

# Topics in differential geometry

fedifg1u0um17em

Lecturer: Gyula Lakos

2022/23/1

## 1 First lecture

We will prove Crofton's formula<sup>1</sup>, but first we need some preparations. We want to define a measure on  $E$ , the space of lines in  $\mathbb{R}^2$ , which we want to be invariant to isometries of  $\mathbb{R}^2$ . Take  $e_0 \in E$  fixed, since isometries act transitively on lines  $E = Iso(\mathbb{R}^2)e_0$  which is in bijection with the coset  $Iso(\mathbb{R}^2)/stab(e_0)$ . Parametrise the lines as follows:  $e_{\theta,d} := \{(x,y) : x\cos\theta + y\sin\theta = d\}$ , yielding a surjective map  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow E$ , which is not injective.

$$p(\theta, d) = p(\theta + 2\pi, d) = p(\theta + \pi, -d) = p(\theta + k\pi, (-1)^k d)$$

so  $p$  factors through  $(\theta, d) \sim (\theta + k\pi, (-1)^k d)$ , this space still has a natural measure induced by the Lebesgue measure. Topologically lines on  $\mathbb{R}^2$  correspond to lines in  $RP^2 \setminus l$ , which correspond to  $RP^2 \setminus p$ , and this has the natural measure on it.

**Lemma 1.1.** *This measure is isometry invariant.*

*Proof.* It is sufficient to check a generating system of  $Iso(\mathbb{R}^2)$ .

- Rotations around the origin.  $R_\alpha(e_{\theta,d}) = e_{\theta+\alpha,d}$ , and the Lebesgue measure, which induces  $\mu$  is invariant under this translation.

---

<sup>1</sup>to be stated later

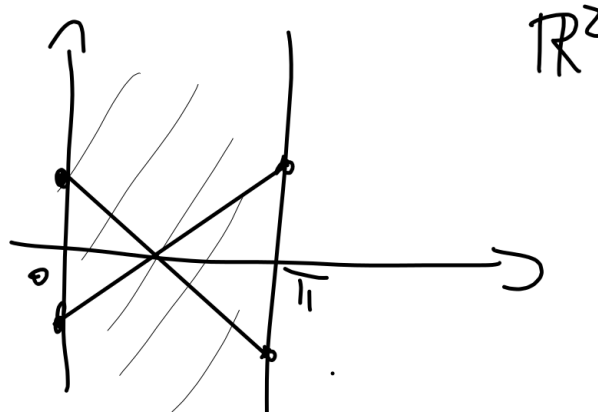


Figure 1: A fundamental domain of the factor space, isomorphic to the open Möbius strip

- Translations along the  $x$  axis.  $T_{(b,0)}(e_{\theta,d}) = e_{\theta,d-b\cos\theta}$ , which is a shear with changing amplitude, which is nonlinear, but measure preserving<sup>2</sup>
- Reflection around the  $x$  axis.  $\rho(e_{\theta,d}) = e_{-\theta,d}$ , which again, preserves the measure.

□

$$\mu = p_*(\lambda|_{[0,\pi)\times\mathbb{R}})$$

## 2 Second lecture

*Reminder 2.1.*  $E$  is the set of lines in  $\mathbb{R}^2$ . We have constructed a measure on  $E$  which was invariant for  $Iso(\mathbb{R}^2)$ . The elements of  $E$  were enumerated encoded as  $e_{\theta,d}$ <sup>1</sup>. The set  $E \sim \mathbb{R}^2/\{(\theta,d) \sim (\theta,-d)\}$ . The measure  $\mu$  on  $E$  is inherited from the Lebesgue measure on  $\mathbb{R}^2$ <sup>2</sup>.

Take  $|d\theta \wedge dr|$ , called the density, so its basically the same 2-form with orientation disregarded, this lives on manifolds, so it makes sense to actually take the factor construction to get  $\mu$  on  $E$ .

**Lemma 2.2.** *If  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  is a  $C^1$  curve then its tangents form a set of measure 0 in  $E$ .*

*Remark 2.3.* At  $t$ ,  $e$  is a tangent line if it goes through  $\gamma(t)$ , and  $\gamma'(t) \parallel e$ . In particular, if  $\gamma' = 0$  then any line going through the given point is a tangent line<sup>3</sup>.

*Proof.* We use Saard's lemma<sup>4</sup>. Here  $\gamma = (x,y)$  parametrized by  $t$  is the curve under consideration. Take  $F(\theta,t) = (\theta, x\cos\theta + y\sin\theta)$ . Now  $F' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x\cos\theta + y\sin\theta & x'\cos\theta + y'\sin\theta \end{pmatrix}$ . The Jacobi determinant is  $x'\cos\theta + y'\sin\theta$ , which is 0 iff  $(x',y')$  is perpendicular to  $(\cos\theta, \sin\theta)$ . Then  $F(\Sigma) \subset E$  is the set of tangents, and by Saard's lemma we are done. □

**Theorem 2.4** (Crofton). *For the arc length of  $\gamma$  the following formula is true:  $L_\gamma = \frac{1}{2} \int_E n_\gamma(e) d\mu(e)$ , where the integrand is the number of intersections of  $e$  and  $\gamma$  in parameter space.*

*Proof.* First we do it for linear segments.  $[0,a] \rightarrow [0,a] \times \{0\}$ . Consider a line, the number of intersections is infinite, if  $\theta = \frac{\pi}{2}, d = 0$ <sup>5</sup>. Otherwise  $n_\gamma(e_{\theta,d}) = 1$  if the line separates  $(0,0)$  and  $(a,0)$  weakly<sup>6</sup>. Either  $a\cos\theta \geq d \geq 0$  or  $a\cos\theta \leq d \leq 0$ , otherwise the intersection number is 0. Consequently

$$\int_E n_\gamma(e) = \int \int_{a\cos\theta \geq d \geq 0 \text{ or } a\cos\theta \leq d \leq 0} 1 dd d\theta = \int_0^\pi |a\cos\theta| d\theta = 2a.$$

Next step is piecewise linear curves, and this is clear. Now consider a general curve  $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  and take inscribed piecewise linear approximations associated to a dyadic refinement process. We get curves  $\gamma^i$  for each  $i \in \mathbb{N}$ .  $\gamma^i$  has  $2^i$  pieces, if you want to think of it that way.

$$\lim_i \frac{1}{2} \int_E n_{\gamma^i}(e) d\mu \rightarrow \frac{1}{2} \int_E n_\gamma(e) d\mu$$

<sup>2</sup>????

<sup>1</sup> $e_{\theta,d} := \{x : x\cos\theta + y\sin\theta = d\}$

<sup>2</sup>on  $\mathbb{R}^2$   $d\theta \wedge dr$  is a 2-form, from which we get a measure

<sup>3</sup>we are very generous with the definition of tangency

<sup>4</sup>If  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  is  $C^1$ , then its singular points  $(x \in U : \det F'(x) = 0)$  form a set of measure 0.

<sup>5</sup>we take  $\gamma$  to be this segment

<sup>6</sup>meaning  $0 \leq d$  and  $a\cos\theta \geq d$ , or the other way around



Figure 2: Linear and piecewise linear curves

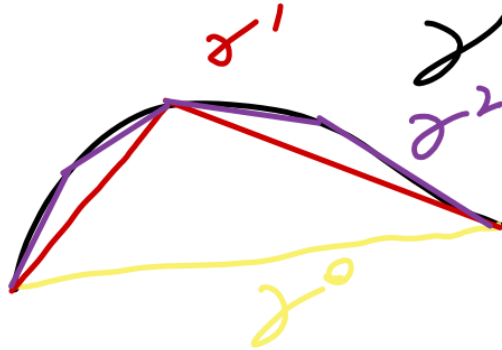


Figure 3: Image of the refinement process

is what we want to show. Try to apply the Beppo-Levi theorem, so we want to see, that  $n_{\gamma^i}$  is monotonically increasing, and converges to  $n_\gamma$ . This seems ok,  $\gamma^i$  get more and more 'zig-zagy' as  $i$  increases. Indeed  $n_{\gamma^i}(e)$

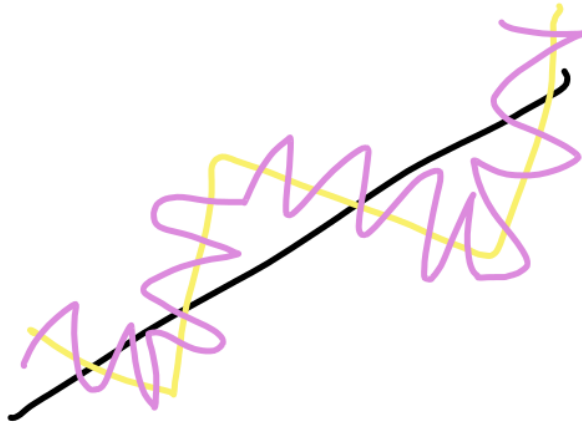


Figure 4: denser approximations create more intersection points

is monotnoe increasing, except where  $e$  is a continuation of a segment of  $\gamma^i$ , which is a set of measure 0, we can restrict to the complement of this set ( $E'$ ), this doesn't change the value of the integral. If  $e \in E$  is a line, the intersection points  $e \cap \gamma$  can be of 2 types, crossing, or non-crossing. The first meaning that for any neighbourhood of  $t$ ,  $\gamma(U)$  contains points from both sides of  $e$ . An intersection point is non-crossing if it is not crossing. As we approximate and get closer we find the crossing type intersection points with the  $\gamma^i$ , but

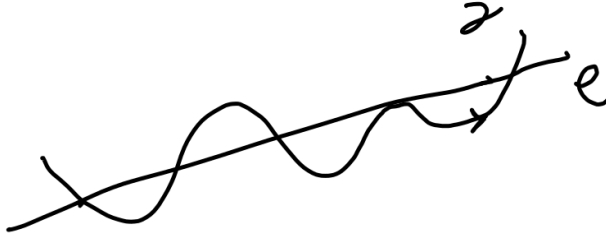


Figure 5: crossing, and non crossing intersection points

not the non-crossing types! But we can disregard the non-crossing intersection points, since they are points of tangency, which are of measure 0 as we saw above ( $E' \rightarrow E''$ ). Now we can apply the Beppo-Levi theorem and the integrals converge on  $E''$ , and so on  $E$  as well.  $\square$

*Remark 2.5.* The theorem is true even for  $C^0$  curves. The set of local supporting lines is also of measure zero for a continuous curve.

Assume  $\gamma$  bounds a convex subset of  $\mathbb{R}^2$  (with our present tools, assume piecewise  $C^1$ ).

$$\int n_\gamma(e) d\mu = \int_\theta \int_d n_\gamma d\mu = \int_E 2w_\theta(K)$$

Where  $w_\theta(K)$  is the width of the convex set  $K$  at the parameter  $\theta$ . If we sweep with a given normal

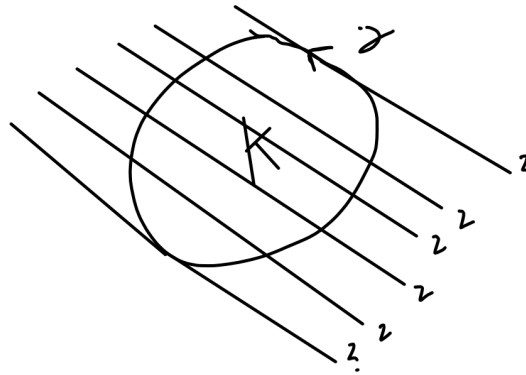


Figure 6: Lines with a fixed  $\theta$  almost all meet a convex set in either 0 or 2 points, the length of the interval with 2 intersections is precisely  $w_\theta(K)$

vector through the set we mostly see intersection numbers of 2, so one of the integrals is trivial and we get the second equality above.

**Corrolary 2.6** (Cauchy's theorem). *If  $K$  is a convex set bounded by a piecewise  $C^1$  curve with interior, then  $l(\partial K) = \int_0^\pi w_\theta(K) d\theta$ .*

### 3 Third lecture

We will discuss higher dimensional generalisations of Cauchy's theorem. We begin with some notation and terminology.

- $\mathcal{K}$  will denote the set of closed compact convex bodies in  $\mathbb{R}^n$ .
- $\mathcal{K}^+$  is just  $\mathcal{K}$  with nonempty interior.
- $\mathcal{P}$  will be the set of polytopes<sup>1</sup> in  $\mathbb{R}^n$ .
- $\mathcal{P}^+$ , the polytopes with nonempty interior

**Lemma 3.1.** *Suppose  $K, L \in \mathcal{K}$ ,  $\epsilon > 0$  and  $L \subset \text{int } K$ . Then there is a polytope  $P$  such that*

$$L \subset P \subset K \subset B(P, \epsilon).$$

*Moreover, if  $\eta > 1$  and  $o \in \text{int } K$  then  $K \subset \eta P$ <sup>2</sup> can be assumed.*

*Proof.* Well known, we covered it in the Bsc geometry course. □

**Definition 3.2.** There is a metric on  $\mathcal{K}$  given by

$$d(K, L) = \inf\{\epsilon : K \subset B(L, \epsilon), L \subset B(K, \epsilon)\}.$$

This is called the Hausdorff distance of  $K, L \in \mathcal{K}$ .

*Proof.* It is a metric on compact sets, so this is just the restriction to the set of convex bodies, also the infimum is actually realised, so we could have written min. □

**Theorem 3.3.** *Theorem  $\mathcal{P}^+$  is dense in  $\mathcal{K}^+$  under the Hausdorff metric.*

*Proof.* Easy corollary of 3.1. □

**Theorem 3.4.** *Volume and surface area will be continuous on  $\mathcal{P}^+$ .*

*Proof.* Volume is easy to see, the important fact is that surface area is monotone with respect to inclusion on polytopes. The surface area of one face of a polytope is  $\leq$  than the sum of the areas of the other faces, and strictly so if the polytope is nondegenerate. Now the second part of 3.1 will give us continuity. □

**Definition 3.5.** For a convex body  $K \in \mathcal{K}^+$  the volume is defined as  $V(K) := \sup\{V(P) : P \subset K, P \in \mathcal{P}^+\} = \inf\{V(P) : P \supset K, P \in \mathcal{P}^+\}$  And similarly for the surface area.

Again, this definition is justified by 3.1.  $\leq$  is true by the monotonicity of volume and surface area, and the other direction is true by the sandwiching property described in the lemma.

In this extended form  $V, A : \mathcal{K}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  will be continuous.

**Definition 3.6.**  $\omega_n := V(B(0, 1))$ ,  $\kappa_n := A(B(0, 1))$ , where  $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$  is the unit ball.

*Remark 3.7.*  $\omega_n = \frac{2\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$   $\kappa_n = \frac{2\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$

<sup>1</sup>convex hull of finitely many points  
<sup>2</sup>homothety from  $o$  by a factor of  $\eta$

**Definition 3.8.**  $p_H$  will denote the orthogonal projection to the hyperplane  $H$ .

**Theorem 3.9** (Chauchy).

$$A(K) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{v \in S^{n-1}} V_{n-1}(P_{v^\perp}(K)) dv$$

where  $v^\perp$  is the hyperplane orthogonal to  $v$ .

*Proof.* Assume  $P \in \mathcal{P}^+$ , and let  $L_i$  be the hyperfaces of  $P$ . Then  $V(p_H(P)) = \frac{1}{2} \sum_i V(p_H(L_i))$ , since disregarding a set of measure zero<sup>3</sup> everything is covered twice under a projection.  $V(p_H(L_i)) = \cos(\angle(L_i, v^\perp)) \cdot V(L_i)$  relates the volumes of the original face and the projected one, which is also equal to  $|\cos(\angle(n_i, v))| \cdot V(L_i)$  where  $n_i$  is a normal vector to  $L_i$ .

$$\begin{aligned} \int_{D^{n-1}} V_{n-1}(p_{v^\perp}(P)) dv &= \int_{S^n} \sum_i V(p_H(L_i)) dv = \frac{1}{2} \sum_i \int |\cos(\angle(n_i, v))| \cdot V(L_i) dv = \frac{1}{2} \sum_i V(L_i) \int |\cos(\angle(n_i, v))| dv \\ &= A(P) \frac{1}{2} \int_{S^n} |\cos(\angle(n_i, v))| dv \end{aligned}$$

Denote the last integral  $c_n$ , we could figure out its value, but we proceed in another manner. The  $c_n$  is a universal constant, and by continuity we can replace  $P$  by any convex body with nonempty interior. In particular it will be true for the sphere. This we can calculate.

$$c_n \cdot A(K) = \int_{S^{n-1}} V_{n-1}(p_{v^\perp}(K)) dv = \int V_{n-1}(B^{n-1}(0, 1)) dv = \int \omega_{n-1} dv = \omega_{n-1} \cdot \kappa_n$$

So  $c_n = \omega_{n-1}$ , exactly what the formula stated. □

We have some bigger game to hunt still, the Steiner-Minkowski formula. Suppose that  $P$  is a polytope in the plane (polygonal domain). We may consider  $B(P, r)$ , the closed ball around  $P$  with radius  $r$ . Then  $V(B(P, r)) = V(P) + A(P)r + r^2\pi$ , and  $A(B(P, r)) = A(P) + 2r\pi$ . We consider relatively open faces, they form a partition of  $P$ . For every point of the plane, there is a unique closest point of  $P$  to it, this gives a partition of the plane. We restrict our attention to this partition inside  $B(P, r)$ . Adding up the volumes of the pieces

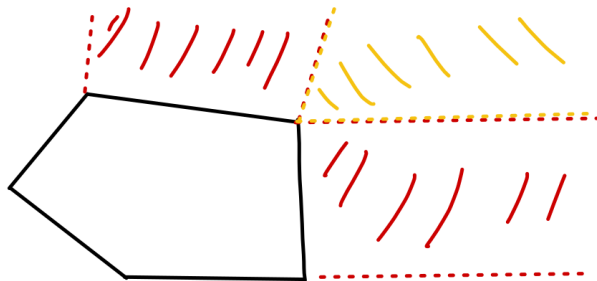


Figure 7: Picture of part of the partition given by the construction

in the partition we find that the 2-face contributes  $V(P)$ , 1-faces contribute  $A(p) \cdot r$ , and 0-faces contribute a circle altogether, so  $r^2\pi$ .

The same principle can be applied in higher dimensions. Assume  $P$  is a polytope (with an interior point), and assume the  $L_i^f$  is an  $f$ -dimensional relatively open face. Take  $x \in \mathbb{R}^n$ , and  $y \in L_i^f$  the closest point to it. Locally around  $y$   $P$  looks like a cone  $y + \mathbb{R}^+(P - y)$ . This is an  $n$ -dimensional cone with degenerate dimension

<sup>3</sup>e.g. the smaller dimensional faces

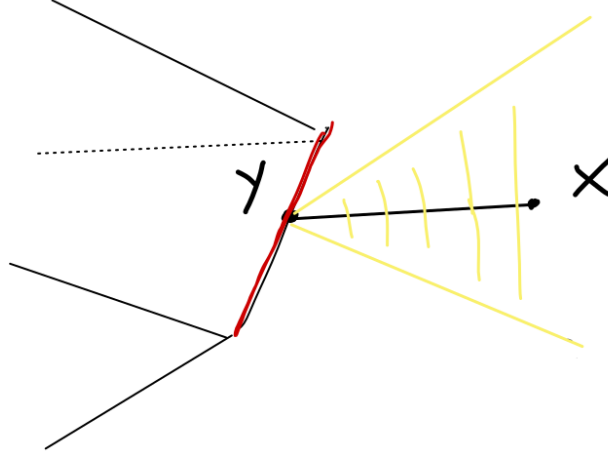


Figure 8: The partitioning in higher dimensions with the dual cone

$f^4$ .  $y-x \in \mathbb{R}^+(P-y)^v$ , where  $C^v$  is the dual cone  $\{z : \langle z, w \rangle \geq 0 \forall w \in C\}$ . The dual cone has full dimension  $n-f$ , and no degeneracy. Again, we get that  $\mathbb{R}^n$  is partitioned as  $\sqcup_{f,i} L_i^f - \mathbb{R}^+(P-L_i^f)^v$ , topologically its a direct product of  $L_i^f$  and  $-\mathbb{R}^+(P-L_i^f)^v$ . For the ball  $B(P,r) = \sqcup L_i^f - (\mathbb{R}^+(P-L_i^f)^v \cap B(0,r))$  by the direct product structure. From this

$$\text{vol}B(P,r) = \sum_{f,i} V(L_i^f) A(\mathbb{R}^+(P-L_i^f)^v \cap S(0,1)) r^{n-f}.$$

In the end, this is a polynomial of order  $r^n$ .

## 4 Fourth lecture

**Theorem 4.1** (Steiner). *If  $K$  is any convex compact body, then  $\text{vol}(B(K,r)) = V_0^K r^0 + \dots + V_n^K r^n$*

*Proof.* Volume is monotonic, and we can approximate convex bodies by polytopes, for which we just saw this formula, and uniform limit of a sequence of polynomials is again a polynomial of at most the same degree.  $\square$

The coefficients of tis polynomial are called kevert térfogats of  $K$ , well studied objects of convex geometry. We are interested in interpretations of this for smooth surfaces.  $M$  will denote an embedded hypersurface.  $\Omega^0(M) \equiv C^\infty(M)$  will denote the 0-forms, or smooth functions on  $M$ . Furthermore  $\Omega^1(M)$  will denote the smooth 1-forms, smooth sections of the cotangent bundle.  $d : \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M)$  acts by  $f \mapsto (v \mapsto v(f))$ , the exterior differential. We have in fact a whole chain complex of differential forms:

$$\Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^2(M) \rightarrow \dots \rightarrow \Omega^n(M).$$

This is indeed a chain complex,  $d \circ d = 0$  is true at each step.

Let  $x : M^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  be an embedding, and  $e_1, \dots, e_n : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  be an orthonormal frame<sup>1</sup>. It is assumed that  $e_n = N$ , the normal vector to the hypersurface, thus the first  $n-1$  span the (image of the) tangent bundle.  $dx = \sum \sigma^i e_i$ , where  $\sigma^i$  are 1-forms on  $M$ .  $(dx)(v_p) = \sum \sigma^i(v_p) e_i(p)$ , and similarly  $de_j = \sum \omega_j^i e_i$ .

<sup>4</sup>it contains a real vector space of dimension  $f$

<sup>1</sup>considered as a function from  $M$ , giving a basis for  $\mathbb{R}^n$  at each point

**Lemma 4.2.** Assume  $v \in T_p M$ , then

1.  $dx(v) = v$ , i.e.  $\sigma^i(v) = \langle v, e_i \rangle$ . In particular  $\sigma^n = 0$ .

2.  $\omega_j^i + \omega_i^j = 0$ .

3.  $d\omega - \omega \wedge \omega = 0$  meaning  $d\omega_i^j - \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j = 0$

*Proof of 1.* Consider a path  $\gamma : I \rightarrow M$  representing  $v \in T_p M$ . Now  $dx_p(v) = (x \circ \gamma)'(0) = \gamma'(0) = v = \sum \langle v, e_i(p) \rangle e_i(p)$ .  $\square$

*Proof of 2.* Consider  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ , so  $\langle de_i, e_j \rangle + \langle e_i, de_j \rangle = 0$ . This proves the claim, since the first term is by definition  $\omega_j^i$ , the second is  $\omega_i^j$ .  $\square$

*Proof of 3.*

$$dde_i = d(\sum \omega_i^j e_j) = \sum (d\omega_i^j e_j - (\omega_i^j \wedge de_j)) = \sum d\omega_i^j e_j - \sum \sum \omega_i^j \wedge \omega_j^k e_k$$

$\square$

Restrict the embedding to an open subset  $x|_U : U \subset M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $v, w \in T_p M$ .  $I_p(v, w) = \langle v, w \rangle = \sum \sigma_p^i(v) \sigma_p^i(w)$  will denote the first fundamental form of the hypersurface.  $II_p(v, w) = \langle L_p(v), w \rangle$  will be the second fundamental form, where  $L_p = -\partial_v N = -\partial_v e_n = -de_n(v)$  is called the Weingarten map. This Weingarten map is self adjoint<sup>2</sup> w.r.t.  $I_p$ , so the second fundamental form itself is a symmetric form. The eigenvalues of  $L_p$  are called the principal curvatures of the surface at the point.

Suppose that  $X, Y \in \mathfrak{X}$  are vector fields. A vector field can be considered  $\mathbb{R}^n$  valued,  $\partial_X$  will be considered tangent vector valued. Now  $\partial_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y)N$ .

## 5 Fifth lecture

Last time, we had  $M \subset \mathbb{R}^n$  a smooth hypersurface,  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  the natural embedding.  $e_1, \dots, e_n : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  smooth vector fields, orthonormal at each point, and we have chosen  $e_n = N$  to be the normal vector field of the hypersurface.  $dx = \sum \sigma^i e_i$  and  $de_j = \sum \omega_j^i e_i$  are 1-forms, we saw a few properties as well. We also defined the first and second fundamental forms  $I_p(v, w) = \sigma^i(v) \sigma^i(w)$ ,  $II_p(v, w) = \langle L_p v, w \rangle$ , defined through the Weingarten map  $L_p(v) = -de_n(v)$ .

### 5.1 The Levi-Civita connection

Some motivation: parallel transport. If we have two points on a hypersurface and two vectors in  $T_p \mathbb{R}^n$  and  $T_q \mathbb{R}^n$  the parallel transport is trivial, every tangent space is identified in the obvious way. What if we want to transport the tangent space of the submanifold  $M$  into  $T_q M$ , and similarly with the normal bundle? We can do this as well, parallel transport from  $T_p M \oplus N_p M$  to  $T_q M \oplus N_q M$ . The recipe is to use the normal vector field  $e_n$ , and correct the splitting of  $T_p \mathbb{R}^n$  accordingly. Doing this we also see, that the length of the vectors are preserved<sup>1</sup>. This process is completely trivial on  $NM$ , the normal bundle is trivial, but on the tangent space  $TM$  it is less clear. Its "almost" an observation of Gauss, that this transport on  $TM$  can be described by the intrinsic geometry of  $M$ .<sup>2</sup>

<sup>2</sup> $\langle L_p(v, w) \rangle = \langle v, L_p(w) \rangle$

<sup>1</sup> $\langle v, v \rangle' = 2 \langle v, v' \rangle = 0$  since to first order  $v$  only moves in the normal direction

<sup>2</sup>specifically  $I_p$



The Levi-Civita connection is derivation of tangent vectors along the parallel transport. Let  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , the ordinary derivative is expressed as  $\partial_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y)e_n$ , the first term of the RHS is the Levi-Civita connection, i.e. the tangent part of the ordinary derivative.  $de_i(e_j) = \partial_{e_j} e_i = \nabla_{e_j} e_i + II(e_j, e_i)e_n$  for  $1 \leq i \leq n-1$ . The following formulae describe the connection and the second fundamental form, can be read off from the previous decomposition:

$$\nabla_{e_j} e_i = \sum \omega_i^k(e_j)e_k, \quad II(e_j, e_i) = \omega_i^n(e_j).$$

Let  $x_r : M \rightarrow M_r \subset \mathbb{R}^n$  be the map defined by the following formula  $x_r = x + re_n$ , it parametrises a parallel surface of  $M$ .

**Lemma 5.1.**  *$x_r : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  has a derivative of maximal rank at  $p \in M$  if  $\frac{1}{r}$  is not a principal curvature<sup>3</sup> at  $p$ . In this case*

1.  $T_p M$  and  $T_{x_r(p)} M_r$  are parallel to each other
2. If the principal curvatures of  $M$  at  $p$  are  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ , then the principal curvatures of  $M_r$  at  $x_r(p)$  are  $\{\frac{\kappa_i}{1-r\kappa_i} : 1 \leq i \leq n-1\}$ .

*Proof.* We proceed by simple computation.  $dx_r = dx + rde_n$ , if we evaluate at a vector we get  $dx_r(v) = v - rL_p(v)$ .<sup>4</sup> This is of maximal rank, if  $id - rL_p$  is of maximal rank, which happens precisely when  $r = 0$ , or  $\det(\frac{1}{r}id - L_p) \neq 0$ , which happens precisely when  $\frac{1}{r}$  is an eigenvalue of  $L_p$ .

If  $dx_r$  is of maximal rank, then  $im(id - rL_p) = T_p M$ , since it is a linear operator on that space, and also the derivative of a parametrisation gives the tangent space of  $M_r$ , so the two vector spaces map to the same linear subspace, i.e. they are parallel.

Suppose  $e_1, \dots, e_n$  are translated to  $M_r$  by  $e_i \circ x_r^{-1}$ . If we take the Weingarten map with this pulled back normal vector<sup>5</sup> we see

$$\hat{L}_{x_r(p)}(v) = d(-e_n \circ x_r^{-1})_{x_r(p)}(v) = L_p \circ (id_{T_p M} - rL_p)^{-1}(v)$$

After some inspection it is clear to see, that the eigenvalues transform as we stated. □

Now we are ready to compute the volume of the parallel surface. Suppose  $D \subset M$  a compact domain and  $D_r := x_r(D)$  its translated image. Then  $V_{n-1}(D_r) = |\int_{D_r} 1d\sigma(p)|$ , where  $\sigma := \sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^{n-1}$ , the volume form. We have already expressed the Jacobian of the transition between  $D$  and  $D_r$ , so we can write  $V_{n-1}(D_r) = \int_D |\det(id - rL_p)|d\sigma(p)$ . If we expand we see  $\det(id - rL_p) = r^{n-1}(\frac{1}{r}id - L_p) = r^{n-1} \prod(\frac{1}{r} - \kappa_i)$ . We can compute this from the elementary symmetric polynomials of the principal curvatures.  $K_0(p) = 1, K_1(p) = \sum \kappa_i, \dots, K_{n-1}(p) = \prod \kappa_i$ . Now  $\det(id - rL_p)$  becomes  $r^{n-1} \sum (-1)^i K_i(p)/r^{n-i-1} = \sum (-1)^i K_i(p)r^i$ . With all this, we proved the following statement:

**Proposition 5.2.**  *$D \subset M$  compact connected,  $\frac{1}{r}$  is not a principal curvature at any point of  $D$ , then*

$$V_{n-1}(D_r) = |\sum_i (-1)^i (\int_D K_i(p)d\sigma(p)r^i)|.$$

*Assuming  $x_r$  is injective on  $D$ .*

---

<sup>3</sup>eigenvalue of the Weingarten map  $L_p$

<sup>4</sup>the sign swaps in the second term by the definition of the Weingarten map

<sup>5</sup>it will be normal, since the tangent spaces are parallel

If  $D \subset M$  compact, with  $r_0$  sufficiently small, then  $h : D \times [0, r_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  defined by  $(p, t) \mapsto x_t(p)$  is injective, with non-vanishing Jacobi determinant. With this setup we state the following theorem:

**Theorem 5.3** (Steiner). *If  $r_0$  and  $h$  are as before, then*

$$V_n(h(D \times [0, r_0])) = \sum_k \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left( \int_D K_{k-1}(p) d\sigma(p) \right) r_0^k.$$

Where the volume form is chosen such that the orientation is positive.

*Proof.* Integrate the previous proposition, and use the block structure of the Jacobian of  $h$ . □

This theorem gives an interpretation of the mixed volumes in terms of principal curvatures.

## 6 Hatodik előadás

Steiner formulát beláttuk, ami igaz ha  $r \ll 1$ . Az integrálban  $d\sigma$  úgy keletkezett, hogy  $dx = \sum \sigma^i e_i$ . Konvex zárt felületre  $r^0$  együttható nincs, ez a térfogatnak felelne meg, de ez eltűnik.  $r^1$  e.hatója a felszín,  $r^n$ -t a standard gömb térfogata,  $r^{n-1}$ -et nem tudjuk még, ez lesz ma.

**Theorem 6.1** (Minkowski). *Tegyük fel, hogy  $M \subset \mathbb{R}^n$  sima kompakt hiperfelület,  $\partial M = \emptyset$ , és  $e_n : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  a külső normálvektormező. Tekintsük a  $p_n : M \ni p \mapsto \langle p, e_n(p) \rangle \in \mathbb{R}$  függvényt, ez az érintősík távolsága<sup>1</sup> az origótól. Ekkor*

$$\frac{-1}{n-1} \int_M K_{n-2} d\sigma = \int_M p_n K_{n-1} d\sigma$$

teljesül.

*Proof.* Tekintsük a szokásos  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  tautologikus beágyazást, és az  $e_i$  ortonormált keretet. Definiáljuk analóg módon a  $p_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  függvényeket a  $p \mapsto \langle p, e_i(p) \rangle = \langle x(p), e_i(p) \rangle$  formulával. Ekkor deriválva

$$dp_i = \langle dx_i, e_i \rangle + \langle x, de_i \rangle = \langle \sum \sigma^k e_k, e_i \rangle + \langle x, \sum \omega_i^k e_k \rangle = \sigma^i + \sum_k \omega_i^k p_k$$

teljesül, alkalmaztuk továbbá  $p_i$  definícióját. Legyen<sup>2</sup>  $\eta = \sum_i (-1)^{i+1} p_i \omega_1^n \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i^n \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n$ , egy  $n-2$  forma. Most némi számolás, deriválunk

$$\begin{aligned} d\eta &= \sum_i (-1)^{i+1} dp_i \wedge \omega_1^n \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i^n \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n + \\ &+ \sum_i \sum_{1 \leq j < i} (-1)^{i+j} p_i \omega_1^n \wedge \dots \wedge d\omega_j^n \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i^n \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n + \\ &+ \sum_i \sum_{i < j \leq n-1} (-1)^{i+j-1} p_i \omega_1^n \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i^n \wedge \dots \wedge d\omega_j^n \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n \end{aligned}$$

Emlék a  $d\omega_j = \sum_k \omega_j^k \wedge \omega_k^n$  formula, és a  $dp_i$ -re vonatkozó formula<sup>3</sup>. Ezt felhasználva tovább írhatjuk a külső deriváltat, behelyettesítjük az azonosságokat:

$$\sum_i \sum_j (-1)^{i+1} \omega_j^i \wedge \omega_1^n \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i^n \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n +$$

<sup>1</sup>előjelesen

<sup>2</sup>a kalap azt jelenti, hogy  $\hat{\omega}_i^n$  ki van hagyva az éksorozatból

<sup>3</sup>vegyük észre, hogy  $i = n$ -re  $\sigma^n = 0$  lesz

$$\begin{aligned}
& + \sum_i (-1)^{i+1} \sigma^i \wedge \omega_1^n \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i^n \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n + \\
& + \sum_i \sum_{1 \leq j < i} \sum_k (-1)^{i+j} p_i \omega_1^n \wedge \dots \wedge (\omega_j^k \wedge \omega_k^n) \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i^n \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n + \\
& + \sum_i \sum_{i < j \leq n-1} \sum_k (-1)^{i+j-1} p_i \omega_1^n \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i^n \wedge \dots \wedge (\omega_j^k \wedge \omega_k^n) \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n.
\end{aligned}$$

Az utolsó két tag<sup>4</sup> egyszerűsödik, mert a behelyettesített tagban a második tényező  $\omega_k^n$  kinullázza kivéve ha  $k = i$ , három helyett már csak két szumma marad<sup>5</sup>. Összevonva és felcserélve a tagokat

$$\begin{aligned}
& \sum_i \sum_{1 \leq j < i} (-1)^{i+j-1+i-j-1} p_i \omega_j^i \wedge \omega_1^n \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_j^n \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n + \\
& + \sum_i \sum_{i < j \leq n-1} (-1)^{i+j-1+j-2+j-i-1} p_i \omega_j^i \wedge \omega_1^n \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_j^n \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n
\end{aligned}$$

lesz a második két összegből. Ezt a két összeget összevonhatjuk,

$$\sum_i \sum_j (-1)^j p_i \omega_j^i \wedge \omega_1^n \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_j^n \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n$$

adódik. Az első ( $dp_i$ -s) tagot is belevéve és elvégezve a kiejtéseket

$$\begin{aligned}
d\eta & = p_n \sum_i (-1)^{i+1} \omega_i^n \wedge \omega_1^n \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i^n \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n + \\
& + \sum_i (-1)^{i+1} \sigma^i \wedge \omega_1^n \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i^n \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n \\
& = (n-1) p_n \omega_1^n \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n + \sum_i (-1)^{i+1} \sigma^i \wedge \omega_1^n \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i^n \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n.
\end{aligned}$$

Most állítjuk, hogy ez globálisan jól definiált. Az  $x(p)$  vektor vetülete  $T_p M$ -re  $\pi_{T_p M}(p) = \sum_{i=1}^{n-1} p_i(p) e_i(p)$ -ként áll elő, ez egy geometriai jelentést ad a  $p_i$ -knek. Az  $\omega_i^n$  számok a Weingarten leképezés mátrixából

$$\text{jönnek. } \eta(v_1, \dots, v_{n-2}) = \det \left\{ \begin{array}{cccc} p_1(p) & \omega_1^n(v_1) & \dots & \omega_1^n(v_{n-2}) \\ p_2(p) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n(p) & \omega_{n-1}^n(v_1) & \dots & \omega_{n-1}^n(v_{n-2}) \end{array} \right\} \text{ Ahogy mi felírtuk, az első oszlop szerint}$$

fejtettük ki ezt a determinánst. Mivel minden oszlopa globálisan definiált geometriai dolgokból van definiálva, az ezekből képzett ékszorzatok is azok, és éta értelmes bázisfüggetlenül. Hasonlóan  $\omega_1^n \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n$  kiértékelve  $(v_i)_1^{n-1}$  vektorkon szintén egy determinánsos alakban írható föl, ahogy azt tanultuk, és az oszlopok megint csak geometriailag definiált mennyiségek lesznek<sup>6</sup>. Ebből világos hogy  $d\eta$  végső alakjában a szumms tag is természetes, és mivel  $\eta$  természetes a deriváltja is az.

Az első tag látványosan  $(n-1)p_n K_{n-1} d\eta$ -ban, a második nem annyira, a főgörbületi irányokat lehet venni lokálisan bázisnak, és így beazonosítani hogy az a természetes differenciálforma pont  $K_{n-2}$ . Emlékeztető:

**Theorem 6.2** (Stokes).  $\int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta$

Mivel peremtelen a sokaság, ezért  $\int d\eta = 0$ , és adódik, hogy

$$- \int_M K_{n-2} d\sigma = \int_M (n-1) p_n K_{n-1} d\sigma,$$

pont amit bizonyítani akartunk. □

<sup>4</sup>mármint tripla szumma

<sup>5</sup>lol

<sup>6</sup>a Weingarten map alkalmazva a  $v_i$  vektorokra

Most  $M$  egy  $K$  kompakt konvex határa legyen, sőt feltesszük, hogy  $e_n : M \rightarrow S^{n-1}$  egy diffeomorfizmus. Az érintőlekepezés  $Te_n : T_p M \rightarrow T_{e_n(p)} S^{n-1}$  meg fog egyezni  $-L_p$ -vel definíció szerint. Az  $S^{n-1}$  kanonikus térfogati fomrájának a visszahúzottja pedig  $(-1)^{n-1} K_{n-1} \sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^{n-1}$ . Mindezek miatt a Minkowski formula szerint

$$\int_M (-1)^{n-1} p_n K_{n-1} d\sigma = \int_{S^{n-1}} p_n(e_n^{-1}(u)) du.$$

Ezt szimmetrizáljuk  $\frac{1}{2} \int_S p_n(e_n^{-1}(u)) + p_n(e_n^{-1}(-u)) du$  alakba. Az integrandus itt a  $\pm u$  irányú érintősíkok távolsága lesz.

**Definition 6.3.** Egy  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt halmaz  $u \in S^{n-1}$  irányú szélessége  $w_K(u) = \max_K \langle x, u \rangle - \min_K \langle x, u \rangle$ . Az átlagszélesség  $w(K) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{S^{n-1}} w_K(u) du$ .<sup>8</sup>

Ezzel pedig azt kapjuk, hogy a Minkowski tételből az integrál pont  $\frac{n\omega_n}{2} w(K)$ .

**Theorem 6.4.**  $K$  kompakt konvex  $M = \partial K$  sima felület, az  $e_N : M \rightarrow S^{n-1}$  Gauss leképezés diffeomorfizmus, akkor  $B(K, r)$ -nek az  $r^{n-1}$  együtthatójára

$$\frac{(-1)^{n-2}}{n-1} \int_M K_{n-2}(p) d\sigma(p) = \frac{n\omega_n}{2} w(K)$$

teljesül.

Mindig deformálható egy konvex test olyanná, hogy a Gauss leképezés diffeomorfizmus legyen, ezért ez az állítás általában is igaz.

## 7 Konvex felületek merevsége & Herglotz integrálformulája

Múltkor egy vegyestérfogatot identifikáltunk, az átlagátmérő integráljaként állt elő a top-1. együttható. Most belátjuk Herglotz formuláját, ami igazából Minkowski formulájának egy variánsa lesz.

**Definition 7.1.**  $r, \tilde{r} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  két beágyazott hiperfelület úgy, hogy minden  $u : [a, b] \rightarrow \Omega$  görbére  $\gamma = r \circ u$ ,  $\tilde{\gamma} = \tilde{r} \circ u$  hossza azonos, akkor azt mondjuk hogy az egyik hiperfelületet a másik hajlításként kaphatjuk meg.

Magyarul a képek első alapformái azonosak (ld.7.2). Egy kis terminológia, emlékeztető korábbról:

- $h = \tilde{r} \circ r^{-1} : r(\Omega) \rightarrow \tilde{r}(\Omega)$  a *hajlítás* az előbbi definíció jelöléseivel.
- $M = r(\Omega)$ -n tekinthetjük a már szokásos  $e_i$  ortonormált keretet<sup>1</sup>,  $Th$ -val ez átvihető a másik képsokaságra  $\tilde{e}_i = The_i$ -vel jelöljük ( $\tilde{e}_i$  is a normális vektormező lesz  $\tilde{M} = \tilde{r}(\Omega)$ -n).
- $\sigma_i, \omega_i^j, p_i$  függvények mint eddig, ezeket legyárthatjuk  $\tilde{M}$ -en is,  $\tilde{\sigma}_i, \dots$
- Hogy össze lehessen hasonlítani, áthúzzuk  $M$ -re,  $\tilde{\sigma}_i := h^*(\tilde{\sigma}_i)$ , s így tovább.

**Proposition 7.2.**  $\tilde{r}$  beágyazáshoz tartozó  $T\tilde{M}$ -en lévő 1. alapforma  $h^*$ -al vett visszahúzottja megegyezik az  $r$  beágyazáshoz tartozó alapformával.

<sup>7</sup>Gauss leképezésnek is nevezzük ilyenkor

<sup>8</sup>A felszínnel normalizálunk, csak ilyen funky kifejezéssel írtuk mert megtehetjük

<sup>1</sup> $e_n$  mindig a normális vektormező

**Corrolary 7.3.** A Levi-Civita kovariáns deriválások megegyeznek, és mivel  $\omega_i^j$ ,  $1 \leq i, j \leq n-1$  csak a LC kovariáns deriválástól függenek,  $\omega_i^j = \bar{\omega}_i^j$  (a visszahúzottjaik megegyeznek  $n-1$ -ig, az utolsót nem tudjuk).

**Proposition 7.4.** Tegyük fel, hogy  $\Omega$  összefüggő, ekkor  $h : M \rightarrow \tilde{M}$  hajlítás kiterjeszthető  $\mathbb{R}^n$  egy izometriájává pontosan akkor, hogyha  $\omega_i^n = \bar{\omega}_i^n$  teljesül  $\forall 1 \leq i \leq n-1$ .

*Proof.* Az "akkor" rész teljesen világos, egy izometria érintőleképezése izomorfizmus.

A "pontosan" részhez kell kicsit többet dolgozni. Tegyük fel, hogy  $\omega_i^n = \bar{\omega}_i^n$ , és legyen  $p \in M$  kitüntetett pont. Válasszunk egy  $\Phi$  izometriát, hogy  $\Phi(p) = h(p)$ ,  $T_p\Phi(e_i(p)) = \bar{e}(h(p))$ . Tegyük fel, hogy  $\gamma[0, 1] \rightarrow \Omega$  egy sima görbe,  $\gamma(0) = p$ . Tekintsük az  $e_i \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  vektormezőket. A deriváltjaikra

$$\frac{d}{dt}(e_i \circ \gamma)|_{t=\tau} = \sum_j \omega_i^j(\gamma'(\tau))(e_j \circ \gamma)(\tau)$$

teljesül. Definiálhatunk továbbá egy  $\hat{h} := \Phi^{-1} \circ h$  leképezést, és ebből az  $\hat{e}_i$  keretet  $\hat{M} := \hat{h}(r(\Omega))$ -n. Egy az előzőhöz teljesen analóg formula igaz a kalapos vektormező megszorítottjaira is a  $\gamma$  képére.  $e_i \circ \gamma$  és  $\hat{e}_i \circ \hat{h} \circ \gamma$  ugyanazon differenciálegyenletet oldja meg, hiszen az együttható  $\omega_i^j$ -k megegyeznek a visszahúzásnál, és a kezdeti feltétel is megegyezik, tehát ez a két görbe egybeesik! Következésképp

$$\gamma'(\tau) = \sum \sigma^i(\gamma'(\tau))e_i(\gamma(\tau)) = \sum \sigma^i(\gamma'(\tau))\hat{e}_i(\hat{h}(\gamma(\tau))) = (\hat{h} \circ \gamma)'(\tau)$$

vagyis  $\gamma = \hat{h} \circ \gamma = \hat{\gamma}$ . Összefüggőség miatt a végpontok megegyeznek, következik hogy  $\hat{h} = id$  megszorítása, kiterjeszthető identitásként.  $\square$

## 7.1 Herglotz formulája

$M$  kompakt, peremtelen hiperfelület  $\mathbb{R}^n$ -ben,  $h : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  egy hajlítás,  $h(M) = \tilde{M}$ , adott a szokásos  $e_i$  ortonormált keret. Ha ez megvan, akkor ebből kapunk asszociált együtthatókat  $\omega_i^j, \bar{\omega}_i^j, K_{n-2}, p_i, \bar{p}_i$ .

**Proposition 7.5.** <sup>2</sup>Ekkor az  $\bar{p}_n \sum_{i=1}^{n-1} \omega_1^n \wedge \dots \wedge \bar{\omega}_i^n \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n$  és  $K_{n-2} \sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^{n-2}$  formák  $M$ -en nem függenek a bázis választásától, tehát globálisan jól definiáltak  $M$ -en és

$$-\int_M \bar{p}_n \sum_{i=1}^{n-1} \omega_1^n \wedge \dots \wedge \bar{\omega}_i^n \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n = \int_M K_{n-2} \sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^{n-2}$$

Ez egy "kevert Minkowski tétel",  $h|_M = id|_M$  esetén ez pont a Minkowski tétel.

*Proof.* <sup>3</sup> Kb ugyanaz mint a Minkowski formula. Megint definiáljuk az  $\eta := \sum_1^{n-1} (-1)^{i+1} \bar{p}_i \omega_1^n \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i^n \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n$   $(n-2)$ -formát, és lederiváljuk.

$$\begin{aligned} d\eta &= \sum_i (-1)^{i+1} d\bar{p}_i \wedge \omega_1^n \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i^n \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n + \\ &+ \sum_i \sum_{1 \leq j < i} (-1)^{i+j} \bar{p}_i \omega_1^n \wedge \dots \wedge d\omega_j^n \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i^n \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n + \\ &+ \sum_i \sum_{i < j \leq n-1} (-1)^{i+j-1} \bar{p}_i \omega_1^n \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i^n \wedge \dots \wedge d\omega_j^n \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n \end{aligned}$$

<sup>2</sup>mindenféle problémákat elhessegetünk,  $h$  beágyazott irányítástartó, stb...

<sup>3</sup>A bizonyításban a kalap nem előrelökést/visszahúzást jelöl, hanem kihagyást a szummából, mint a Minkowski bizonyításánál, a visszahúzott dolgokat felülvonással jelöljük

Az  $\omega_i^j$ -kre ugyanazok a formulák érvényesek mint múlt előadáson,  $d\bar{p}_i$ -re úgyszintén, csak vonásozni kell az  $\omega_i^j$ -s tagot, de a  $\sigma^i$ -ket nem, mert a kovariáns deriválás ugyanaz. A kifejtett formula teljesen ugyanaz, mint a második a helyettesítés után, csak vonásokkal a megfelelő formákon és  $p_i$ -n.

Az utolsó két tag egyszerűsödik és megint

$$\sum_{i,j} (-1)^j \bar{p}_i \omega_j^i \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i^n \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n$$

kapunk. Ebből

$$d\eta = \bar{p}_i \left( \sum \omega_1^n \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i^n \wedge \dots \wedge \omega_{n-1}^n \right) + K_{n-2} \sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^{n-1}$$

Az itt alkalmazott formák megint természetesekek a determinánsos kifejezés miatt, és így éta komponensei invariánsok, és megint ugyanúgy befejezhetjük a bizonyítást egy Stokes tétellel.  $\square$

**Theorem 7.6.** *Tegyük fel, hogy  $M$  és  $\tilde{M}$  sima határfelületei kompakt konvex reguláris tartományoknak,  $C, \tilde{C}$ -nek  $\mathbb{R}^3$ -ban. Tegyük fel, hogy  $M$  Gauss-görbülete  $K_2 > 0$ , és tegyük még fel, hogy létezik hajlítás  $h : M \rightarrow \tilde{M}$ , ekkor  $h$  kiterjed izomorf módon a teljes térre. Speciálisan  $C$  és  $\tilde{C}$  egybevágóak.*

A feltételekből következik, hogy a Weingarten leképezés definit például, a  $C, \tilde{C}$ -k létezésére vonatkozó feltétel elhagyható, de így egyszerűbb megfogalmazni.

*Proof.* Vesszük a kifelé mutató normális vektormezőt, ekkor a Weingarten leképezés negatív definit lesz  $M$ -en és  $\tilde{M}$ -en is. Feltehetjük azt is, hogy az origó belső pontja  $C$ -nek és  $\tilde{C}$ -nak is, ez azt mondja, hogy  $p_3, \bar{p}_3 > 0$ . A Minkowski görbület  $K = \frac{K_1}{2}$ -re igaz, hogy

$$- \int_M K d\sigma = \frac{-1}{2} \int_M K_1 d\sigma = \int_M p_3 K_2 d\sigma = \int_M K_2 \omega_1^3 \wedge \omega_2^3$$

a Minkowski formula szerint. A Herglotz formula szerint pedig

$$\int_M K_1 d\sigma = - \int_M -\bar{p}_3 (\bar{\omega}_1^3 \wedge \omega_2^3 + \omega_1^3 \bar{\omega}_2^3)$$

Ezt a kettőt összerakva

$$- \int_M K d\sigma = \int_M p_3 \omega_1^3 \wedge \omega_2^3 = \frac{1}{2} \int_M \bar{p}_3 (\bar{\omega}_1^3 \wedge \omega_2^3 + \omega_1^3 \wedge \bar{\omega}_2^3).$$

Felcserélve  $M$  és  $\tilde{M}$  szerepét analóg formulákat kapunk csak a vonások és/vagy hullámok cserélnek helyet<sup>4</sup>. Végül ezeket a formulákat visszahúzzuk  $M$ -re, és adódik hogy

$$- \int_{\tilde{M}} \hat{K} d\tilde{\sigma} = \int_M \bar{p}_3 \bar{\omega}_1^3 \wedge \bar{\omega}_2^3 = \frac{1}{2} \int_M p_3 (\bar{\omega}_1^3 \wedge \omega_2^3 + \omega_1^3 \bar{\omega}_2^3)$$

A Theorema Egregium adja, hogy  $\omega_1^3 \wedge \omega_2^3 = K_2 \sigma^1 \wedge \sigma^2 = \bar{\omega}_1^3 \wedge \bar{\omega}_2^3$ . A különbséget felírva

$$\int_{\tilde{M}} \hat{K} d\tilde{\sigma} - \int_M K d\sigma = \frac{1}{2} \int_M p_3 (\omega_1^3 - \bar{\omega}_1^3) \wedge (\omega_2^3 - \bar{\omega}_2^3).$$

Denote the integrand on the right hand side by  $f d\sigma^1 \wedge d\sigma^2$ . Let  $v_1, v_2$  be an orthonormal basis of  $T_q M$ , then the second fundamental form will be  $\begin{pmatrix} \omega_1^3(v_1) & \omega_1^3(v_2) \\ \omega_2^3(v_1) & \omega_2^3(v_2) \end{pmatrix}$  and similarly with the  $\bar{\omega}_i^3$ . Now  $\det B = \det \bar{B} = K_2(q)$ .

By the assumptions  $B, \bar{B}$  are symmetric negative definite matrices. Let

$$D(c) = \det(B - c\bar{B}) = K_2(q)(c^2 - \text{tr}(B\bar{B}^{-1})c + 1).$$

<sup>4</sup>illetve nem  $h$ -val, hanem  $h^{-1}$ -el húzzuk vissza mindenkit, nem  $M$ -re, hanem  $\tilde{M}$ -re

$f(q) = D(1) = -K_2(q) \frac{(1-c_0)^2}{c_0} \leq 0$ , where  $c_0$  is an eigenvalue of  $B\bar{B}^{-1}$ , which will be positive (and the other one will be  $\frac{1}{c_0}$ ).

$$\frac{1}{2} \int_M p_3(\omega_1^3 - \bar{\omega}_1^3) \wedge (\omega_2^3 - \bar{\omega}_2^3) = \frac{1}{2} \int_M p_3 f d\sigma^1 \wedge d\sigma^2 \leq 0$$

Exchanging the role of  $M, \tilde{M}$  we see that this quantity is equal to zero, but this can only happen, if  $f(q) \equiv 0$ , since  $p_3 > 0$  by assumption. Moreover by the expression for  $f$  we get, that  $c_0 = \frac{1}{c_0} = 1$  must occur at every point, thus  $B = \bar{B}$ , and thus  $\omega_i^3 = \bar{\omega}_i^3$  everywhere.

Earlier we had a criterium for isometries, applying that we get an isometry  $\Phi$ , extending  $h$ . □

## 8 Eight lecture

### 8.1 Minimal surfaces

- by definition a surface, for which  $H = 0$ , where  $H = \frac{1}{2} \text{tr}(A_p) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ , half of the trace of the weingarten map<sup>1</sup>.
- physical interpretation, soap film on a wire frame.

There are various interpretations of minimality, the first one is the classical picture with forces. Take a plane in the direction of one principal curvature at a point, if the surface is made of some material, there is a force by the stress of the material bending, in the direction of the maximal tangent circle in the plane, the minimality condition states that the forces coming from the two principal curvature directions should cancel. In another interpretation, this can be understood, as coming from a variational principle.

- maintaining the surface requires energy, tearing it requires even more, but infinitesimal variations w.r.t. a boundary condition are ok, by the principle of least action (or something idk lol) the surface tries to minimize its area.

**Definition 8.1.** A smooth variation of a regular hypersurface  $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  is a smooth map  $R : \Omega \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  such that for all  $t \in (-\delta, \delta)$  the section  $r_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  is a regular hypersurface and  $r_0 = r$ .

A variation is compactly supported on  $K \subset \Omega$ , if  $r_t = r(u)$  for  $u \notin K$  and for all  $t$ .

The infinitesimal variation of  $R$  is the vector field  $X = \partial_t R(\cdot, 0)$ .

**Theorem 8.2** (First variation of surface volume). *Suppose  $R$  is a variation of  $r$ , with infinitesimal variation  $X$ , all supported on  $K \subset \Omega$ , a compact subset of the surface. Let  $H$  be the Minkowski curvature of  $r$ ,  $\mathcal{G}$  the matrix of the first fundamental form of  $r$ , with the standard basis  $r_1, \dots, r_{n-1}$ . Then the following holds for the derivative of the surface volume  $V_{n-1}(t)$ :*

$$V'_{n-1}(0) = -(n-1) \int_K \langle X, N \rangle H \sqrt{\det \mathcal{G}} d\lambda_{n-1}.$$

*Proof.*  $V_{n-1}(t) = \int \sqrt{\det \mathcal{G}_t} d\lambda_{n-1}$ , we can rewrite the formulas, the Gram matrix and the basis to depend on  $t$  in the obvious way to get this. we can extend the scalar product of vectors to forms by linearity, to get

$$\begin{aligned} & \langle a_1, b_1 \rangle \quad \dots \quad \langle a_1, b_k \rangle \\ \langle a_1 \wedge \dots \wedge a_k, b_1 \wedge \dots \wedge b_k \rangle &= \det \begin{matrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix} \\ & \langle a_k, b_1 \rangle \quad \dots \quad \langle a_k, b_k \rangle \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>in  $n$  dimensions the twos are replaced by  $n-1$ s

This also gives a positive definite scalar product on  $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ . Now the derivative of the volume form looks like:

$$V'_{n-1}(0) = \int_K \frac{d}{dt} \sqrt{\det \mathcal{G}}|_{t=0} d\lambda_{n-1} = \int_K \frac{d}{dt} \|r_{t,1} \wedge \dots \wedge r_{t,n-1}\|_{t=0} d\lambda_{n-1}.$$

The integrand can be calculated as

$$\frac{\langle \frac{d}{dt} (r_{t,1} \wedge \dots \wedge r_{t,n-1})|_{t=0}, r_1 \wedge \dots \wedge r_{n-1} \rangle}{\|r_1 \wedge \dots \wedge r_{n-1}\|} = \frac{\langle \sum_1^{n-1} r_1 \wedge \dots \wedge r_{i-1} \partial_i \partial_i R(\cdot, 0) \wedge \dots \wedge r_{n-1}, r_1 \wedge \dots \wedge r_{n-1} \rangle}{\|r_1 \wedge \dots \wedge r_{n-1}\|},$$

also  $\partial_t \partial_i R(\cdot, 0)$  will be denoted by  $X_i$ , since the partial derivatives can be interchanged, so we need to differentiate the infinitesimal variation in the  $i$ th direction.

$X$  decomposes orthogonally as  $X^T + X^\perp$ , the second term is easily seen to be  $\langle X, N \rangle N$ .

$$\int_K \frac{\langle \sum_i r_1 \wedge \dots \wedge (X^T)_i \wedge \dots \wedge r_{n-1}, r_1 \wedge \dots \wedge r_{n-1} \rangle}{\|r_1 \wedge \dots \wedge r_{n-1}\|} d\lambda_{n-1} = 0$$

since tangential flow doesn't change the volume, indeed the vector field  $X^T$  can be integrated into an isotopy (compactly supported on  $K$ ) of the surface, thus it does not change the volume as claimed. So we only have to consider the perpendicular components,

$$V'_{n-1}(0) = \int_K \frac{\langle \sum_i r_1 \wedge \dots \wedge (X^\perp)_i \wedge \dots \wedge r_{n-1}, r_1 \wedge \dots \wedge r_{n-1} \rangle}{\|r_1 \wedge \dots \wedge r_{n-1}\|} d\lambda_{n-1}.$$

Rerwiting the perpendicular component, and using the product rule  $(X^\perp)_i = \partial_i \langle X, N \rangle N + \langle X, N \rangle N_i$  and  $N_i = -L(r_i) = -\sum l_i^j r_j$ . Thus  $\sum r_1 \wedge \dots \wedge N_i \wedge \dots \wedge r_{n-1} = -\sum l_i^j r_1 \wedge \dots \wedge r_{n-1}$ , since all other terms zero out.

Now

$$\begin{aligned} V'_{n-1}(0) &= \int -(n-1)H \langle r_1 \wedge \dots \wedge r_{n-1}, r_1 \wedge \dots \wedge r_{n-1} \rangle / \|r_1 \wedge \dots \wedge r_{n-1}\| d\lambda_{n-1} = -(n-1) \int \langle X, N \rangle H \| \bigwedge r_i \| d\lambda_{n-1} = \\ &= -(n-1) \int \langle X, N \rangle H \sqrt{\det \mathcal{G}} d\lambda_{n-1}. \end{aligned}$$

□

## 9 Ninth lecture

**Corrolary 9.1.** *Assume  $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  is a regular parametrised hypersurface. If it minimises the surface volume for compactly supported deformations, then  $H \equiv 0$ .*

*Proof.* If not, at  $r(p)$   $H(p) > 0$  for example, then it is so locally as well, and we can decrease the surface volume by moving a little bit into the normal direction with a vector field supported on a small compact neighbourhood of  $r(p)$ , and we see, that the surface volume decreases. □

This motivates the naming of minimal surfaces.

### 9.1 Surfaces of constant negative curvature

We have seen an example of these guys already, namely the pseudosphere, the surface of revolution generated by the tractrix.



We review some fundamentals of surface theory.  $\partial_j r_i = r_{i,j} = \sum \Gamma_{ij}^k r_k + \alpha_{ij} N$ ,  $\partial_j N = N_j = \sum \beta_j^k r_k + \gamma_j N$ , also  $\mathcal{G} = [g_{ij}] = [\langle r_i, r_j \rangle]$ , the inverse is denoted  $g^{ij}$ .  $\alpha_{i,j} = b_{i,j}$ ,  $\beta_j^k = -l_j^k = -\sum g^{ki} b_{ij}$ , also we have the Teorema egregium

$$\Gamma_{ij}^k = \sum \frac{1}{2} (\partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij}) g^{lk}$$

and the local expression for the curvature tensor.

$$\partial_k \Gamma_{ij}^l - \partial_l \Gamma_{ik}^j + \sum (\Gamma_{ij}^s \Gamma_{sk}^l - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{sj}^l) = \sum (b_{ij} b_{ks} - b_{ik} b_{js}) g^{sk}$$

We get  $(n-1)^4$  equations, attributed to Gauss.

$$\partial_k b_{ij} - \partial_j b_{ik} = \sum \Gamma_{ik}^l b_{lj} - \Gamma_{ij}^l b_{lk}$$

Also  $(n-1)^3$  equations, the Mariadi-Codazzi equation.

**Theorem 9.2** (Fundamental theorem of hypersurfaces). *For local realizability of  $g_{ij}, b_{ij}$  these equations are necessary and sufficient.*

Multiplying by the metric, we can turn the curvature tensor into a 0,4 tensor, with components

$$\sum_l R_{kji}^l g_{lm} = b_{ij} b_{km} - b_{jk} b_{jm}.$$

For surfaces in  $\mathbb{R}^3$ ,  $n-1=2$ , in that special case  $K = \frac{\det B}{\det \mathcal{G}} = \frac{R_{1221}}{\det \mathcal{G}}$  Homework to look up the formula of Brioschi.

We restrict ourselves to the  $n=3$  case, and suppose  $K < 0$ , i.e.  $II$  being indefinite. So the tangent space of every points splits in two, to vectors of positive and negative square by the second fundamental form. We get two  $\mathbb{R}^1$ -s in which the 0 vectors live, and can pick a vector field out of these subspaces.

The integral submanifolds of the subspace distribution we get in this way are called asymptotic lines. These asymptotic lines can be used to produce a coordinate system on the surface. For this all, we only needed the

Gaussian curvature to be negative, not constant. In this coordinate system  $B = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$ .

From now on, we suppose that  $\Omega$  is parametrised by  $u, v$ , and assume also, that  $K \equiv -1$ . Take asymptotical coordinates, and let  $B = \begin{pmatrix} 0 & C \\ C & 0 \end{pmatrix}$   $A = \|r_u\|$ ,  $B = \|r_v\|$ , and let  $\omega(u, v) = \angle(r_u(u, v), r_v(u, v))$ . Now  $\mathcal{G} =$

$$\begin{pmatrix} A^2 & AB \cos \omega \\ AB \cos \omega & B^2 \end{pmatrix} \text{ and we can calculate}$$

$$K = \frac{-C^2}{A^2 B^2 \sin^2 \omega}; \text{ where } C = \pm AB \sin \omega.$$

We can reverse orientation if necessary, and can take  $C = AB \sin \omega$ . Thus  $B = \begin{pmatrix} 0 & AB \sin \omega \\ AB \sin \omega & 0 \end{pmatrix}$ , computing

the inverse of the metric tensor gives  $\frac{1}{AB \sin^2 \omega} \begin{pmatrix} B/A & -\cos \omega \\ -\cos \omega & A/B \end{pmatrix}$

**Theorem 9.3.** *If a regular parametrised surface of negative curvature and the coordinates are asymptotic, and  $b_{uv} > 0$ , then the Mainardi-Codazzi equations reduce to*

$$-\partial_u(\log b_{uv}) = \Gamma_{vu}^v - \Gamma_{uu}^u, \quad -\partial_v(\log b_{uv}) = \Gamma_{vv}^v - \Gamma_{vu}^u$$

## 10 Tizedik előadás

*Proof.* Egyszerű számolás, behelyettesítünk.

$$b_{ij,k} - b_{ik,j} = \sum_1^2 \Gamma_{ik}^l b_{lj} - \Gamma_{ij}^l b_{lk}$$

a Mainardi-Codazzi egyenlet alakja az esetünkben, a kifejezés  $j, k$ -ban antiszimmetrikus, ezért az  $(i, j, k) = (1, 1, 2), (2, 1, 2) \dots$ ?

$$b_{uu,v} - b_{uv,u} = \Gamma_{uv}^u b_{uu} - \Gamma_{uu}^u b_{uv} + (\Gamma_{uv}^v b_{vu} - \Gamma_{uu}^v b_{vv})$$

$$b_{vu,v} - b_{vv,u} = \Gamma_{vu}^u b_{uu} - \Gamma_{vu}^u b_{uv} + (\Gamma_{vv}^v b_{vu} - \Gamma_{vu}^v b_{vv})$$

adiagonalitás miatt  $b_{uu} = b_{vv} = 0$ , ebből

$$-b_{uv,u} = -\Gamma_{uu}^u b_{uv} + \Gamma_{uv}^v b_{vu}$$

$$b_{vu,v} = -\Gamma_{vu}^u b_{uv} + \Gamma_{vv}^v b_{vu}$$

Átosztva a megfelelő tagokkal kapjuk az állítást. □

Mire használjuk ezt?

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} A^2 & AB \cos \omega \\ AB \cos \omega & B^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & AB \sin \omega \\ AB \sin \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & B/A & -\cos \omega \\ AB \sin^2 \omega & -\cos \omega & A/B \end{pmatrix}$$

**Theorem 10.1.** *Itt a M-C egyenletek ekvivalensek azzal, hogy  $\partial_v A = \partial_u B = 0$ .*

*Proof.* Alkalmazzuk az előző tételt.

$$\begin{aligned} \Gamma_{uv}^v - \Gamma_{uu}^u &= \Gamma_{uvu} g^{uv} + \Gamma_{uvv} g^{vv} - \Gamma_{uuu} g^{uu} - \Gamma_{uuv} g^{vu} \\ &= \frac{1}{2} g_{uu,v} g^{uv} + \frac{1}{2} g_{vv,u} g^{vv} - \frac{1}{2} g_{uu,u} g^{uu} - g_{uv,u} g^{vu} + \frac{1}{2} g_{uu,v} g^{vu} \end{aligned}$$

Az első három tag megfelel az első három tagnak ha kiradjuk a definíciót, az utolsóból pedig a végső kettőt.

$$= g_{uu,v} g^{uv} + \frac{1}{2} g_{vv,u} g^{vv} - \frac{1}{2} g_{uu,u} g^{uu} - g_{uv,u} g^{vu}$$

Egyszerű deriválással és a definíció alkalmazásával adódik

$$= \frac{\partial_u B - 2\partial_v A \cos \omega}{B \sin^2 \omega} - \frac{\partial_u A}{A \sin^2 \omega} + \partial_u (\log(AB \cos \omega)) \operatorname{ctg}^2 \omega$$

Teljesen hasonló számolás a másik egyenlet

$$-\partial_u (\log b_{uv}) = \frac{-\partial_u A}{A} - \frac{\partial_u B}{B} - \operatorname{ctg} \omega \partial_u \omega$$

Az MC egyenlet szerint ennek a két függvénynek meg kell egyeznie, vagyis

$$0 = \frac{2\partial_u B - 2\partial_v A \cos \omega}{B \sin^2 \omega}$$

Ebből kapjuk amit akartunk

$$\partial_u B = \partial_v A \cos \omega$$

és a másik egyenletből

$$\partial_v A = \partial_u B \cos \omega$$

Ergo a parciális deriváltakból álló vektor önmaga skalárszorosa (vagy elforgatottja??), vagyis

$$\partial_u B = \partial_v A = 0$$

□

**Definition 10.2.**  $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  paraméterezett felületen Csebisev hálónak nevezzük a következőt: paramétervonalak menti téglalapok képeinek szemközti oldalai egyforma hosszúak.

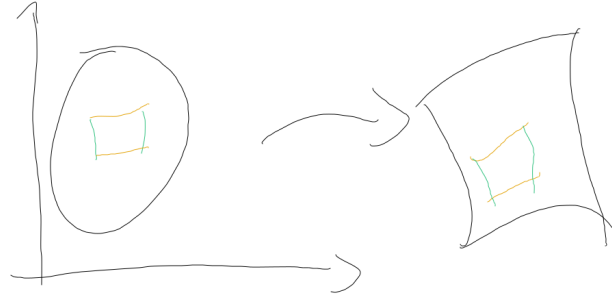


Figure 9: Ábra a paramétertérben egy téglalappal, és a képével, a feltétel az, hogy a képben is egyforma hosszúak a téglalap szemközti oldalai

**Theorem 10.3.** Csebisev háló infinitezimálisan pontosan akkor létezik, ha  $\partial_v \|r_u\| = \partial_u \|r_v\| \equiv 0$ .

*Proof.* Formalizáljuk a definíciót, pontosan akkor Csebisev háló egy \*valami\*, hogyha minden téglalpra a paramétertérben  $[u_0, u_1] \times [v_0, v_1]$ -re

$$\int_{u_0}^{u_1} \|r_u\|(u, v_0) du = \int_{u_0}^{u_1} \|r_u\|(u, v_1) du, \quad \& \quad \int_{v_0}^{v_1} \|r_v\|(u_0, v) dv = \int_{v_0}^{v_1} \|r_v\|(u_1, v) dv$$

Egy kvantort kidobva azt látjuk, hogy  $I(v) = \int_{u_0}^{u_1} \|r_u\|(u, v) du$  nem függ  $v$ -től, vagyis a deriváltja nulla:

$$I'(v) = \int_{u_0}^{u_1} \partial_v \|r_u\|(u, v) du.$$

Ebből látjuk, hogy az integrandus azonosan nulla.

□

**Corrolary 10.4.**  $A, B$ -vel leírt felület paramétervonalai egy Csebisev hálót alkotnak.

**Corrolary 10.5.** Lokálisan ha veszünk két paramétervonalat, mindegyiket ívhossz szerint paraméterezzük, akkor a Csebisev tulajdonság miatt minden paramétervonal ívhossz szerint lesz paraméterezve.<sup>1</sup>

A felületünkre vonatkozóan  $\mathcal{G}$ -t megszemlélve látjuk, hogy  $A = B \equiv 1$  feltehető (egy átparaméterezés után az aszimptotikus paramétervonalakat). Ezzel minden szebb és jobb, konkrétan a metrika, és a második alapforma mátrixa egyszerűbb alakot ölt. Kifejezhetjük a Christoffel szimbólumokat így a metrikus tenzorból való kifejezéseiket felhasználva.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Lépcsőzetesen járhatunk a tulajdonságot kihasználva

<sup>2</sup> $\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k})$

$\Gamma_{uuu} = 0$ ,  $\Gamma_{uuv} = -\sin \omega \cdot \omega_u$ ,  $\Gamma_{uvu} = 0$ ,  $\Gamma_{uvv} = 0$ ,  $\Gamma_{vvu} = -\sin \omega \cdot \omega_v$ ,  $\Gamma_{vvv} = 0$  Kifejezhetjük a rendeseket is a másik alakjukat is ebből.

$$\Gamma_{uu}^u = \text{ctg} \omega \cdot \omega_u, \Gamma_{uu}^v = -\frac{\omega_u}{\sin \omega}, \Gamma_{uv}^u = \Gamma_{uv}^v = 0, \Gamma_{vv}^u = -\frac{\omega_v}{\sin \omega}, \Gamma_{vv}^v = \text{ctg} \omega \cdot \omega_v$$

Még a Gauss egyenleteket kell tisztáznunk.

$$-\sin^2 \omega = \det B = R_{uvvu} = +{}^u_{uvv}g_{uu} + R_{uvv}^v g_{vu} = R_{uvv}^u + R_{uvv}^v \cos \omega$$

ahol

$$R_{uvv}^u = \Gamma_{vv,u}^u - \Gamma_{vu,v}^u + \sum_{s \in \{u,v\}} \Gamma_{vv}^s \Gamma_{su}^u - \Gamma_{vu}^s \Gamma_{sv}^u = \Gamma_{vv,u}^u + \Gamma_{vv}^u \Gamma_{uu}^u = \frac{\cos \omega \cdot \omega_u \cdot \omega_v}{\sin^2 \omega} + \omega_{uv} \text{ctg} \omega + \frac{\omega_u \cdot \omega_v}{\sin^2 \omega} = \omega_{uv} \text{ctg} \omega$$

Mindezt behelyettesítve a Gauss egyenletbe

$$-\sin^2 \omega = \omega_{uv} \frac{\cos^2 \omega - 1}{\sin \omega} = -\omega_{uv} \sin \omega$$

Tehát

$$\omega_{uv} = \sin \omega$$

**Theorem 10.6.** *Egy konstans  $-1$  görbületű felület paraméterezhető lokálisan az aszimptotikus vonalakkal ívhossz szerint. Ilyenkor a paramétervonalak szöge  $\omega : \Omega \rightarrow (0, \pi)$  teljesül a sine-Gordon egyenlet.*

*Fordítva, ha  $\Omega$  konvex (egysz. öf.) és  $\omega : \Omega \rightarrow (0, \pi)$  megoldja a sine-Gordont, akkor létezik regulárisan paraméterezett felület úgy, hogy a főmennyiségei azok amiket felírtunk ezzel az  $\omega$  függvénnyel, speciálisan konstans  $-1$  a görbület és ívhossz szerint van paraméterezve.*

**Theorem 10.7** (Hazzidakis formula). *Legyen a felületünk, mint eddig, egy téglalap  $T = [u_0, u_1] \times [v_0, v_1] \subset \Omega$ , akkor  $r|_T$  felülete  $= \omega(u_1, v_1) - \omega(u_0, v_1) - \omega(u_1, v_0) + \omega(u_0, v_0)$ .*

*Proof.* A felszín integrálással kapható meg, ezt írjuk ki.

$$A = \int \int \sqrt{\det \mathcal{G}} dudv = \int \int \sin \omega dudv = \int \int \omega_{uv} dudv = \dots$$

A sine-Gordon egyenlet miatt, ezzel készen vagyunk. □

## 11 Tizenegyedik előadás

Standard felállítás  $-1$  állandó görbületű felületekhez, Riemann metrika, második alapforma, metrika inverze, paraméterezve az  $\omega$  aszimptotikus vonalak szögével, ami tudja a sine-Gordont.

A Hazzidakis formula egyszerű alkalmazása az alábbi.

**Corrolary 11.1.**  $[u_0, u_1] \times [v_0, v_1] \subset \Omega$ , akkor  $2\pi > \omega(u_1, v_1) - \omega(u_0, v_1) - \omega(u_1, v_0) + \omega(u_0, v_0) > 0$ .

**Definition 11.2.**  $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  reglárís paraméterezés,  $u_0 \in \Omega$ ,  $R > 0$  esetén  $B(u_0, R)$  legyen azon  $v \in \Omega$  paraméterpontok halmaza, hogy  $\exists u : [0, 1] \rightarrow \Omega$ , amire  $u(0) = u_0$ ,  $u(1) = v$  és  $r \circ u$  ívhossza  $< R$ .  $r$  teljes, hogyha minden  $u_0 \in \Omega$ -ra és  $R > 0$ -ra  $\overline{B(u_0, R)} \subset \Omega$ .

**Theorem 11.3** (Hilbert). *Nincs teljes reguláris felület konstans negatív görbülettel  $\mathbb{R}^3$ -ban.*

*Proof.* Felskálázással elérhetjük, hogy a konstans negatív görbület  $-1$  legyen. Ha  $p \in r(\Omega)$ , akkor minden aszimptotikus görbe a teljes számegyenesre kiterjed. Legyen  $\gamma_p : \mathbb{R} \rightarrow r(\Omega)$  egy egységparaméterezésű aszimptotikus vonal. Legyen továbbá  $\eta_{\gamma_p(t)} : \mathbb{R} \rightarrow r(\Omega)$  egy másik aszimptotikus vonal  $\gamma_p(t)$ -ből indítva, és legyen  $\gamma_p'(t) \times \eta_{\gamma_p(t)}'(0)$  legyen egyirányú a pontbeli pozitív normálvektorral. Ebből kapjuk az  $\tilde{r} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  paraméterezett felületet,  $(u, v) \mapsto \eta_{\gamma_p(u)}(v)$ . Ez nem feltétlenül injektív, és nem is feltétlenül átparaméterezés.

**Lemma 11.4.** *A sine-Gordon egyenletnek nincs megoldása  $[0, 1] \times \mathbb{R}$ -en, ami csak  $(0, \pi)$ -n vesz fel értékeket.*

*Proof.* Tegyük fel, hogy létezik, esetszétválasztunk. (I)  $\omega(1, 0) > \omega(0, 0)$

Legyen  $3c = \omega(1, 0) - \omega(0, 0)$ , és  $\hat{u}_1 = \max\{s \in [0, 1] : \omega(s, 0) - \omega(0, 0) = c\}$  és  $\hat{u}_2 = \min\{s \in [0, 1] : \omega(1, 0) - \omega(s, 0) = c\}$ . Ezek azt mérik, hogy mikor hagyjuk el utoljára a  $c$  szintet, és mikor lépünk először a  $2c$  szint fölé.  $c + \omega(0, 0) \leq \omega(tp) \leq \omega(1, 0) - c$  ha  $t \in [\hat{u}_1, \hat{u}_2]$ .

Tetszőleges  $v$ -re  $\omega(t, v) > \omega(t, 0) + \omega(0, v) - \omega(0, 0) > c$ , illetve  $\omega(t, v) < \omega(1, v) + \omega(t, 0) - \omega(1, 0) \leq \omega(1, v) - c < \pi - c$ . Ezért  $\sin(\omega(t, v)) \geq \sin(c)$  teljesül  $(t, v) \in [\hat{u}_1, \hat{u}_2] \times [0, \infty)$  esetén. Integrálva

$$\int_0^v \int \sin(\omega(u, v)) du dv \geq v(\hat{u}_2 - \hat{u}_1) \sin(c).$$

A szorzat utolsó két tagja pozitív,  $v$ -t kellő nagynak választva az egész kifejezés értéke  $> 2\pi$  teljesülhet, ellentmondásban a hazzidakis formulával.

(II)  $\omega(0, 0) > \omega(1, 0)$

Ekkor elegendő  $\tilde{\omega} := \omega(1 - u, 1 - v)$ -t tekinteni, erre (I) teljesül.

(III)  $\omega(0, 0) = \omega(1, 0)$

Ekkor legyen  $\tilde{\omega} := \omega(u, v + 1)$ . Ez egy lineáris, irányítástartó átparaméterezés, erre is teljesül az egyenlet, de

$$\tilde{\omega}(1, 0) - \tilde{\omega}(0, 0) = \omega(1, 1) - \omega(0, 1) > \omega(1, 0) - \omega(0, 0) = 0.$$

□

A fenti paraméterezés ellentmond a lemmának, adna egy megoldást ezen a tartományon, készen vagyunk. □

Igazából a paramétertartományban dolgoztunk, nincs  $C^2$  immerziója sem konstans negatív görbületű felületnek, sőt el sem lehet határolni a nullától, meg lehet azonban csinálni  $C^1$ -el, Kuiper, és Nash.

## 11.1 Bäcklund transzformáció

Szeretnénk a pszeudoszféra mellé még lokálisan hiperbolikus felületeket látni.

**Definition 11.5.**  $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  regulárisan paraméterezett  $-1$  Gauss görbületű felület, ekkor  $\tilde{r} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  egy Bäcklund transzformálta  $r$ -nek  $\sigma$  paraméterrel, ha

1.  $|\tilde{r}(u, v) - r(u, v)| \equiv \cos \omega$
2.  $\tilde{r} - r$  érintő  $r$ -hez az adott paraméterpontban, és  $\tilde{r}$ -hez is ugyanazon paramétereknél
3.  $\angle(\tilde{N}, N) = \frac{\pi}{2} \pm \sigma$ , ha  $\sigma = 0$ , akkor Bianchi transzformáltról beszélünk

Tegyük fel, hogy  $r$  aszimptotikus vonalak mentén van paraméterezve, és  $\hat{r}(u, v) = r(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2})$ , a görbületű vonalak mentén való paraméterezés.

**Theorem 11.6.** *Ha van  $(u_0, v_0)$  és  $\sigma \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  és  $v$  egy vektor  $\cos \sigma$  hosszal és érintő  $\hat{r}$ -hez  $(u_0, v_0)$ -ban, akkor létezik egy Bäcklund transzformált  $\tilde{r}$   $(u_0, v_0)$  környezetében úgy, hogy  $\tilde{r}(u_0, v_u) = \hat{r}(u_0, v_0) + v$ .<sup>1</sup>*

*Proof.* Le van írva tisztességesen Csikós Tanár Úr jegyzetében. Vegyük figyelembe, hogy felhasználja a Frobenius tétel klasszikus formáját. Megnézni! □

**Theorem 11.7.** *Legyen  $\tilde{r}$  egy  $\sigma$  paraméterű Bäcklund transzformáltja  $\hat{r}$ -nek.*

- $\tilde{r}$  reguláris  $(u, v)$ -ben pontosan akkor, hogyha  $\tilde{r} - \hat{r}$  nem főgörbületi iránya  $\hat{r}$ -nek
- $\tilde{r}$  konstans  $-1$  görbületű
- $\tilde{r}$  paramétervonalai a Bäcklund transzformáció görbületi vonalai
- A Bäcklund transzformáció görbületi vonalat görbületi vonalba, aszimptotikus görbéket aszimptotikus görbébe visz

---

<sup>1</sup>itt valahogy figyelembe van véve  $\text{sgn}\sigma$  a normálvektorok szögénél.