nem, de nem tudunk konkrét ellenpéldát felírni a ZFC-nél erősebb plusz feltételek felhasználása nélkül.

17.13. *megjegyzés* (**KT**). 17.12-ben $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$-re nem igaz az állítás:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4},$$

de

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4}.$$

(Ennek igazolásához használjuk fel, hogy $D_{xy} \arctan \frac{y}{x} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$.)

Ez látszólag ellentmond 17.7-nek, vagyis az ottani feltételek sérülnek: $\int_0^1 \left(\int_0^1 |f| \ \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$, $\int_0^1 \left(\int_0^1 f^+ \ \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$, $\int_0^1 \left(\int_0^1 f^- \ \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$ egyike sem véges.

17.14. *megjegyzés* (**KT**). Eddig láttunk pédát arra, hogy a Fubini-tétel feltételei közül nem hagyható el f mérhetősége, és $\int_z f \mathrm{d}\varphi$ létezése. Most arra is mutatunk példát, hogy a σ-végesség sem hagyható el (még nemnegatív esetben sem).

Legyen a szorzatterünk $([0,1], \lambda) \times ([0,1], \text{számlálómérték})$, és $f = \chi_{\{(x,x): x\in[0,1]\}}$ az átló karakterisztikus függvénye. Ekkor $\int\int f \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y = \int 0 \ \mathrm{d}y = 0$, de $\int\int f \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}x = \int 1 \ \mathrm{d}x = 1$.

Itt tényleg a σ-végesség sérül, mert f mérhető (lásd 17.16).

Vegyük észre, hogy ez egyben arra is példa, hogy f (végesen) integrálható voltára is szükség van a tétel feltételei között.

17.15. *megjegyzés* (**KT**). A Fubini-tételt gyakran alkalmazzák halmazok karakterisztikus függvényére.

17.16. *példa.* [**KT**] Legyen μ a számlálómérték $[0,1]$-en; határozzuk meg a $([0,1], \lambda) \times ([0,1], \mu)$ szorzattér mérhető részhalmazait.

Legyen $\overline{\varphi}$ a szorzattéren λ-ból és μ-ből származó külső mérték. Először a $\overline{\varphi}$ szerint véges külső mértékű halmazokat vizsgáljuk, azon belül is a véges külső mértékű téglákat (mérhető $\times$ mérhető alakú halmazok).

A $\{[0,1] \times H : |H| < \infty\}$, illetve a $\{K \times [0,1] : \lambda(K) = 0\}$ alakú halmazok (illetve ezek részhalmazai) lesznek a véges külső mértékű téglák. Ha ugyanis egy $T = A \times B$ téglára $\mu(B) < \infty$ igaz, akkor $\overline{\varphi}(T) < \infty$ biztosan teljesül (ez volt az első eset); ha pedig $\mu(B) = \infty$, akkor ahhoz, hogy $\overline{\varphi}(T) = \lambda(A) \cdot \mu(B) < \infty$ teljesüljön, $\lambda(A) = 0$-nak kell állnia (2. eset).

Egy halmaz véges külső mértékűségéhez kell, hogy le lehessen fedni a fenti halmazok közül megszámlálható sokkal. A $\{[0,1] \times H : |H| < \infty\}$ halmazok megszámlálható uniója $\{[0,1] \times H :$

Hmegszámlálható} alakú (továbbiakban 1-es típus), míg $\{K \times [0,1] : \lambda(K) = 0\}$ alakú halmazok megszámlálható uniója még mindig $\{K \times [0,1] : \lambda(K) = 0\}$ alakú (továbbiakban 2-es típus). Ha tehát $\overline{\varphi}(A) < \infty$, akkor $A \subset B \cup C$, ahol B 1-es, C pedig 2-es típusú.

Ha $\overline{\varphi}(A) < \infty$, akkor fedjük le vízszintes szekciókkal: $A \subset \bigcup([0,1] \times \{x\})$. Itt az olyan szekciók, amelyekre $A \cap ([0,1] \times \{x\})$ Lebesgue-nullmértékű, C-be kerülnek; amelyekre a $A \bigcap([0,1] \times \{x\})$ halmaz Lebesgue-mértéke pozitív, B-be kerülnek. Vagyis B és C definíciója miatt az előbbi halmazok uniójának x tengelyre vett vetülete Lebesgue-nullmértékű kell, hogy legyen (a rövidség kedvéért ezt a tulajdonságot T-nek hívjuk); az utóbbiakból pedig legfeljebb megszámlálható sok lehet.

Ezek tehát mind szükségesek ahhoz, hogy $\overline{\varphi}(A) < \infty$ teljesüljön, és ekkor $\overline{\varphi}(A) = \sum_{y \in [0,1]} \overline{\lambda}(A^y)$, vagyis a vízszintes szekciókkal vett metszetek összmértéke (ez értelmes, hiszen legfeljebb megszámlálható nem 0 tag van az összegben). Ekkor nyilván A pontosan akkor véges külső mértékű, ha ez a szumma véges. Tehát $\overline{\varphi}(A) < \infty \iff \sum_{y \in [0,1]} \overline{\lambda}(A^y) < \infty$, és ebben az esetben $\overline{\varphi}(A) = \sum_{y \in [0,1]} \overline{\lambda}(A^y)$.

Most vizsgáljuk a mérhető halmazokat. Definíció szerint egy halmaz pontosan akkor mérhető, ha mindent jól vág ketté; de valójában elég, ha minden véges külső mértékűt (azaz a fentebb vizsgált halmazokat) jól vágnak ketté. Tehát H mérhető $\overline{\varphi}$ szerint $\iff \forall y : H^y \in \mathcal{L}$ (Itt $\Rightarrow$ világos, ha pedig $\exists y : H^y \notin \mathcal{L}$, akkor a Lebesgue-mérhetőség definíciója alapján van olyan Lebesgue-mérhető halmaz, amely része $[0,1] \times \{y\}$-nak, és H^y nem vágja jól ketté. Mivel ez a halmaz $H \backslash H^y$-tól diszjunkt, ezért ezt a halmazt H sem vágja jól ketté, tehát H nem mérhető). Ekkor

$$\varphi(H) = \begin{cases} \sum\limits_{y \in [0,1]} \lambda(H^y), & \text{ha T teljesül} \\ \infty, & \text{különben} \end{cases}$$

Speciálisan látszik, hogy a $D = \{(x,x) : x \in [0,1]\}$ átló mérhető (mert $\forall y : \lambda(D^y) = \lambda(\{y\}) = 0$), és $\varphi(D) = \infty$, mert a T tulajdonság nem teljesül, hiszen a nullmértékű vízszintes szekciók (azaz az összes szekció) x tengelyre vett vetülete a teljes $[0,1]$ intervallum, ami nem Lebesgue-nullmértékű.

18. Végtelen sok mértéktér szorzata

Akárhány valószínűségi mértéktér szorzata. Bizonyítás a σ-szubadditivitásra.

Ha a szorzatmértékek definícióját végtelen sok mértéktér szorzatára akarjuk átvinni, többféle nehézségbe ütközünk: biztosítanunk kell, hogy a tégláink mértékét kifejező — most már végtelen sok tényezős — szorzatok sorrendfüggetlenek legyenek; ráadásul végtelen sok σ-algebra direkt szorzata nem lesz félgyűrű. Az is előfordulhat, hogy megszámlálható soknál több mértékteret szeretnénk összeszorozni, mert éppen olyanunk van, hogy $2^{2^{\aleph_0}}$ független valószínűségi változót szeretnénk konstruálni.

Ezeknek a nehézségeknek egy lehetséges feloldása az, hogy csak valószínűségi mértéktereket szorzunk össze, amelyekben a teljes tér mértéke 1, ($[0,1]$-beli számok végtelen szorzata már nem függ a sorrendtől, hiszen logaritmusra áttérve minden nempozitív lesz, és így a logaritmusok összegében fel lehet cserélni a sorrendet, ez az összeg értékén és létezésén nem változtat), továbbá csak olyan téglákat használunk, amelyeknek véges sok kivétellel minden éle a megfelelő teljes tér (hasonlóan például a topologikus terek szorzatához).

Egy következő állomás lehetne az olyan téglák megengedése, amelyeknek megszámlálható sok kivétellel minden éle az egész tér, de az ilyenek úgyis benne lesznek a generált σ-algebrában.

Mostantól tehát legyen I tetszőleges számosságú, de azért nem üres indexhalmaz, és minden $i \in I$-re $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ valamilyen valószínűségi mértéktér.

A leendő szorzatmérték alaphalmaza az X_i halmazok szorzata, $Z = \bigtimes_{i\in I} X_i$ lesz. Ez tekinthető az olyan, I-n értelmezett függvények halmazának, amelyek minden $i \in I$-hez X_i-beli pontot rendelnek. Ha $I = \mathbb{N}$, akkor a $Z = \bigtimes_{i\in I} X_i = \bigtimes_{i=1}^{\infty} X_i$ halmaz elemei végtelen sorozatok.

A téglák az olyan $T = \bigtimes_{i\in I} A_i$ "hengerhalmazok" lesznek, amelyekben minden $i \in I$-re $A_i \in \mathcal{M}_i$, és véges sok i index kivételével $A_i = X_i$. Az A_i halmazt (így, egymás közt, nem hivatalosan) a T tégla i-edik "oldalának" fogjuk hívni.

A tégláink halmazát jelölje most is $\mathcal{T}$, tehát

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigtimes_{i\in I} A_i : \forall i \in I \ A_i \in \mathcal{M}_i, \text{ és } \{i \in I : A_i \neq X_i\} \text{ véges} \right\}.$$

A $T = \bigtimes_{i\in I} A_i$ téglához hozzárendeljük a

$$\alpha(T) = \prod_{i\in I} \mu_i(A_i)$$

számot. A szorzatban véges sok i kivételével minden tényező 1, így vehetjük csak az 1-nél kisebbek szorzatát, vagy a véges részszorzatok minimumát.

18.1. lemma. *(a) $\mathcal{T}$ félgyűrű.*
(b) Az $\alpha : \mathcal{T} \to [0,1]$ téglafüggvény additív.
(c) Az $\alpha : \mathcal{T} \to [0,1]$ téglafüggvény σ-szubadditív.

Bizonyítás. (a) Ahhoz, hogy $\mathcal{T}$ félgyűrű legyen, három dolog kell: $\emptyset \in \mathcal{T}$, bármely két tégla metszete tégla, és bármely két tégla különbsége előáll, mint véges sok tégla diszjunkt uniója.

Az üres halmaz is tégla, az egyik A_i-t választhatjuk $\emptyset$-nek.

Legyen $T = \bigtimes_{i\in I} A_i$ és $U = \bigtimes_{i\in I} B_i$ két tégla. Legyen $J \subset I$ az olyan indexek halmaza, amelyekre $A_i \neq X_i$ vagy $B_i \neq X_i$. Átindexelve, feltehetjük, hogy $J = \{1, 2, \ldots, n\}$. Innen pedig minden ugyanúgy megy, mint a 17.3 definícióban. :-)

(b) Tegyük fel, hogy egy T tégla az $U_1, \ldots, U_n$ téglák diszjunkt uniója. Legyen $J \subset I$ az olyan i indexek halmaza, amelyekre valamelyik téglánk i-edik éle nem az egész tér; ez véges sok véges indexhalmaz uniója, vagyis J véges. Ismét csak átindexelve, feltehetjük, hogy $J = \{1, 2, \ldots, N\}$ Innen pedig minden ugyanúgy megy, mint a 17.3 definícióban. :-)

(c) Indirekt tegyük fel, hogy α nem σ-szubadditív, vagyis van olyan T tégla, ami lefedhető az $U^1, U^2, \ldots$ téglák uniójával úgy, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(U^n) < \alpha(T)$. Nyilván mindegyik U^n-et lecserélhetjük az $U^n \cap T$ téglával, így a fedés tovább csökken. Tehát feltehetjük, hogy $U^n \subset T$.

Az itt szereplő téglák élei összesen megszámlálható sok irányban lehetnek kisebbek, mint a megfelelő mértéktér; ezeket átindexelhetjük pozitív egészekkel. Az összes többi irányban minden szorzat minden tényezője 1. Tehát feltehetjük, hogy átindexelés után $I = \mathbb{N}$, a direkt szorzatok elemei sorozatok.

Legyen $T = \bigtimes_{i=1}^{\infty} A_i$ és minden n-re $U^n = \bigtimes_{i=1}^{\infty} B_i^n$. Mivel $U^n \subset T$, az is igaz, hogy minden i indexre $B_i^n \subset A_i$. Az indirekt feltevés szerint

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(U^n) < \alpha(T),$$

vagyis

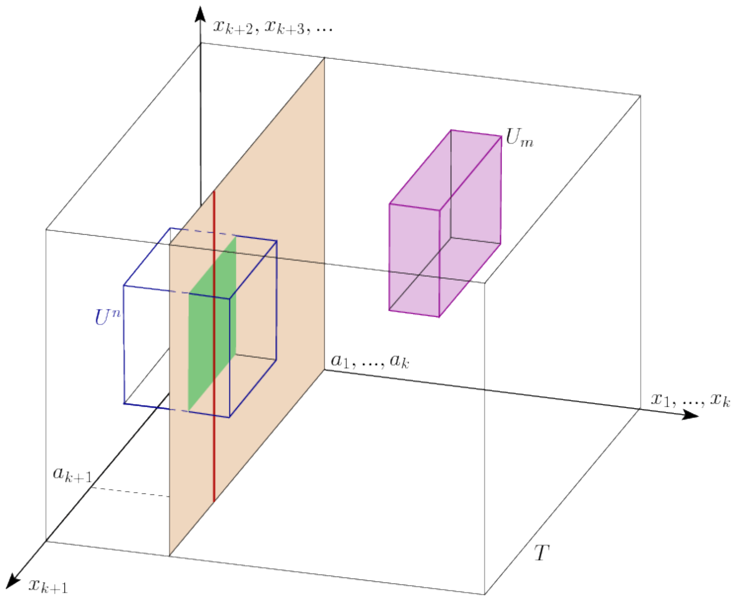
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{\infty} \mu_i(B_i^n) \right) < \prod_{i=1}^{\infty} \mu_i(A_i). \tag{1}$$

Rekurzívan konstruálunk egy olyan $t = (a_1, a_2, \dots) \in T$ pontot, ami a következőt fogja tudni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{k} \chi_{B_i^n}(a_i) \cdot \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(B_i^n) \right) < \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(A_i) \quad \text{minden } k = 0, 1, 2, \dots \text{ esetén.} \tag{2}$$

Ha $k = 0$, akkor az első produktum üres, ezt most is 1-nek definiáljuk.

A (2) szemléletes jelentése a következő. Vegyük az $x_1 = a_1, \dots, x_k = a_k$ hipersíkot, és az összes tégláink "nyomát" — metszetét a hipersíkkal. A baloldalon az első produktum értéke 0 vagy 1 attól függően, hogy az U^n tégla elmetszi-e a hipersíkot. A másik két produktum a hipersíkra eső vetületek módosított mértéke, amit érthetően az első k koordináta nélkül számolunk, ezért megy az index $(k+1)$-től. A (2) formula tehát azt fejezi ki, hogy az U^n téglák nyomának összege a hipersíkon kisebb, mint a T tégla nyoma.



A $k = 0$ esetben (2) egybeesik (1)-gyel, tehát igaz.
Ha k pozitív egész, és $a_1, \dots, a_{k-1}$ már megvan, akkor vizsgáljuk a következő függvényt:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \chi_{B_i^n}(a_i) \cdot \chi_{B_k^n}(x) \cdot \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(B_i^n) \right)$$

(vagyis (2) baloldalán az a_k helyére az x változót tettük). Olyan $a_k \in A_k$ pontra van szükségünk, amelyre $f(a_k) < \prod\limits_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(A_i)$.

Az A_k halmazon integrálva,

$$\int_{A_k} f(x) \mathrm{d}\mu_k(x) \overset{\text{B.L.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_k} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \chi_{B_i^n}(a_i) \cdot \chi_{B_k^n}(x) \cdot \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(B_i^n) \right) \mathrm{d}\mu_k(x)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \chi_{B_i^n}(a_i) \cdot \prod_{i=k}^{\infty} \mu_i(B_i^n) \right) \overset{(2)\ (k-1)\text{-re}}{<} \prod_{i=k}^{\infty} \mu_i(A_i) = \int_{A_k} \left(\prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(A_i) \right) \mathrm{d}\mu_k(x).$$

Az f integrálja kisebb, tehát az A_k halmaz egy pozitív mértékű részén $f < \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(A_i)$; ebből a pozitív mértékű részből válasszunk egy a_k pontot.

Ezzel megkonstruáltuk a (2)-nak eleget tevő $t = (a_1, a_2, \dots)$ sorozatot.

Az indirekt feltevésünk szerint a t pontot fedi valamelyik U^m tégla, vagyis minden i-re $\chi_{B_i^m}(a_i) = 1$. Az U^m egy hengerhalmaz, tehát véges sok i index kivételével $B_i^m = X_i$, ezért elég nagy k esetén

$$1 = \prod_{i=1}^{k} \chi_{B_i^m}(a_i) \cdot \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(B_i^m) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{k} \chi_{B_i^n}(a_i) \cdot \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(B_i^n) \right) \overset{(2)}{<} \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(A_i) \leqslant 1,$$

ellentmondás. Tehát α tényleg σ-szubadditív.

18.2. definíció. Az $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ valószínűségi mértékterek $(i \in I)$ szorzata a $(Z, \mathcal{S}, \varphi)$ mértéktér, ahol $Z = \times_{i \in I} X_i$, φ_α az α-hoz asszociált külső mérték a Z halmazon, $\mathcal{S}$ a φ_α szerint mérhető halmazok rendszere, és φ a φ_α megszorítása $\mathcal{S}$-re.

19. A Fubini-tétel

19.1. tétel (Fubini). *Legyen a $(Z, \mathcal{S}, \varphi)$ az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ mértékterek szorzata, és f φ-m.mérhető Z-n. Ha f (végesen) integrálható, vagy ha Z σ-véges és $\int_Z f \mathrm{d}\varphi$ létezik, akkor*
(a) μ-m.m. x-re létezik a $g(x) = \int_Y f(x,y) \mathrm{d}\nu(y)$ paraméteres integrál;
(b) $\int_X g \mathrm{d}\mu = \int_Z f \mathrm{d}\varphi$, avagy

$$\int_Z f(x,y) \mathrm{d}\varphi(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x).$$

Bizonyítás. A komplex értékű függvények esetében külön vehetjük a valós és a képzetes részt, ezért elég csak a valós értékű függvényekre bizonyítani.

Az f függvényt nevezzük Fubini-félének, ha $\int_Z f \mathrm{d}\varphi$ létezik, és f-re teljesül a tétel, vagyis az (a) és a (b) tulajdonság. Jelölje Φ a Fubini-féle függvények családját. Szép sorban egyre többféle függvényről bizonyítjuk be, hogy Fubini-féle.

(I) Bármely $T = A \times B \in \mathcal{T}$ tégla esetén $\chi_T \in \Phi$.

A φ definíciója alapján trivi:

$$\int_X \left(\int_Y \chi_T(x,y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \left(\int_Y \chi_A(x)\chi_B(y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) =$$
$$= \int_X \left(\chi_A(x) \int_Y \chi_B(y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \chi_A(x)\nu(B) \, \mathrm{d}\mu(x) =$$
$$= \nu(B) \int_X \chi_A(x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \nu(B)\mu(A) = \varphi(T) = \int_Z \chi_T \, \mathrm{d}\varphi.$$

(II) Ha $f \in \Phi$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor $c \cdot f \in \Phi$.

$$\int_X \left(\int_Y c\, f(x,y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \left(c \int_Y f(x,y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) =$$
$$= c \int_X \left(\int_Y f(x,y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = c \int_Z f(x,y) \, \mathrm{d}\varphi = \int_Z \Big(c\, f(x,y) \Big) \mathrm{d}\varphi.$$

(III) Ha $f_1, f_2 \in \Phi$ és $\int_Z f_1 \, \mathrm{d}\varphi + \int_Z f_2 \, \mathrm{d}\varphi$ létezik, akkor $f_1 + f_2 \in \Phi$.

A két integrál összeadható, és (II) miatt f megszorozható (-1)-gyel, ezért feltehetjük, hogy egyik sem $-\infty$. Legyen $g_i(x) = \int_Y f_i(x,y) \, \mathrm{d}\nu(y)$ $(i = 1, 2)$. Mivel

$$\int_X g_i(x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_Z f_i \, \mathrm{d}\varphi > -\infty,$$

az is igaz, hogy μ-m.m. x-re $g_i(x)$ létezik, és az értéke nem $-\infty$. Akkor viszont $g_1(x)$ és $g_2(x)$ μ-m.m. x-re összeadható. Minden egyes ilyen x értékre

$$\int_Y f_i(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) = g_i(x) > -\infty,$$

ezért ν-m.m. y-ra $f_i(x,y) > -\infty$, vagyis értelmes az $f_1(x,y) + f_2(x,y)$ összeg, így

$$g_1(x) + g_2(x) = \int_Y f_1(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) + \int_Y f_2(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) = \int_Y \big(f_1(x,y) + f_2(x,y)\big)\mathrm{d}\nu(y) = g(x),$$

és most már jogos a μ-m.m. x-re létező $g(x)$-ről beszélni.

Mivel

$$\int_X g_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Z f_1\,\mathrm{d}\varphi \quad \text{és} \quad \int_X g_2(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Z f_2\,\mathrm{d}\varphi$$

összeadható,

$$\int_X g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X g_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x) + \int_X g_2(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Z f_1\,\mathrm{d}\varphi + \int_Z f_2\,\mathrm{d}\varphi = \int_Z f\,\mathrm{d}\varphi.$$

(IV) Ha $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$ nemnegatív Fubini-féle függvények egy növekvő sorozata, akkor ezek limesze, $f = \lim f_n$ is Fubini-féle.

Legyen $g_n(x) = \int_Y f_n(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$; ez (a) miatt μ-m.m. x-re létezik, ezért μ-m.m. x-re az összes $g_n(x)$ létezik, és $0 \leqslant g_1(x) \leqslant g_2(x) \leqslant \ldots$. Legyen most $g = \lim g_n$; a MKT miatt

$$g(x) = \lim g_n(x) = \lim \int_Y f_n(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \overset{\text{mkt}}{=} \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \qquad (\mu\text{-m.m. } x\text{-re}),$$

$$\int_Z f\,\mathrm{d}\varphi \overset{\text{mkt}}{=} \lim \int_Z f_n\,\mathrm{d}\varphi \overset{f_n\in\Phi}{=} \lim \int_X g_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \overset{\text{mkt}}{=} \int_X g(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

(V) Ha $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2$, $f_2 \in \Phi$ és $\int_Z f_2\,\mathrm{d}\varphi = 0$, akkor $f_1 \in \Phi$.

Világos, hogy

$$0 \leqslant \int_Z f_1 \mathrm{d}\varphi \leqslant \int_Z f_2 \mathrm{d}\varphi = 0, \quad \text{így} \quad \int_Z f_1 \mathrm{d}\varphi = 0.$$

Abból, hogy

$$\int_X \left(\int_Y f_2(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Z f_2 \mathrm{d}\varphi = 0,$$

látjuk, hogy

$$\mu\text{-m.m } x\text{-re} \qquad \int_Y f_2(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) = 0;$$

$$\mu\text{-m.m } x\text{-re} \quad \Big(\nu\text{-m.m } y\text{-ra} \quad f_2(x,y) = 0\Big);$$

$$\mu\text{-m.m } x\text{-re} \quad \Big(\nu\text{-m.m } y\text{-ra} \quad f_1(x,y) = 0\Big);$$

$$\mu\text{-m.m } x\text{-re} \qquad \int_Y f_1(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) = 0;$$

$$\int_X \left(\int_Y f_1(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = 0 = \int_Z f_1 \mathrm{d}\varphi.$$

(VI) Ha $A = \bigcup T_k$ megszámlálható sok tégla uniója, akkor $\chi_A \in \Phi$.

Mivel a téglák félgyűrűt alkotnak, a szokásos módon kicserélhetjük az unióban szereplő téglákat diszjunkt téglákra. Mostantól a tégláink diszjunktak, ezért $\chi_A = \sum \chi_{T_k}$.

Legyen $f_n = \chi_{T_1 \cup \ldots \cup T_n} = \chi_{T_1} + \ldots + \chi_{T_n}$; Ekkor $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$, és $\lim f_n = \chi_A$.

Ezután (III) miatt $f_n \in \Phi$, majd (IV) miatt $\chi_A = \lim f_n \in \Phi$.

(VII) Tegyük fel, hogy $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}$, mindegyikük megszámlálható sok tégla egyesítése, $\varphi(A_1)$ véges, és $A = \bigcap A_n$. Ekkor $\chi_A \in \Phi$.

Először is, vegyük észre, hogy ha $B = \bigcup_k B_k$ és $C = \bigcup_\ell C_\ell$ is megszámlálható sok tégla uniója, akkor $B \cap C = \bigcup_{k,\ell}(B_k \cap C_\ell)$ is megszámlálható sok tégla uniója. Ezért A_2-t kicserélhetjük az $A_1 \cap A_2$ halmazra, utána A_3-at kicserélhetjük $A_2 \cap A_3$-ra…; ezek után feltehetjük, hogy $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$. Ekkor $\chi_A = \lim \chi_{A_n}$.

Legyen $f_n = \chi_{A_1} - \chi_{A_n}$. (VI) miatt $\chi_{A_n} \in \Phi$, (II+III) miatt $f_n \in \Phi$. Mivel $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$, (IV) miatt $\chi_{A_1 \setminus A} = \lim f_n \in \Phi$. Mivel $\int_Z \chi_{A_1} \mathrm{d}\varphi = \varphi(A_1)$ véges, (II+III) miatt $\chi_A = \chi_{A_1} - \chi_{A_1 \setminus A} \in \Phi$.

(VIII) Ha $\varphi(A) = 0$, akkor $\chi_A \in \Phi$ és μ-m.m. x-re $\nu^*(A_x) = 0$ (itt $A_x = \{y : (x,y) \in A\}$ az A halmaz x szerinti szekciója, ν^* pedig ν teljessé tétele).

Minden n-re fedjük le A-t egy olyan B_n halmazzal, amely megszámlálható sok tégla uniója és $\varphi(B_n) < \frac{1}{n}$, és legyen $C = \cap B_n$. Ekkor persze $\varphi(C) = 0$ mert minden n-re $\varphi(C) \leqslant \varphi(B_n) < \frac{1}{n}$.

(VII) szerint $\chi_C = \chi_{\cap B_n} \in \Phi$, végül $0 \leqslant \chi_A \leqslant \chi_C$ és (V) miatt $\chi_A \in \Phi$.

Már csak azt kell belátni, hogy $\varphi(A) = 0, \chi_A \in \Phi \Rightarrow \mu$-m.m. x-re $\nu^*(A_x) = 0$. Itt Φ definíciója miatt $\int_Z \chi_A \, \mathrm{d}\varphi = \int_X (\int_Y \chi_A \, \mathrm{d}\nu) \, \mathrm{d}\mu$, továbbá $\varphi(A) = 0$ miatt $\int_Z \chi_A \, \mathrm{d}\varphi = 0$. A kettőt összevetve $\int_X (\int_Y \chi_A \, \mathrm{d}\nu) \, \mathrm{d}\mu = 0$, ahonnan következik, hogy μ-m.m. x-re $\int_Y \chi_{A_x} \, \mathrm{d}\nu(y) = \int_Y \chi_A(x,y) \, \mathrm{d}\nu(y) = 0$. Itt A_x lehet, hogy nem mérhető ν szerint, de ν^* szerint már biztosan az; tehát $\nu^*(A_x) = 0$.

(IX) Ha $A \in \mathcal{S}$ és $\varphi(A)$ véges, akkor $\chi_A \in \Phi$.

Válasszunk minden n-re olyan B_n halmazt, amely megszámlálható sok tégla uniója, fedi A-t és $\varphi(B_n) < \varphi(A) + \frac{1}{n}$. Legyen $C = \cap B_n$. Ekkor az $N = C \setminus A$ halmazra $\varphi(N) = 0$; (VII) miatt $\chi_C \in \Phi$, (VIII) miatt $\chi_N \in \Phi$, végül (II+III) miatt $\chi_A = \chi_C - \chi_N \in \Phi$.

(X) Ha $A \in \mathcal{S}$ és A σ-véges φ szerint, akkor $\chi_A \in \Phi$. Valóban, mivel $A = \sqcup A_j$, $\varphi(A_j) \leqslant \infty$, ezért (III+IV+IX) miatt $\chi_A = \sum \chi_{A_j} \in \Phi$.

(XI) Legyen $f \geqslant 0$ mérhető. Ha $\int_Z f \mathrm{d}\varphi$ véges, vagy ha φ σ-véges, akkor $f \in \Phi$. Valóban, ha egy $g = \sum c_k \chi_{A_k} \geqslant 0$ egyszerű függvény integrálja véges, vagy ha φ σ-véges, akkor (II+III+X) miatt $g \in \Phi$. (IV) alapján ugyanez mondható f-re is, mert monoton limesze egyszerű függvényeknek.

(Itt $\chi_k = \chi_{A_k}, \bigcup^* A_k = Z$)

(XII) Legyen f majdnem mérhető és $f \geqslant 0$ m.m. Ha $\int_Z f \mathrm{d}\varphi$ véges, vagy ha φ σ-véges, akkor $f \in \Phi$. Legyen $f_1 \geqslant 0$, és $f_1 = f$ φ-m.mindenhol. Legyen $A := \{z \in Z : f \neq g_1\}$, ekkor $\varphi(A) = 0$ és (VIII) szerint m.m. x-re $\nu^*(A_x) = 0$. Rögzítve egy x-et $f(x,y) = f_1(x,y)$ m.m. y-ra, vagyis $g(x) = \int_Y f(x,y) \mathrm{d}\nu(y) = \int_Y f_1(x,y) \mathrm{d}\nu(y) := g_1(x)$ is m.m. x-re létezik, és az egyenlőség fennáll. Ekkor pedig (XI) szerint $\int_X g \mathrm{d}\mu = \int_X g_1 \mathrm{d}\mu = \int_Z f_1 \mathrm{d}\varphi = \int_Z f \mathrm{d}\varphi$.

(XIII) Legyen f majdnem mérhető. Ha $\int_Z f \mathrm{d}\varphi$ véges, vagy ha φ σ-véges és $\int_Z f \mathrm{d}\varphi$ létezik, akkor $f \in \Phi$. Az eddigiek szerint ha az első feltétel teljesül készen vagyunk ($f^+, f^- \geqslant 0$). A második esetben f, f^+, f^- majdnem mérhetők, és nemnegatívak, (II+XII) szerint $f^+, -f^- \in \Phi$, az integrál definíciója, és (III) miatt $f \in \Phi$ is teljesül.

19.2. lemma. *X, Y M_2 topologikus terek, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ szorzata $(Z, \mathcal{S}, \varphi)$, $\mathcal{M} \supset \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{N} \supset \mathcal{B}(Y) \Rightarrow \mathcal{S} \supset \mathcal{B}(Z)$.*

Bizonyítás. Elég: $\mathcal{S} \supset Z$-beli nyíltak.

X, Y $M_2 \Rightarrow Z$-beli nyíltak előállnak $\mathcal{S}$-beli bázisnyílt $\times$ bázisnyíltak megszámlálható uniójaként.

19.3. lemma. *Az alábbi tételben* $\mu \ll \lambda$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $B \in \mathcal{B}$, $\lambda(B) = 0$
$\widetilde{B} := \{(x,y) : x + y \in B\}$ Borel (Borel $\times$ $\mathbb{R}$ elforgatva), lemma $\Rightarrow$ $\lambda \times \mu$-mérhető.
λ, μ σ-véges $\Rightarrow$ $\lambda \times \mu$ σ-véges.
Fubini $\Rightarrow$ $\int \mu(\widetilde{B}_x)\ \mathrm{d}\lambda = \int \mu(B - x)\ \mathrm{d}\lambda = \int \mu(B) = (\lambda \times \mu)(\widetilde{B}) = \int \lambda(\widetilde{B}_y) d\mu = \int \lambda(B - y) d\mu = \int \lambda(B) d\mu = \int 0 d\mu = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0$.

19.4. tétel. $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}, \mu)$ *eltolásinvariáns, σ-véges* $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \mu(E) = c\lambda(E), \forall E \in \mathcal{B}$.

Bizonyítás. $p = 1$
Radon-Nikodym $\Rightarrow \exists f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ mérhető $\forall E \in \mathcal{B} : \mu(E) = \mu(E) = \int_E f d\lambda$.
Cél: $f = c \in \mathbb{R}$ λ-m.m..
μ eltolásinvariáns $\Rightarrow \mu(E) = \mu(E + t) = \int_E f(x - t)\ \mathrm{d}\lambda(x)$, $f(x)$ és$f(x - t)$ is Radom-Nikodym deriváltja μ-nek, Radom-Nikodym egyértelmű $\Rightarrow \forall t : f(x) = f(x - t)$ λ-m.m. x-re.
Lemma (lenti) $\Rightarrow \exists c \in [0, \infty] : f = c$ λ-m.m., $c = \infty$ nem lehet, mert μ σ-véges $\Rightarrow \mu = c \cdot \lambda$.

19.5. lemma. $(\forall t) f(x) = f(x - t)$ *λ-m.m. x-re* $\Rightarrow \exists c \in vmi : f(x) = c\ \lambda$ *m.m..*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\exists c_1 < c_2 : \lambda(\{x : f(x) > c_2\}) > 0$, $\lambda(\{x : f(x) < c_1\}) > 0$.
$\{x : f(x) > c_2\} = E_2$, $\{x : f(x) < c_1\} = E_1 \Rightarrow \lambda(E_2) > 0$, $\lambda(E_1) > 0$.
Lebesgue sűrűségi tétel $\Rightarrow \exists x_i$: sűrűségi pontja E_i-nek.
$t = x_2 - x_1 \Rightarrow x_2$ mindkettő sűrűségi pontja, ez ellentmondás. $c := sup\{v : \lambda(\{x : f(x) > v\}) > 0\}$
Előzőek $\Rightarrow f = c\ \lambda$ m.m..

19.6. *megjegyzés.* Ha $(\mathbb{R}^p, \mathcal{M}, \mu)$ σ-véges, eltolásinvariáns, $\mathcal{M} \supset \mathcal{B}$, akkor az előző NEM igaz, de $c \in [0, \infty]$-vel már igaz. ($\mu|_{\mathcal{B}}$ lehet nem σ-véges).

VII. rész:
Kitekintések

20. Lp-terek

L_p-normák. Valós és komplex ℓ_p és L_p terek. Konjugált kitevők, Hölder- és Minkowski-egyenlőtlenség. Faktorizálás a m.m. 0 függvények terével. Sűrű alterek L_p-terekben (egyszerű, szép (véges sok, téglán konstans), kompakt tartójú folytonos függvények alterei). $L_p(\mathbb{R}^n)$-ben $p < \infty$ esetén sűrű halmazt alkotnak a véges sok, racionális koordinátájú tégalapon racionális konstans függvények. Szeparabilitás. Példa arra, hogy $L_\infty(\mathbb{R})$ nem szeparábilis. Példák arra, hogy $L_p \not\subset L_q$. Teljesség, Riesz-Fischer-tétel. Banach-tér. (Petruska II, 24. fej.)

Egy rögzített $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktéren majdnem mérhető függvényekkel fogunk dolgozni. A képhalmaz $\overline{\mathbb{R}}$ vagy $\mathbb{C}$ is lehet, tehát vannak "valós L_p terek" és "komplex L_p terek" is.

20.1. definíció. Egy majdnem mérhető függvény p-edik normája:
$0 < p < \infty$ esetén

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu \right)^{1/p};$$

$p = \infty$ esetén
$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|f| = \min\{K : \ |f| \leqslant K \ \mu\text{-m.m.}\}.$$
(lényeges szuprémum)

Min: mert megszámlálható sok nullmértékű uniója nullmértékű.

HF: $lim_{p\to\infty}\|f\|_p = \|f\|_\infty$

20.2. tétel (Hölder-egyenlőtlenség). *Ha $p, q \geqslant 1$ konjugált kitevők, azaz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, és f, g majdnem mérhető függvények, akkor*
$$\|f\|_p \cdot \|g\|_q \geqslant \|fg\|_1.$$

Bizonyítás. P A $p = 1$ eset triviális, ezért feltesszük, hogy $1 < p < \infty$.

Akkor is triviális az állítás, ha $\|f\|_p \cdot \|g\|_p = 0$ (f vagy g m.m. 0), egyébként meg a homogenitás miatt feltehetjük, hogy $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. $|f(x)|$, $|g(x)|$ m.m. végesek, és ilyen pontban a log függvény konkávitása miatt
$$\frac{1}{p}log|f(x)|^p + \frac{1}{q}log|g(x)|^q \leqslant log(\frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q)$$
azaz
$$|f(x)| \cdot |g(x)| \leqslant \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q$$
és ezt integrálva az állítást kapjuk, Ha egyenlőség áll, akkor az integrálás előtti két oldal m.m. megegyezik, és mivel log szigorúan konkáv, ezért m.m. x-re $|f(x)|^p = |g(x)|^q$.

20.3. *megjegyzés.* **KT** Legyen $g \in L_q$ fix, $\Lambda(f) = \int fg$, tehát Λ :függvény$\to$szám, lineáris, azaz Λ lineáris funkcionál L_p-n.

Tehát $\forall g \in L_q$ ad egy lineáris funkcionált L_p-n.

Igaz a megfordítás is.

Hölder szerint $|\Lambda(f)| \leqslant \|g\|_q \cdot \|f\|_p$, ez a normája a funkcionálnak, nincs ennél jobb konstans (bizonyítás nélkül).

20.4. tétel (Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkj egyenlőtlenség). *Ha f, g majdnem mérhető függvények, akkor*
$$\|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \geqslant \|fg\|_1.$$

20.5. tétel (Minkowski-egyenlőtlenség). *Ha $1 \leqslant p \leqslant \infty$, és f, g majdnem mérhető függvények, akkor*
$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Bizonyítás. P A $p = 1$ vagy $p = \infty$ eset triviális, legyen $1 < p < \infty$. Mivel az x^p függvény szigorúan konvex $[0, \infty)$-en, ezért
$$\left(\frac{|f(x)| + |g(x)|}{2}\right)^p \leqslant \frac{|f(x)|^p + |g(x)|^p}{2}$$
azaz $(|f(x)| + |g(x)|)^p \leqslant 2^{p-1}(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$, és ezt integrálva
$$\|f + g\|_p \leqslant 2^{p-1}(\|f\|_p + \|g\|_p) < \infty$$
azaz $f + g \in L_p$. Ha $\|f + g\|_p = 0$, akkor az állítás megint csak triviális, így feltehetjük, hogy $\|f + g\|_p > 0$. Legyen q a p-hez tartozó konjugált kitevő, és vegyük észre, hogy ha $F \in L_p$, akkor $pq - q = p$ miatt $|F|^{p-1} \in L_q$ és $\||F|^{p-1}\|_q = (\|F\|_p)^{p/q}$. Tehát a háromszög-egyenlőtlenség és a Hölder-egyenlőtlenség felhasználásával

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p d\mu \leqslant \int |f+g|^{p-1}\cdot|f|\,\mathrm{d}\mu + \int |f+g|^{p-1}\cdot|g|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \|f+g\|_p^{p/q}\cdot(\|f\|_p+\|g\|_p)$$

és ebből $p-\frac{p}{q}=1$ miatt az állítást kapjuk.

20.6. következmény. *Minden egyes $1\leqslant p\leqslant\infty$ esetén, az olyan majdnem mérhető f függvények, amelyekre $\|f\|_p$ véges, vektorteret alkotnak.*

20.7. definíció. Az $L_p(X,\mathcal{M},\mu)$ tér a véges p-normájú függvények tere, faktorizálva a m.m. nulla függvények alterével. Ezen a $\|.\|$ tényleg norma, tehát L_p egy normált vektortér.

20.8. *példa.* 1. Ha $X=\mathbb{N}$, a tér neve (valós vagy komplex) ℓ_p tér. Van, amikor praktikus negatív indexeket is megengedni, tehát $X=\mathbb{Z}$; pl. Fourier-soroknál.

2. Ha X az $\mathbb{R}^d$ egy pozitív mértékű részhalmaza, és μ a Lebesgue-mérték. Ilyenkor csak az alaphalmazt adjuk meg: $L_2(X)$; $L_2\big([a,b]\big)$ stb.

20.9. *példa.* A különböző p értékekre különböző függvényosztályokat kapunk, általában egyik sem része a másiknak. Például ha $X=(0,\infty)$ és $p<q$, akkor $\max(x^{-1/q}-1,0)\in L_p\backslash L_q$ és $\max(1,x^{-1/p})\in L_q\backslash L_p$.

Ha $\mu(X)<\infty$ véges, akkor $p<q$-ból a Hölder egyenlőtlenség miatt következik, hogy $L_q\subset L_p$. (1, és f^p-re)

20.10. tétel. *L_p-ben sűrű az egyszerű függvények altere.*

Ha p véges, akkor

$$L_p(\mathbb{R}^d) \overset{\textit{sűrű altér}}{\rhd} \textit{egyszerű függvények} \overset{\textit{sűrű altér}}{\rhd} \textit{"szép" függvények} \overset{\textit{sűrű részhalmaz}}{\rhd} \textit{rac. "szép" függvények}$$

ahol a szép függvények a véges sok téglán konstans, azon kívül nulla függvények; a rac. "szép" függvények a racionális téglákon konstans racionális függvények.

Ha p véges, akkor

$$L_p(\mathbb{R}^d) \overset{\textit{sűrű altér}}{\rhd} \textit{kompakt tartójú folytonos függvények.}$$

Bizonyítás. $L_p(\mathbb{R}^d) \overset{\text{sűrű altér}}{\rhd}$ egyszerű függvények

A $p=\infty$ eset már szerepelt: korlátos mérhető függvény egyenletesen közelíthető egyszerű függvényekkel.

Legyen $(X,\mathcal{M},\mu)$ mértéktér, $f\in L_p$, $1\leqslant p<\infty$, $\varepsilon>0$, és adott n-re legyen $A_n=\{x:|f(x)|\leqslant\frac{1}{n}\}$, $B_n=\{x:|f(x)|\geqslant n\}$. Mivel $\varphi(H)=\int_H|f|^p d\mu$ véges mérték, ezért $lim\varphi(A_n)=lim\varphi(B_n)=0$ ($\cap A_n=\{x:f=0\}\Rightarrow\varphi(\cap A_n)=0+$ fogyó metszet tétel).

Választhatunk tehát olyan m egész számot, hogy

$$\varphi(A_m)<\frac{\varepsilon^p}{3},\varphi(B_m)<\frac{\varepsilon^p}{3}.$$

Legyen

2

$$N>\frac{3\mu(X\backslash(A_m\cup B_m))}{\varepsilon^p}$$

(ez lehetséges, mert $\mu(\{x:|f(x)|>\frac{1}{m}\})<\infty$), majd a $[0,m]$ intervallumot osszuk N egyenlő részre. Ezután

$g(x)=0$, ha $x\in A_m\cup B_m$, $g(x)=\frac{k}{N}$, ha $\frac{k}{N}\leqslant|f(x)|<\frac{k+1}{N}$, $x\notin A_m\cup B_m$ egyszerű függvény, és

$$\int_X|f-g|^p d\mu=\int_{A_m}|f|^p d\mu+\int_{B_m}|f|^p d\mu+\int_{X\backslash(A_m\cup B_m)}|f-g|^p d\mu\leqslant\frac{\varepsilon^p}{3}+\frac{\varepsilon^p}{3}+\frac{1}{N}\mu(X\backslash(A_m\cup B_m))<\varepsilon^p$$

azaz $\|f-g\|_p<\varepsilon$.

20.11. következmény. *Ha p véges, akkor $L_p(\mathbb{R}^d)$ szeparábilis.*

20.12. *példa.* $L_\infty(\mathbb{R})$ nem szeparábilis, mert a $\chi_{(c<\infty)}$ ($c \in \mathbb{R}$) alakú függvényekből kontinuum sok van, és bármelyik kettő távolsága 1, tehát az $\frac{1}{2}$ sugarú környezeteik diszjunktak.

20.13. *emlékeztető* (Luzin-tétel). Ha $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}, \mu)$ Lebesgue-Stieltjes mértéktér, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mérhető, $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ folytonos, hogy $\mu(f \neq g) < \varepsilon$

Ehhez a tételhez a következő kiegészítéseket tehetjük:

20.14. tétel. *[KT]*
20.13 feltételei mellett
1, Ha $|f| \leqslant M$, akkor $|g| \leqslant M$ is garantálható.
2, Ha f kompakt tartójú, akkor g is választható kompakt tartójúnak.

Bizonyítás.
1, Ahol $|g| > M$, ott "vágjuk le", azaz legyen $g_1 = max(min(g, M), -M)$. Ez továbbra is folytonos függvény, és $\mu(f \neq g_1) < \varepsilon$, hiszen csak olyan helyen változtattuk meg g-t, ahol $|g| > M$, azaz ezeken a helyeken $f = g$ már eredetileg sem teljesült.
2, Mivel f kompakt tartójú, ezért van egy gömb, amelyen kívül $f = 0$. Ekkor legyen $g_1 = g \cdot h$, ahol h egy olyan függvény, amely a gömbön kívül 0, és mindenhol folytonos. A h függvény alkalmas megválasztásával elérhető, hogy $\mu(g_1 \neq f) < \varepsilon$ még mindig teljesüljön.

20.15. tétel (KT). *$L_p(\mathbb{R}^d)$-ben a kompakt tartójú folytonos függvények sűrű alteret alkotnak.*

Bizonyítás. Az a rész, hogy alteret alkotnak, triviális.
Tegyük fel, hogy $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $\delta > 0$.
Először két segédállítást látunk be.

20.16. Állítás (KT). $\exists f_1 \in L_p(\mathbb{R}^d) : \|f_1 - f\|_p < \frac{\delta}{2}$, *$f_1$ kompakt tartójú, korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $\varphi(H) = \int_H |f|^p \, d\mu$, ez véges mérték lesz. Legyen $B_n = \{x : |f(x)| \geqslant n\}$, és $A_n = \{\mathbb{R}^d \backslash B(0, n)\}$
φ véges mérték, $B_1 \supset B_2 \supset \dots$, $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \bigcap_{n=1}^\infty B_n = \varnothing \implies (\varphi(A_n) \to 0,\ \varphi(B_n) \to 0) \implies (\exists\, n : \varphi(A_n) < \frac{\delta^p}{2^{p+1}},\ \varphi(B_n) < \frac{\delta^p}{2^{p+1}})$. Ekkor legyen

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in A_n \cup B_n \\ f(x), & \text{különben.} \end{cases}$$

Ez könnyen látható módon megfelel a feltételeknek: kompakt tartójú, hiszen $B(0, n)$ tartója; korlátos, mert $|f_1| \leqslant n$ és

$$\|f_1 - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f_1 - f|^p \, d\lambda = \int_{A_n \cup B_n} |f|^p \, d\lambda = \varphi(A_n \cup B_n) \leqslant \varphi(A_n) + \varphi(B_n) < \frac{\delta^p}{2^{p+1}} + \frac{\delta^p}{2^{p+1}} = \frac{\delta^p}{2^p},$$

hiszen $f_1 - f = 0$ $\mathbb{R}^d \backslash (A_n \cup B_n)$-en, $A_n \cup B_n$-en pedig $f_1 - f = -f$. Innen $\|f_1 - f\|_p < \frac{\delta}{2}$

20.17. Állítás (KT). *Az előző f_1-hez $\exists g$ kompakt tartójú folytonos, hogy $|g| \leqslant M$ (M az f_1 függvény korlátja, $\mu(f_1 \neq g) < (\frac{\delta}{4M})^p$*

Bizonyítás. Alkalmazzuk 20.14-et $\varepsilon = (\frac{\delta}{4M})^p$-re. Ekkor kapunk egy g függvényt, hogy g kompakt tartójú, folytonos, $|g| \leqslant M$, $\mu(f_1 \neq g) < \varepsilon$ és

$$\|g - f_1\|_p^p = \int |g - f_1|^p \, d\mu \leqslant \int_{g \neq f_1} \big(|g| + |f_1|\big)^p \, d\mu \leqslant \varepsilon \cdot (2M)^p < \left(\frac{\delta}{2}\right)^p$$

teljesül ε választása miatt. Innen $\|g - f_1\|_p < \frac{\delta}{2}$.

Ezzel 20.15-öt beláttuk, hiszen az így kapott g kompakt tartójú folytonos függvényre $\|g-f\|_p \leqslant \|g-f_1\|_p + \|f_1 - f\|_p < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$ teljesül.

21. LP-terek(folytatás)

21.1. *példa.* Az új metrika új konvergenciafogalmat is jelent; a pontonkénti és az L_p-beli konvergencia nem következik egymásból:

Az $f_n = \chi_{[n,n+1)}$ függvénysorozatra $f_n \to 0$ pontonként, de $f_n \overset{L_p}{\not\to} 0$.

Legyen $n = 2^k + r$, $0 \leqslant r < 2^k$ esetén $g_n = \chi_{\left[\frac{r}{2^k}, \frac{r+1}{2^k}\right]}$ (tehát egyre kisebb vakondok dugják ki a fejüket, de minden pontban végtelen sok alkalommal). Ha $p < \infty$, akkor $g_n \overset{L_p}{\to} 0$ de $g_n \not\to 0$ pontonként.

Az L_∞-beli konvergencia a majdnem egyenletes konvergenciát jelenti, tehát egy nullmértékű halmazt elhagyva a függvénysorozat egyenletesen konvergál.

A következőkben sokszor felhasználjuk az alábbi állítást:

21.2. Állítás (KT). *Ha* $f_n : X \to \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : (\forall n, m > N,\ \forall x : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon) \implies f_n$ *egyenletesen konvergens*

21.3. lemma. *Ha* $f_1, f_2, \ldots \geqslant 0$ *majdnem mérhető függvények, akkor*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right\|_p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p.$$

Bizonyítás.

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right\|_p = \left(\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)^p \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} = \left(\int_X \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n \right)^p \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} =$$

$$\overset{\text{m.k.}}{=} \lim_{N\to\infty} \left(\int_X \left(\sum_{n=1}^{N} f_n \right)^p \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} = \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} f_n \right\|_p \leqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p.$$

Itt a monoton konvergencia tételt a $g_N = \left(\sum_{n=1}^{N} f_n \right)^p$ függvénysorra alkalmazzuk, és közben az $\frac{1}{p}$-edik és p-edik hatványra emelést felcseréltük a limeszképzéssel.

21.4. tétel (Riesz–Fischer). *Az* $L_p(X, \mathcal{M}, \mu)$ *metrikus tér teljes, azaz minden Cauchy-sorozat konvergens.*

Bizonyítás. ha $p = \infty$, akkor a Cauchy-tulajdonság ugyanaz, mint a majdnem egyenletes konvergencia:

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists n_0\ \forall m, n \geqslant n_0\ |f_n - f_m| < \frac{1}{k} \text{ m.m.}$$

A megszámlálható sok nullmértékű halmaz uniója legyen N; ekkor az $X \backslash N$ halmazra megszorítva teljesül az egyenletes Cauchy-feltétel, tehát (f_n) egyenletesen konvergens.

Legyen most $1 \leqslant p < \infty$, és vegyünk egy Cauchy-tulajdonságú (f_n) sorozatot. Legyen minden $k \in \mathbb{N}$ esetén n_k olyan, hogy

$$\forall m, n \geqslant n_k \quad \|f_n - f_m\|_p < \frac{1}{2^k},$$

és legyen

$$g_k = f_{n_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

A következőket bizonyítjuk:

1. A g_k sorozat m.m. pontban konvergens;

2. Ha g a g_k sorozat pontonkénti limesze, akkor $g \in L_p$ és $g_k \xrightarrow{L_p} g$.

3. $f_n \xrightarrow{L_p} g$.

1. Legyen $h_1, h_2, \ldots$ az a függvénysorozat, amelyre $g_k = h_1 + h_2 + \ldots + h_k$, tehát $h_1 = g_1$, és $k \geqslant 2$ esetén $h_k = g_k - g_{k-1}$. Legyen $d = \sum_{i=1}^{\infty} |h_i|$.

Az n_k definíciója miatt

$$\|h_k\|_p = \|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\|_p < \frac{1}{2^{k-1}}, \quad (k \geqslant 2),$$

$$\|d\|_p = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} |h_k| \right\|_p \overset{\text{Lemma}}{\leqslant} \sum_{k=1}^{\infty} \|h_k\|_p \leqslant \|h_1\|_p + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} < \infty$$

Emiatt $d \in L_p$ és $d(x)$ m.m. x-re véges. Ha viszont egy x pontban $d(x) = \sum |h_k(x)|$ véges, akkor a $\sum h_k(x)$ sor konvergens, azaz a $(g_k(x))$ sorozat konvergens. Legyen $g = \lim g_k = \sum_{i=1}^{\infty} h_i$. (Ez egyelőre pontonkénti limesz.)

2.

$$\|g - g_k\|_p = \left\| \sum_{i=k+1}^{\infty} h_i \right\|_p \overset{\text{Lemma}}{\leqslant} \sum_{i=k+1}^{\infty} \|h_i\|_p \leqslant \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{2}{2^k}.$$

3. Ha $n \geqslant n_k$, akkor

$$\|g - f_n\|_p \leqslant \|g - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f_n\|_p = \|g - g_k\|_p + \|f_{n_k} - f_n\|_p < \frac{2}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{3}{2^k}.$$

21.5. definíció. Azokat a normált vektortereket, amelyek egyben teljes metrikus terek is, Banach-térnek hívjuk.

22. L2-terek

Skaláris szorzás. Az L_2 és ℓ_2 Hilbert-terek. A Legendre- és a trigonometrikus polinomok rendszerének teljessége. Schauder-bázis. Az $L_2([a,b])$ izomorfiája az ℓ_2 térrel. (Petruska II, 24. fej.)

A leggyakrabban előforduló esetek persze a legegyszerűbb L_1 és L_∞, no meg — a skaláris szorzás miatt — az L_2.

22.1. definíció. Az $f, g \in L_2(X, \mathcal{M}, \mu)$ függvények skaláris szorzata

$$\langle f, g \rangle = \int_X \overline{f} g \; \mathrm{d}\mu.$$

Ennek megvannak a véges dimenziós algebrából jól ismert tulajdonságai, pl. $\langle f, f \rangle = \|f\|^2$, valósban bi- komplexben szeszkilinearitás, lehet véges sok vektorra Gram–Schmidt ortogonalizációt végezni stb.

A Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség szerint

$$\big|\langle f, g \rangle\big| \leqslant \|f\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

22.2. definíció. Az olyan Banach-tereket, amelyekben van skaláris szorzás, és $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$, (valós, illetve komplex) Hilbert-tereknek hívjuk.

23. Mértékben való konvergencia.

Mértékben való konvergencia. Metrizálhatóság. Kapcsolat a mértékben való, az L_p-beli és a pontonkénti konvergencia között. Teljesség.

23.1. definíció. Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, M a majdnem mérhető, m.m. véges függvények vektortere, faktorizálva a m.m. nulla függvények terével.

Az $f_1, f_2, \ldots \in M$ függvénysorozat mértékben tart a $g \in M$ függvényhez (jele: $f_n \stackrel{m}{\to} g$ vagy $f_n \stackrel{\mu}{\to} g$, ha

$$\forall \delta > 0 \; \mu\Big(|f_n - g| \geqslant \delta\Big) \to 0.$$

23.2. *megjegyzés* (**KT**). A mértékben való konvergenciát másképpen sztochasztikus konvergenciának, a m.m. konvergenciát pedig 1 valószínűségű konvergenciának is nevezzük.

23.3. definíció. Definiálhatjuk M-en a következő metrikát:

$$d(f, g) = \min\Big(1, \inf\{\delta + \mu\Big(|f - g| \geqslant \delta\Big)\Big\}.$$

23.4. tétel. *(a) A d függvény eltolásinvariáns metrika.*

(b) $f_n \stackrel{m}{\to} g$ akkor és csak akkor, ha $d(f_n, g) \to 0$.

Bizonyítás. (a) Csak a háromszög-egyenlőtlenség nem triviális; azt akarjuk igazolni, hogy $d(f, g) + d(g, h) \geqslant d(f, h)$. Ha $d(f, g) = 1$ vagy $d(g, h) = 1$, akkor persze trivi.

Ha $d(f, g) < 1$ és $d(g, h) < 1$ akkor vegyünk egy tetszőleges ε-t. Ehhez létezik olyan $\delta_1 > 0$ és $\delta_2 > 0$, hogy

$$\delta_1 + \mu\Big(|f - g| \geqslant \delta_1\Big) < d(f, g) + \varepsilon,$$
$$\delta_2 + \mu\Big(|g - h| \geqslant \delta_2\Big) < d(g, h) + \varepsilon;$$

$$d(f, h) \leqslant \delta_1 + \delta_2 + \mu\Big(|f - h| \geqslant \delta_1 + \delta_2\Big) \leqslant \delta_1 + \delta_2 + \mu\Big(|f - g| \geqslant \delta_1\Big) + \mu\Big(|g - h| \geqslant \delta_2\Big) < d(f, g) + d(g, h) + 2\varepsilon.$$

Végül szokás szerint $\varepsilon \to 0$.

(b, $\Rightarrow$) Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, $\delta = \varepsilon/2$. Ekkor van olyan n_0 küszöbindex, hogy $n \geqslant n_0$ esetén $\mu\Big(|f_n - g| \geqslant \delta\Big) < \delta$. Akkor pedig

$$d(f_n, g) \leqslant \delta + \mu\Big(|f_n - g| \geqslant \delta\Big) < 2\delta = \varepsilon.$$

(b, $\Leftarrow$) Legyen $\delta_0 > 0$ és $0 < \varepsilon < \min(1, \delta_0)$. Olyan n_0 kell, hogy $n \geqslant n_0$ esetén $\mu\Big(|f_n - g| \geqslant \delta_0\Big) < \varepsilon$.
Legyen n_0, hogy $n \geqslant n_0$-ra $d(f_n, g) < \varepsilon$.

$$d(f_n, g) < \varepsilon \leqslant 1$$
$$\inf_{\delta} \Big\{\delta + \mu\Big(|f_n - g| \geqslant \delta\Big)\Big\} < \varepsilon$$
$$\exists \delta > 0 : \quad \delta + \mu\Big(|f_n - g| \geqslant \delta\Big) < \varepsilon \leqslant \delta_0$$
$$\delta \leqslant \delta_0,$$
$$\mu\Big(|f_n - g| \geqslant \delta_0\Big) \leqslant \mu\Big(|f_n - g| \geqslant \delta\Big) < \varepsilon.$$

23.5. tétel. *Ha* $f_n \xrightarrow{L_p} g$, *akkor* $f_n \xrightarrow{m} g$.

Bizonyítás. Ha $p = \infty$, akkor a konvergencia egy nullmértékű halmaztól eltekintve egyenletes. Ha $p < \infty$, akkor

$$\|f_n - g\|_p{}^p = \int_X |f_n - g|^p \mathrm{d}\mu = \int_{|f_n-g|\geqslant\delta} |f_n - g|^p \mathrm{d}\mu + \int_{|f_n-g|<\delta} |f_n - g|^p \mathrm{d}\mu \geqslant$$
$$\geqslant \int_{|f_n-g|\geqslant\delta} |f_n - g|^p \mathrm{d}\mu + 0 \geqslant \mu\Big(|f_n - g| \geqslant \delta\Big) \cdot \delta^p,$$
$$\mu\Big(|f_n - g| \geqslant \delta\Big) \leqslant \frac{\|f_n - g\|_p{}^p}{\delta^p} \to 0.$$

23.6. *példa.* Abból, hogy $f_n \to g$ pontonként, nem következik, hogy $f_n \xrightarrow{m} g$. Például az $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ mértéktérben az $f_n = \chi_{(n,\infty)}$ sorozat pontonként tart 0-hoz, mégis $d(f_n, 0) = 1$.

23.7. tétel. *Ha* $f_n \to g$ *pontonként, és* μ *véges, akkor* $f_n \xrightarrow{m} g$.

Bizonyítás. Legyen $\delta > 0$ tetszőleges.

$$\mu\big(|f_n - g| \geqslant \delta\big) \leqslant \mu\Bigg(\bigcup_{k=n}^{\infty} X\big(|f_k - g| \geqslant \delta\big)\Bigg) \to \mu\Bigg(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} X\big(|f_k - g| \geqslant \delta\big)\Bigg) = \mu(\varnothing) = 0.$$

23.8. Állítás (KT). *23.7-ben* $f_n \to g$ *m.m. is elég.*

Bizonyítás. Legyen

$$A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} X\big(|f_k - g| \geqslant \delta\big),$$

ekkor $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, $\mu(A_1) < \infty \implies (\mu(A_n) \to \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n))$, és $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x : \lim f_n(x) \neq g(x)\}$. Továbbá $\mu(\{x : \lim f_n(x) \neq g(x)\}) = 0$, mert $f_n \to g$ m.m.

23.9. tétel. *A* (M, d) *metrikus tér teljes.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f_n egy Cauchy-sorozat; ehhez szeretnénk mértékbeli limeszfüggvényt.

Minden k-ra legyen n_k olyan, hogy $n, m \geqslant n_k$ esetén $d(f_n, f_m) < \frac{1}{2^k}$, és legyen $A_k = X\Big(|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| \geqslant \frac{1}{2^k}\Big)$.

Alkalmas δ-val

$$\delta + \mu\Big(\big|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\big| \geqslant \delta\Big) < \frac{1}{2^k},$$

de akkor $\delta < \frac{1}{2^k}$ és így $\mu\Big(\big|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\big| \geqslant \frac{1}{2^k}\Big) < \frac{1}{2^k}$.

Bármely k esetén, az $A_k \cup A_{k+1} \cup \dots$ halmazon kívül az (f_{n_k}) részsorozat egyenletesen Cauchy, így az is igaz, hogy m.m.pontban konvergens. Legyen $g = \lim f_{n_k}$ a pontonkénti limesz.

Az $A_k \cup A_{k+1} \cup \dots$ halmazon kívül $|f_{n_k} - g| < \frac{2}{2^k}$, ezért

$$\mu\Big(|f_{n_k} - g| \geqslant \frac{2}{2^k}\Big) \leqslant \mu(A_k \cup A_{k+1} \cup \dots) \leqslant \sum_{l=k}^{\infty} \mu(A_l) = \sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{2^l} = \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{2}{2^k},$$

és így

$$d(f_{n_k}, g) \leqslant \frac{2}{2^k} + \mu\Big(|f_{n_k} - g| \geqslant \frac{2}{2^k}\Big) < \frac{4}{2^k}.$$

Tehát $f_{n_k} \xrightarrow{m} g$; ebből következik, hogy $f_n \xrightarrow{m} g$.

23.10. tétel (Jegorov). ***(KT)*** *Tegyük fel, hogy $\mu(X) < \infty$, $f_n \to f$ m.m. Ekkor $\forall\varepsilon > 0$ $\exists A_\varepsilon \in \mathcal{M}$: $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$, és $f_n \to f$ egyenletesen $X \backslash A_\varepsilon$-on.*

Bizonyítás. Hasonlóan, mint 23.8-ban.
Legyen $\varepsilon > 0$ és legyen

$$A_{n,\delta} = \bigcup_{k=n}^{\infty} X\big(|f_k - f| \geqslant \delta\big).$$

23.8 alapján $\forall\delta$-ra $\mu(A_{n,\delta}) \to 0$, azaz $\delta = \frac{1}{k}$-hoz $\exists n_k : \mu(A_{n_k,\frac{1}{k}}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.
Legyen

$$A_\varepsilon := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k,\frac{1}{k}}.$$

Ekkor a σ-szubadditivitás miatt

$$\mu(A_\varepsilon) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{n_k,\frac{1}{k}}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon,$$

és $f_n \to f$ egyenletesen $X \backslash A_\varepsilon$, mert ha $\frac{1}{k} \leqslant \eta$, akkor $X \backslash A_\varepsilon \subset X \backslash A_{n_k,\frac{1}{k}}$ miatt $n \geqslant n_k$ esetén $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \leqslant \eta$ teljesül $\forall x \in X \backslash A_\varepsilon$-ra.

24. Mértéktartó leképezések

24.1. definíció. Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ mértéktér. Az $f : X \to Y$ mérhető leképezést mértéktartónak nevezzük, ha minden $H \in \mathcal{N}$ esetén $\mu(f^{-1}(H)) = \nu(H)$.

24.2. tétel. *Legyen $f : X \to Y$ mértéktartó. Tetszőleges h függvény esetén*

$$\int_Y h \,\mathrm{d}\nu = \int_X h \circ f \,\mathrm{d}\mu,$$

ha valamelyik integrál létezik.

Bizonyítás. Legyen h egyszerű függvény az Y téren: $h = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \chi_k$, ahol χ_k az Y_k halmaz karakterisztikus függvénye. Legyen $Y = \bigcup_{k=1}^{n} Y_k$ véges diszjunkt felbontás és $X_k = f^{-1}(Y_k)$, ekkor

$$\int_Y h \,\mathrm{d}\nu = \sum_{k=1}^{n} c_k \nu(Y_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(X_k) = \int_X h \circ f \,\mathrm{d}\mu$$

(amennyiben létezik az integrál), hiszen $X = \bigcup_{k=1}^{n}$ is diszjunkt felbontás, és $x \in X_k$ esetén $(h(f(x))) = c_k$. Ha ezután h_n egyszerű függvények monoton növő sorozata az Y téren, akkor $h_n \circ f$ is ilyen az X téren, tehát a monoton konvergencia tétele szerint a tételben szereplő egyenlőség igaz minden $h \geqslant 0$ mérhető függvényre, és ebből minden olyan esetben is, amikor valamelyik oldali integrál létezik.

24.3. definíció. Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, $\mu(x) < \infty$, $f : X \to \mathbb{R}$ mérhető. Az $F(t) = \mu(\{f < t\})$ valós függvényt az f függvény eloszlásfüggvényének nevezzük. F nyilván monoton növekedő függvény, jelölje $\alpha = \alpha_F$ az F-ből származó Lebesgue-Stieltjes-mértéket és $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \alpha)$ a megfelelő mértékteret.

24.4. lemma. *A fenti jelölésekkel $f : X \to \mathbb{R}$ mértéktartó leképezés.*

Bizonyítás.
Legyen $[a,b)$ az F függvény folytonossági intervalluma (azaz a-ban és b-ben is folytonos a függvény). Ekkor $\alpha([a,b)) = F(b) - F(a) = \mu(\{f < b\}) - \mu(\{f < a\}) = \mu(\{a \leqslant f < b\}) = \mu(f^{-1}([a,b)))$, és ebből minden $H \subset \mathbb{R}$ nyílt halmazra is $\alpha(H) = \mu(f^{-1}(H))$. De ekkor ez minden G_δ halmazra is áll, és ebből a regularitási tulajdonság alapján $\mathcal{M}_F$ minden elemére is.

24.5. tétel. *Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu), f, F(t), \alpha$ mint fent. Ekkor minden $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{M}_F$-mérhető függvényre (speciálisan minden Borel-mérhető függvényre)*

$$\int_X h \circ f \, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} h \, d\alpha,$$

ha valamelyik integrál létezik, és ekkor a jobb oldal $\lim\limits_{a \to -\infty, b \to \infty} \int_a^b h \, dF$ alakban is írható. Speciálisan $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} x \, d\alpha$, ha valamelyik integrál létezik.

Bizonyítás. 24.2 és 24.4

25. A konvolúció és alkalmazásai

Ebben a fejezetben az $\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda$ Lebesgue-mértéktérnek megfelelő L_p osztályok néhány további tulajdonságát vizsgáljuk.

25.1. definíció. Az f és g függvény konvolúcióján az

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) \, \mathrm{d}\lambda(y)$$

függvényt értjük (amennyiben az integrál értelmes).

25.2. tétel. *Ha $f, g \in L_1$, akkor $f * g \in L_1$. Az L_1 osztály a $*$ művelettel mint szorzással ún. kommutatív Banach-algebra, azaz $(f*g)*h = f*(g*h)$, $f*g = g*f$, $(f+tg)*h = f*h + t(g*h)$ és $\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.*

Bizonyítás.
Az $f(x-y)g(y)$ függvény mérhető az $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ szorzattéren, és a Fubini-tételt kétszer alkalmazva

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)| \, \mathrm{d}\lambda(y) \right) \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)| \, \mathrm{d}\lambda_{2n} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(|g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \, \mathrm{d}\lambda(x) \right) \mathrm{d}\lambda(y) = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < \infty,$$

hiszen

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \, \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, \mathrm{d}\lambda(x) = \|f\|_1,$$

mert a Lebesgue-mérték eltolás-invariáns.
Innen

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) \cdot g(y)| \, \mathrm{d}\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)| \, \mathrm{d}\lambda(y) < \infty$$

m.m. x-re, és így $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) \, \mathrm{d}\lambda(y)$ létezik és véges.
Tehát $f * g$ m.m. x-re létezik és $f * g \in L_1$.

Továbbá

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) \, \mathrm{d}\lambda(y) \right| \mathrm{d}\lambda(x) \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)| \, \mathrm{d}\lambda(y) \right) \mathrm{d}\lambda(x) = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

a szokásos egyenlőtlenség alapján.

Innen adódik $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

25.3. tétel. *Legyen $1 \leqslant p < \infty$. Az eltolás folytonos az L_p téren, azaz az $f_y(x) = f(x-y)$ jelöléssel minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan δ, hogy $|y| < \delta$ esetén $\|f_y - f\|_p < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Az állítás triviális a kompakt tartójú folytonos függvényekre, és ezek sűrűn vannak L_p-ben (20.15).

Legyen ugyanis f kompakt tartójú folytonos, K a tartója. Ekkor f egyenletesen folytonos K-n (hiszen K kompakt), és mivel K korlátos, ezért $\lambda(K)$ véges. Az egyenletes folytonosság miatt minden η-hoz van olyan δ, hogy $|f_y(x) - f(x)| < \eta \ \forall x \in K$, ha $|y| < \delta$. Innen

$$\|f_y - f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_y - f|^p \, \mathrm{d}\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_K |f_y - f|^p \, \mathrm{d}\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_K \eta^p \, \mathrm{d}\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = \lambda(K)^{\frac{1}{p}} \cdot \eta < \varepsilon,$$

ha $\eta < \dfrac{\varepsilon}{\lambda(K)^{\frac{1}{p}}}$.

25.4. *megjegyzés.* 25.3-ban az $(y \to 0) \Rightarrow (f_y \to f)$ pontonkénti konvergencia nem igaz: azokban a pontokban, ahol f nem folytonos, ez láthatóan nem teljesül (sőt ez a pontonkénti konvergencia pontosan a folytonossági pontokban teljesül).

25.5. definíció. A $t > 0$ paraméterű $g^t \in L_1$ függvényrendszert approximatív egységnek nevezzük, ha

1. $g^t \geqslant 0$,
2. minden t-re $\|g^t\|_1 = 1$,
3. minden rögzített r-re $\lim\limits_{t \to 0} \int_{B(0,r)} g^t(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) = 1$.

Itt 3. ekvivalens azzal, hogy $\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} g^t \, \mathrm{d}\lambda(x) \to 0$, ha $t \to 0$ (felhasználva, hogy $1 = \|g^t\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} g^t \, \mathrm{d}\lambda(x) + \int_{B(0,r)} g^t \, \mathrm{d}\lambda(x)$).

25.6. *megjegyzés.* A 3. feltétel a legkényelmesebben úgy teljesíthető, ha $|x| > t$ esetén $g^t(x) = 0$

25.7. *megjegyzés.* Egységről nincs értelme beszélni, hiszen könnyen láthatóan nincs olyan e függvény, hogy $f * e(x) = f(x)$ teljesüljön minden x-re. Ugyanakkor értelmezhetjük egy f függvény és egy μ mérték konvolúcióját az

$$f * \mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \, \mathrm{d}\mu(y)$$

képlettel. Ez általánosítása két függvény konvolúciójának, hiszen adott g függvényből legyárthatunk egy μ mértéket a $\mu(E) = \int_E g \, \mathrm{d}\lambda$ képlettel. Ekkor már van egység. Legyen ugyanis μ a Dirac-mérték, azaz

$$\mu(H) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \in H \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Ekkor $f * \mu(x) = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}^n$-re.

25.8. tétel. *Ha g^t approximatív egység, akkor bármely $f \in L_1$ esetén*

$$\lim_{t \to 0} \|g^t * f - f\|_1 = 0.$$

Bizonyítás. Adott $f \in L_1$ és $\varepsilon > 0$ esetén legyen $\delta > 0$ olyan, hogy $|y| < \delta$-ból $\|f_y - f\|_1 < \varepsilon$ következzék (ilyen δ 25.3 miatt van). Legyen η olyan kicsi, hogy $t < \eta$ esetén $\int_A g^t \,\mathrm{d}\lambda < \varepsilon$ teljesüljön, ahol $A = \mathbb{R}^n \backslash B(0,\delta)$ (ilyen η az approximatív egység 25.5-ben szereplő 3.-mal ekvivalens tulajdonsága miatt van). Ekkor a Fubini-tétel segítségével, és felhasználva, hogy $\|g^t\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} g^t \,\mathrm{d}\lambda = 1$, valamint $|g^t| = g^t$ (hiszen $g^t > 0$)

$$\|g^t * f - f\|_1 = \|f * g^t - f\| = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g^t(y) - f(x) \,\mathrm{d}\lambda(y) \right| \mathrm{d}\lambda(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g^t(y) \,\mathrm{d}\lambda(y) - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \,\mathrm{d}\lambda(y) \right| \mathrm{d}\lambda(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g^t(y) \,\mathrm{d}\lambda(y) - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g^t(y) \,\mathrm{d}\lambda(y) \right| \mathrm{d}\lambda(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x))g^t(y) \,\mathrm{d}\lambda(y) \right| \mathrm{d}\lambda(x) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| \cdot |g^t(y)| \,\mathrm{d}\lambda(y) \right) \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| \cdot g^t(y) \,\mathrm{d}\lambda(x) \right) \mathrm{d}\lambda(y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| \,\mathrm{d}\lambda(x) \right) g^t(y) \,\mathrm{d}\lambda(y) =$$

$$= \int_{B(0,\delta)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| \,\mathrm{d}\lambda(x) \right) g^t(y) \,\mathrm{d}\lambda(y) + \int_A \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| \,\mathrm{d}\lambda(x) \right) g^t(y) \,\mathrm{d}\lambda(y) =$$

$$= \int_{B(0,\delta)} \|f_y - f\|_1 \cdot g^t(y) \,\mathrm{d}\lambda(y) + \int_A \|f_y - f\|_1 \cdot g^t(y) \,\mathrm{d}\lambda(y) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{B(0,\delta)} \varepsilon \cdot g^t(y) \,\mathrm{d}\lambda(y) + \int_A (\|f_y\|_1 + \|f\|_1) \cdot g^t(y) \,\mathrm{d}\lambda(y) =$$

$$= \varepsilon \int_{B(0,\delta)} g^t(y) \,\mathrm{d}\lambda(y) + 2\|f\|_1 \int_A g^t(y) \,\mathrm{d}\lambda(y) \leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} g^t(y) \,\mathrm{d}\lambda(y) + 2\|f\|_1 \cdot \varepsilon = \varepsilon(1 + 2\|f\|_1),$$

és ez tetszőlegesen kicsivé tehető.

25.9. *megjegyzés.* Legyen

$$g^t = \frac{\chi_{B(0,t)}}{\lambda(B(0,t))}.$$

Világos, hogy ez approximatív egység, és most

$$f * g^t(x) = \frac{1}{\lambda(B(0,t))} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\chi_{B(0,t)}(x-y) \,\mathrm{d}\lambda(y) =$$

$$= \frac{1}{\lambda(B(0,t))} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\chi_{B(x,t)}(y) \,\mathrm{d}\lambda(y) =$$

$$= \frac{1}{\lambda(B(x,t))} \int_{B(x,t)} f(y) \,\mathrm{d}\lambda(y),$$

és ez 14.6 miatt m.m. x-re $f(x)$-hez tart, továbbá 25.8 miatt L_1-normában is teljesül a $g^t * f \to f$ konvergencia.

25.10. tétel. *Legyenek p, q konjugált kitevők, $f \in L_p$, $g \in L_q$. Ekkor*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) \,\mathrm{d}\lambda(y)$$

minden x pontban definiált, $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q$, $f * g$ egyenletesen folytonos és $\lim\limits_{|x|\to\infty} f * g(x) = 0$ (ha $p, q \neq \infty$).

Bizonyítás. Mivel $|f * g| \leqslant |f * g| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \big|f(x-y)g(y)\big| \,\mathrm{d}\lambda(y) \leqslant \|f_y\|_p \cdot \|g\|_q = \|f\|_p \cdot \|g\|_q < \infty$ (az utolsó előtti egyenlőtlenség a Hölder-egyenlőtlenség miatt igaz), ezért $f * g$ valóban mindenütt létezik, és a lényeges szuprémum definíciója szerint fennáll a $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ becslés. Legyen mondjuk $p < \infty$ (az állítás p-re és q-ra szimmetrikus, így ha $q < \infty$, akkor megcserélhetjük őket). Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség, a Hölder-egyenlőtlenség és 25.3 miatt

$$|f * g(x) - f * g(y)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-z)g(z) \,\mathrm{d}\lambda(z) - \int_{\mathbb{R}^n} f(y-z)g(z) \,\mathrm{d}\lambda(z) \right| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-z) - f(y-z))g(z) \,\mathrm{d}\lambda(z) \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-z) - f(y-z)| \cdot |g(z)| \,\mathrm{d}\lambda(z) \leqslant$$

$$\leqslant \|f_{-x}(-z) - f_{-y}(-z)\|_p \cdot \|g\|_q = \|f_{-x} - f_{-y}\|_p \cdot \|g\|_q = \|f_{y-x} - f\|_p \cdot \|g\|_q < \varepsilon \|g\|_q,$$

ha $|y-x|$ elég kicsi (ez utóbbi 25.3 miatt igaz). Végül adott $\varepsilon > 0$ esetén válasszuk meg a $B = B(0,r)$ gömböt úgy, hogy az $A = \mathbb{R}^n \backslash B$ halmazon

$$\int_A |f|^p \,\mathrm{d}\lambda < \varepsilon^p, \quad \int_A |g|^q \,\mathrm{d}\lambda < \varepsilon^q$$

fennálljon (ilyen gömb van, mert $\|f\|_p$, $\|g\|_q < \infty$), majd legyen $|x| > 2r$. Ekkor $y \in B$ esetén $x - y \in A$, ezért a Hölder-egyenlőtlenség alapján

$$|f * g(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)| \,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_B |f(x-y)g(y)| \,\mathrm{d}\lambda(y) + \int_A |f(x-y)g(y)| \,\mathrm{d}\lambda(y) \leqslant$$

$$\leqslant \|f_{-x}(-y)|_B\|_p \cdot \|g|_B\|_q + \|f_{-x}(-y)|_A\|_p \cdot \|g|_A\|_q \leqslant \|f|_A\|_p \cdot \|g|_B\|_q + \|f\|_p \cdot \|g|_A\|_q \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \cdot \|g\|_q + \|f\|_p \cdot \varepsilon = \varepsilon(\|f\|_p + \|g\|_q).$$

Itt felhasználtuk, hogy x és y fenti választása esetén $x - y$ A-ban van, azaz $f_{-x}(-y)|_B = f|_A$.

25.11. tétel (Weierstrass). *Ha f folytonos az $[a,b]$ szakaszon és $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott, akkor van olyan p polinom, amellyel $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy az adott intervallum $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$, és ha ezen f egy folytonos függvény, akkor jelölje f azt a folytonos kiterjesztést is, amelyre $|x| \geqslant \frac{1}{2}$ esetén $f(x) = 0$, a $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ szakaszokon pedig f lineáris. c_n értékét a $c_n \cdot \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x = 1$ feltétellel határozzuk meg, ekkor $g^t(x) = c_n (1-x^2)^n \chi_{[-1,1]}(x)$ $(t = \frac{1}{n})$ approximatív egység. Legyen

$$P_n(x) = g^{\frac{1}{n}} * f = \int_{\mathbb{R}} f(y) g^{\frac{1}{n}}(x-y) \,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(y) g^{\frac{1}{n}}(x-y) \,\mathrm{d}\lambda(y).$$

Ha még $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ is teljesül, akkor $|x-y| \leqslant 1$, és emiatt

$$g^{\frac{1}{n}}(x-y) = c_n (1-(x-y)^2)^n,$$

ezért ilyen x értékekre $P_n(x)$ egy (legfeljebb $2n$-ed fokú) polinom, hiszen ekkor

$$f(y) g^{\frac{1}{n}}(x-y) = f_{2n}(y) \cdot x^{2n} + \ldots + f_0(y) \cdot x^0$$

valamilyen $f_{2n}, \ldots f_0$ y-tól függő függvényekkel, és mivel y szerint integrálunk, ezért x hatványai (y szerinti) konstansként kiemelhetők az integrálból; ami marad az integrálás után, az is egy legfeljebb $2n$-edfokú polinomja lesz x-nek valamilyen y-tól függő együtthatókkal.

Legyen $\varepsilon > 0$ adott, és válasszuk ehhez δ-t f egyenletes folytonossága alapján (f a kompakt $[a,b]$ halmazon folytonos, tehát egyenletesen folytonos), vagyis legyen $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, ha $|x-y| < \delta$. Majd válasszuk n-et olyan nagyra, hogy $\int_{|x| \geqslant \delta} g^{\frac{1}{n}} \, \mathrm{d}x < \varepsilon$ legyen (ilyen n azért van, mert g^t approximatív egység). Ekkor

$$|P_n(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(y) g^{\frac{1}{n}}(x-y) \, \mathrm{d}\lambda(y) - f(x) \int_{\mathbb{R}} g^{\frac{1}{n}}(x-y) \, \mathrm{d}\lambda(y) \right| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}} (f(y) - f(x)) g^{\frac{1}{n}}(x-y) \, \mathrm{d}\lambda(y) \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(y) - f(x)| g^{\frac{1}{n}}(x-y) \, \mathrm{d}\lambda(y) =$$

$$= \int_{|x-y|<\delta} |f(y) - f(x)| g^{\frac{1}{n}}(x-y) \, \mathrm{d}\lambda(y) + \int_{|x-y| \geqslant \delta} |f(y) - f(x)| g^{\frac{1}{n}}(x-y) \, \mathrm{d}\lambda(y) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{|x-y|<\delta} \varepsilon \cdot g^{\frac{1}{n}}(x-y) \, \mathrm{d}\lambda(y) + \int_{|x-y| \geqslant \delta} (|f(y)| + |f(x)|) g^{\frac{1}{n}}(x-y) \, \mathrm{d}\lambda(y) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int_{|x-y|<\delta} g^{\frac{1}{n}}(x-y) \, \mathrm{d}\lambda(y) + 2M \int_{|x-y| \geqslant \delta} g^{\frac{1}{n}}(x-y) \, \mathrm{d}\lambda(y) \leqslant \varepsilon \cdot 1 + 2M \cdot \varepsilon,$$

ahol M az f függvény korlátja (ilyen ismét a folytonosság miatt létezik). Itt megint kihasználtuk, hogy mivel $g^{\frac{1}{n}}$ approximatív egység, ezért $1 = \|g^{\frac{1}{n}}\|_1 = \|g^{\frac{1}{n}}_{-x}(-y)\|_1 = \int_{\mathbb{R}} g^{\frac{1}{n}}(x-y) \, \mathrm{d}\lambda(y)$, illetve alkalmaztuk a háromszög-egyenlőtlenséget is.

25.12. *megjegyzés.* Vegyük észre, hogy a bizonyításban nem definiáltuk minden t-re a g^t approximatív egységet. De ez nem is baj, hiszen a 25.5-beli definícióban valójában elég egy részsorozatát nézni a g^t függvénycsaládnak. De azt is mondhatjuk, hogy a fent definiált g^t értelmes minden $t = \frac{1}{n}$-re is, ahol n nem feltétlenül egész; és utána csak az egész n-ekből álló részsorozatát vizsgáljuk.

Most nézzük egy alkalmazását a fentieknek.

25.13. tétel (Steinhaus). *Ha $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető, $\lambda(H) > 0$, akkor a $H - H$ Minkowski-különbség tartalmaz origó középpontú gömböt.*

Bizonyítás. A tételt be lehet bizonyítani a sűrűségi tétel segítségével is, most azonban a konvolúcióról tanultakat szeretnénk alkalmazni.

Feltehető, hogy $0 < \lambda(H) < \infty$; különben vehetjük egy véges, de pozitív mértékű részét (ilyen biztosan van, pl. van olyan egész csúcsú kocka, amely H-val vett metszetének mértéke véges és pozitív). Legyen $f = \chi_H$ és $g = \chi_{-H}$ (ekkor $g(-x) = f(x)$). Mivel $\lambda(H) < \infty$, ezért $f, g \in L_p$ $\forall p \in [1, \infty]$, (speciálisan $p = 2$-re is igaz). Ekkor 25.10-et $p = q = 2$-re alkalmazva kapjuk, hogy $f * g = g * f$ folytonos. Továbbá

$$g * f(x) = \int_{\mathbb{R}^p} g(x-y) f(y) \, \mathrm{d}\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f(y-x) f(y) \, \mathrm{d}\lambda(y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^p} \chi_{H+x}(y) \cdot \chi_H(y) \, \mathrm{d}\lambda(y) = \lambda(H \cap (H+x)),$$

és $g * f(0) = \lambda(H) > 0$, így $g * f$ folytonossága miatt van egy olyan környezete az origónak, amelyen $\lambda(H \cap (H+x)) > 0$. Ebben a környezetben tehát $H \cap (H+x) \neq \varnothing$, és így a környezet minden x pontjára $x \in H - H$ teljesül.

26. Fourier-sorok, Fourier-transzformáció

26.1. definíció (Trigonometrikus polinom)**.** Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt trigonometrikus polinomnak nevezünk, ha előáll, mint $\sin(nx)$ és $\cos(nx)$ alakú, valamint konstans függvények véges lineáris kombinációja.

26.2. tétel (Weierstrass approximációs tétel trigonometrikus polinomokra)**.** *Ha f folytonos a $[-\pi, \pi]$ szakaszon, akkor van olyan p trigonometrikus polinom, amellyel $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$ (v.ö.25.11)*

Bizonyítás. A bizonyítás lényegében ugyan az, mint 25.11-ben; csak néhány módosítást kell végrehajtani.

Legyen c_n a $c_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos x)^n \ \mathrm{d}x = 1$ képlettel definiálva, ekkor $g^t(x) = c_n(1+\cos x)^n \chi_{[-\pi,\pi]}$ ($t = \frac{1}{n}$) approximatív egység. Legyen

$$P_n(x) = g^{\frac{1}{n}} * f = \int_{\mathbb{R}} f(y) g^{\frac{1}{n}}(x-y) \ \mathrm{d}\lambda(y) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g^{\frac{1}{n}}(x-y) \ \mathrm{d}\lambda(y).$$

Ha még $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ is teljesül, akkor $|x - y| \leqslant 1$, és emiatt

$$g^{\frac{1}{n}}(x-y) = c_n(1 + \cos(x-y))^n,$$

ezért ilyen x értékekre $P_n(x)$ egy trigonometrikus polinom, hiszen ekkor $f(y)g^{\frac{1}{n}}(x-y)$-t trigonometrikus azonosságok segítségével (pl $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$) átírhatjuk x egy trigonometrikus polinomjává, amelynek együtthatói valamilyen y-tól függő függvények, és mivel y szerint integrálunk, ezért x trigonometrikus függvényei (y szerinti) konstansként kiemelhetők az integrálból; ami marad az integrálás után, az is egy trigonometrikus polinomja lesz x-nek valamilyen y-tól függő együtthatókkal.

Legyen $\varepsilon > 0$ adott, és válasszuk ehhez δ-t f egyenletes folytonossága alapján (f egy kompakt halmazon folytonos, tehát egyenletesen folytonos). Majd válasszuk n-et olyan nagyra, hogy $\int_{|x| \geqslant \delta} g^{\frac{1}{n}} \ \mathrm{d}x < \varepsilon$ legyen (ilyen n azért van, mert g^t approximatív egység). Ekkor

$$|P_n(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(y) g^{\frac{1}{n}}(x-y) \ \mathrm{d}\lambda(y) - f(x) \int_{\mathbb{R}} g^{\frac{1}{n}}(x-y) \ \mathrm{d}\lambda(y) \right| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}} (f(y) - f(x)) g^{\frac{1}{n}}(x-y) \ \mathrm{d}\lambda(y) \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(y) - f(x)| g^{\frac{1}{n}}(x-y) \ \mathrm{d}\lambda(y) =$$

$$= \int_{|x-y| \leqslant \delta} |f(y) - f(x)| g^{\frac{1}{n}}(x-y) \ \mathrm{d}\lambda(y) + \int_{|x-y| \geqslant \delta} |f(y) - f(x)| g^{\frac{1}{n}}(x-y) \ \mathrm{d}\lambda(y) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{|x-y| \leqslant \delta} \varepsilon \cdot g^{\frac{1}{n}}(x-y) \ \mathrm{d}\lambda(y) + \int_{|x-y| \geqslant \delta} (|f(y)| + |f(x)|) g^{\frac{1}{n}}(x-y) \ \mathrm{d}\lambda(y) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int_{|x-y| \leqslant \delta} g^{\frac{1}{n}}(x-y) \ \mathrm{d}\lambda(y) + 2M \int_{|x-y| \geqslant \delta} g^{\frac{1}{n}}(x-y) \ \mathrm{d}\lambda(y) \leqslant \varepsilon \cdot 1 + 2M \cdot \varepsilon,$$

ahol M az f függvény korlátja (ilyen ismét a folytonosság miatt létezik). Itt ismét kihasználtuk, hogy mivel $g^{\frac{1}{n}}$ approximatív egység, ezért $1 = \|g^{\frac{1}{n}}\| = \|g^{\frac{1}{n}}_{-x}(-y)\| = \int_{\mathbb{R}} g^{\frac{1}{n}}(x-y) \ \mathrm{d}\lambda(y)$, illetve alkalmaztuk a háromszög-egyenlőtlenséget is.

Szeretnénk értelmezni komplex értékű trigonometrikus polinomokat is, ehhez tekintsük a komplex számsík T egységkörét. Ha F tetszőleges függvény T-n, akkor

$$f(t) = F(e^{it})$$

egy valós periodikus függvény, 2π periódussal. Fordítva, ha f egy $\mathbb{R}$-en értelmezett, 2π szerint periodikus függvény, akkor legyárthatunk belőle egy F függvényt, amire a fenti egyenlőség teljesül. Ennek segítségével megfeleltethetjük egymásnak a 2π szerint periodikus valós változós komplex értékű függvényeket, és a T-n értelmezett függvényeket. A továbbiakban a két jelölést nem különböztetjük meg egymástól.

Az eddigiek segítségével definiálhatjuk az $L_p(T)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ függvényteret, mint a 2π szerint periodikus, valós változós, komplex értékű Lebesgue-integrálható függvények terét, ahol a függvények p-normája

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

véges.

Másszóval az $L_p(\lambda)$ vektorteret vizsgáljuk, ahol λ a Lebesgue-mérték $[0, 2\pi]$-n, lenormálva 2π-vel (a lenormálásra csak a formalizmus könnyítésére van szükség; például a konstans 1 függvény normája így 1 lesz). Hasonlóan $L_\infty(T)$ az $L_\infty(\mathbb{R})$-beli 2π szerint periodikus függvények tere a lényeges szuprémum-normával; illetve $C(T)$ a T-n értelmezett folytonos komplex értékű függvények tere az

$$\|f\|_\infty = \sup_t |f(t)|$$

normával.

26.3. definíció (Komplex trigonometrikus polinom)**.** Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \quad (t \in \mathbb{R})$$

függvényt (komplex) trigonometrikus polinomnak nevezzük, ha $a_0, a_1, \ldots a_N, b_1, \ldots b_N \in \mathbb{C}$.

Az Euler-azonosság segítségével a fenti f függvényt

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$$

alakban is írhatjuk. Nyilvánvaló, hogy minden trigonometrikus polinom 2π szerint periodikus.

Legyen

$$u_n(t) = e^{int} \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Ha $L_2(T)$-ben a skaláris szorzatot az

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} \ \mathrm{d}t$$

képlettel definiáljuk, akkor

$$\langle u_n, u_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} \ \mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = m, \\ 0 & \text{ha } n \neq m, \end{cases}$$

hiszen $k \neq 0$ esetén

$$\int e^{ikt}\ \mathrm{d}t = \int (\cos(kt) + i \cdot \sin(kt))\ \mathrm{d}t = \frac{\sin(kt)}{k} - i \cdot \frac{\cos(kt)}{k}$$

és $k = 0$ esetén

$$\int e^{ikt}\ \mathrm{d}t = \int 1\ \mathrm{d}t = t.$$

Azaz $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$ ortonormált/trigonometrikus függvényrendszer.

26.4. *megjegyzés.* $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$ nem bázis az $L_2(T)$ vektortérben, hiszen a generátumuk definíció szerint pontosan a trigonometrikus polinomokból áll; és világos, hogy nem minden $L_2(T)$-beli függvény trigonometrikus polinom. Ha végtelen lineáris kombinációt is megengedünk, akkor azonban már igaz lesz, hogy minden L_2-beli függvény előáll, mint u_n-ek (végtelen) lineris kombinációja.

26.5. definíció. Egy $f \in L_1(T)$ függvény Fourier-együtthatói

$$\hat{f}(n) = \langle f, e^{int} \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \overline{e^{int}}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{-int}\ \mathrm{d}t \qquad (n \in \mathbb{Z}),$$

Fourier-sora pedig

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \cdot e^{int}.$$

A Fourier-sor részletösszegei

$$S_N = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) \cdot e^{int}.$$

Az f függvény valós alakja

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)),$$

ahol

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \mathrm{d}t,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\cos(nt)\ \mathrm{d}t,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\sin(nt)\ \mathrm{d}t.$$

26.6. Állítás. $L_2(T) \subset L_1(T)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f \in L_2(T)$, azaz $\|f\|_2 < \infty$. Ekkor

$$\int_T |f|\ \mathrm{d}t = \int_{|f|>1} |f|\ \mathrm{d}t + \int_{|f|\leqslant 1} |f|\ \mathrm{d}t \leqslant \int_{|f|>1} |f|^2\ \mathrm{d}t + \int_{|f|\leqslant 1} 1\ \mathrm{d}t \leqslant \|f\|_2^2 + \lambda_2(T) < \infty.$$

26.7. *megjegyzés.* 26.6 igaz lesz minden véges mértéktéren, tetszőleges $p > q$ esetén.

Ebből következően egy $f \in L_2(T)$ függvény Fourier-sorát definiálhatjuk úgy, mint $L_1(T)$-beli függvény Fourier-sorát.

Most az L_2 Hilbert-tereket nézzük meg kicsit közelebbről (22.2).

26.8. Állítás. *Legyen X egy n elemű alaphalmaz, és μ a számlálómérték X-en. Ekkor $L_2(\mu)$ izomorf az $X \to \mathbb{R}$ függvények L_2-normával ellátott terével, vagyis az euklideszi normával ellátott $\mathbb{R}^n$ térrel. Sőt, minden véges dimenziós Hilbert-tér izomorf $\mathbb{R}^n$-nel valamilyen n-re.*

26.9. lemma. *Legyen a H (valós vagy komplex) Hilbert-térben $\omega_1, \omega_2, \dots$ ortonormált rendszer, $f \in H$ tetszőleges. Legyen továbbá $c_j = \langle f, \omega_j \rangle$, $p_N = \sum_{j=1}^{N} c_j\omega_j$, $q_N = \sum_{j=1}^{N} d_j\omega_j$, ahol d_j tetszőleges. Ekkor $\|f - p_N\| \leqslant \|f - q_N\|$, vagyis f-et az ω_j-kre vett vetületeiből ($c_j\omega_j$-kből) álló sorozat közelíti a legjobban az ω_j-k által feszített altérben.*

Bizonyítás. $\langle f - p_N, \omega_k\rangle = \langle f, \omega_k\rangle - \langle p_N, \omega_k\rangle = c_k - c_k = 0$, mert ω_k-k ortonormált rendszert alkotnak. Így $f - p_N \perp \omega_k$, ezért $f - p_N$ merőleges ω_k-k tetszőleges lineáris kombinációjára, tehát $f - p_N \perp \sum_{j=1}^{N}(d_j - c_j)\omega_j = q_N - p_N$.

A 26.8 állítás szerint az $f - p_N$ és $q_N - p_N$ által kifeszített 2-dimenziós Hilbert-tér izomorf $\mathbb{R}^2$-tel, így alkalmazhatjuk a Pitagorasz-tételt az egymásra merőleges $f - p_N$ és $q_N - p_N$ vektorokra: $\|f - q_N\|^2 = \|(f - p_N) + (p_N - q_N)\|^2 = \|f - p_N\|^2 + \|p_N - q_N\|^2 \geqslant \|f - p_N\|^2$, ahonnan $\|f - p_N\| \leqslant \|f - q_N\|$. Sőt az is kijött, hogy $\|f - p_N\| = \|f - q_N\| \iff p_N = q_N$.

26.10. *megjegyzés.* Itt Hilbert-tér helyett valójában elég lett volna H-ról föltennünk, hogy skalárszorzattal rendelkező normált tér.

26.11. tétel. *Ha $f \in L_2(T)$, akkor $s_N = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) \cdot e^{int} \xrightarrow{L_2} f$*

Bizonyítás. Ha $f \in L_2(T)$, akkor $\exists g \in C(T)$ folytonos függvény, hogy $\|g - f\|_2 < \varepsilon$ (lásd 20.15). Ekkor 26.2 miatt létezik h trigonometrikus polinom, hogy $|g - h| < \varepsilon$ teljesül T-n. Ezért

$$\|g - h\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g - h|^2 < \frac{1}{2\pi} \cdot \varepsilon^2 \cdot 2\pi = \varepsilon^2,$$

azaz $\|g - h\|_2 < \varepsilon$. Innen $\|f - h\|_2 \leqslant \|f - g\|_2 + \|g - h\|_2 < 2\varepsilon$. Mivel h trigonometrikus polinom, ezért $h(t) = \sum_{n=-M}^{M} d_n \cdot e^{int}$ alakú. Ezért 26.9 miatt $\forall N \geqslant M$-re $\|f - s_N\|_2 \leqslant \|f - h\|_2 < 2\varepsilon$ teljesül.

26.12. *kérdés.* 1. Igaz-e, hogy $\forall f \in L_2(T)$-re $s_N \to f$ pontonként T-n?
2. Igaz-e, hogy $\forall f \in C(T)$-re $s_N \to f$ pontonként T-n?
3. Igaz-e, hogy $\forall f \in L_2(T)$-re $s_N \to f$ m.m. T-n?

1. Nem, mert ha véletlenül igaz lenne egy $f \in L_2(T)$ függvényre, akkor egy nullmértékű halmazon f-et megváltoztatva már nem lesz igaz.
2. Nem igaz (biz. nélkül).
3. Igaz (Carleson-tétel, 1966).

26.13. tétel (Parseval)**.** *Ha $f, g \in L_2(T)$, akkor*

$$\langle f, g\rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle,$$

ahol $\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \cdot \overline{\hat{g}(n)}$, azaz $\hat{f}$ és $\hat{g}$ ℓ_2-beli skaláris szorzata (v.ö. 20.8)

Bizonyítás. Legyen $s_N = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) \cdot e^{int}$ és $t_N = \sum_{n=-N}^{N} \hat{g}(n) \cdot e^{int}$. Ekkor

$$\langle s_N, t_N\rangle = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) \cdot \overline{\hat{g}(n)} \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \cdot \overline{\hat{g}(n)} = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$$

Ugyanakkor 26.11 szerint $s_N \longrightarrow f$, $t_N \longrightarrow g$, és így $\langle s_N, t_N\rangle \longrightarrow \langle f, g\rangle$. Ezért $\langle f, g\rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$.

26.14. következmény. *Ha $f \in L_2(T)$, akkor*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \quad (= \|\hat{f}\|_2^2)$$

.

Bizonyítás. Ez 26.13 speciális esete.

Tehát azt kaptuk, hogy az $\hat{}: L_2(T) \to \ell_2$ operátor skalárszorzat-, és normatartó. Mivel normatartó, ezért injektív is. Felvetődik a kérdés, hogy szürjektív-e ez a leképezés. A válasz igenlő:

26.15. Állítás. *Az* $\hat{}: L_2(T) \to \ell_2$ *operátor szürjektív.*

Bizonyítás. Legyen adott a $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2$ sorozat, és legyen $s_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n \cdot e^{int}$. Azt kell belátnunk, hogy s_N L_2-ben konvergens. Az s_N sorozat Cauchy, hiszen

$$\|s_N - s_M\|_2 = \left\| \sum_{n=N-M}^{N} c_n \cdot e^{int} + \sum_{n=-N}^{-N+M} c_n \cdot e^{int} \right\|_2 \leqslant \left\| \sum_{n=N-M}^{N} c_n \cdot e^{int} \right\|_2 + \left\| \sum_{n=-N}^{-N+M} c_n \cdot e^{int} \right\|_2 =$$

$$= \sum_{n=N-M}^{N} |c_n|^2 + \sum_{n=-N}^{-N+M} |c_n|^2$$

az előző következmény szerint ($\hat{s}_N(n) = c_n$), és

$$\sum_{n=N-M}^{N} |c_n|^2 + \sum_{n=-N}^{-N+M} |c_n|^2 \longrightarrow 0 + 0 = 0,$$

mert $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2$. A Riesz-Fischer tétel (21.4) szerint tehát s_N konvergens L_2-ben.

Ezzel beláttuk a következő tételt:

26.16. tétel. *Az* ℓ_2 *és* $L_2(T)$ *egymással izomorf Hilbert-terek.*

26.1. Fourier-transzformált általános esetben

Most általánosabban is definiálni fogjuk a Fourier-transzformáltat, nem csak periodikus függvények esetén.

26.17. definíció. Legyen az f függvény p-normája

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \mathrm{d}\lambda(x) \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leqslant p < \infty),$$

az f és g függvények konvolúciója

$$f * g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\, \mathrm{d}\lambda(y) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

az f Fourier-transzformáltja pedig

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-ixt}\, \mathrm{d}\lambda(x) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

26.18. tétel. *Legyen* $f \in L_1$*, és* α*,* λ *valós számok. Ekkor*

(1) Ha $g(x) = f(x) \cdot e^{i\alpha x}$*, akkor* $\hat{g}(t) = \hat{f}(t-\alpha)$*.*

(2) Ha $g(x) = f(x-\alpha)$*, akkor* $\hat{g}(t) = \hat{f}(t) \cdot e^{i\alpha t}$*.*

(3) Ha $g \in L_1$ *és* $h = f * g$*, akkor* $\hat{h}(t) = \hat{f}(t) \cdot \hat{g}(t)$*.*

(4) Ha $g(x) = \overline{f(-x)}$*, akkor* $\hat{g}(t) = \overline{\hat{f}(t)}$*.*

(5) Ha $g(x) = f(\frac{x}{\lambda})$ *és* $\lambda > 0$*, akkor* $\hat{g}(t) = \lambda \hat{f}(\lambda t)$*.*

(6) Ha $g(x) = -ixf(x)$ *és* $g \in L_1$*, akkor* $\hat{f}$ *differenciálható és* $\hat{f}'(t) = \hat{g}(t)$*.*

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk.

26.19. tétel (Inverz tétel)**.** *Ha $f, \hat{f} \in L_1$ és*

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \cdot e^{ixt} \, \mathrm{d}\lambda(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor g folytonos és $f(x) = g(x)$ m.m.

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk.