Homologikus algebra

BMETE91MM06

Előadó: Lukács Erzsébet

2023/2024/1

www.math.bme.hu/ lukacs oldalon lesz majd a weblapja a kurzusnak. Ajánlott irodalom: Rotman: An introduction to homological algebra, és Weibel-től ugyanezen címmel.
Osztályzat: házi feladatok, soronként kettő, hetente egy sor nagyjából 10-10 pont, kb 180 és ennek a 0.3 szorosa, és egy zh az utolsó héten. 30 pont elmélet és ugyanennyi gyakorlat. Ponthatárok 50 60 70 80.

1 Első előadás

1.1 Moduluselméleti alapok

Reprezentációelméleti jegyzet: www.math.bme.hu/ mandras/gycs-1.pdf jegyzetben található még segítség ehhez.
Gyűrű mindig egységelemes, nem feltétlenül kommutatívak, homomorfizmusok unitálisak. A test feletti k-algebrát is mindig egységelemesnek tesszük föl, a mi eseteinkben véges dimenziósak.

Definíció 1.1. *A egy k-algebra, ha egyszerre vektortér k felett, és gyűrű, továbbá $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda(b))$ teljesül $\lambda \in k$ és $a, b \in A$. $\dim A$ alatt a dimenzióját értjük mint vektortér.*

Példa 1.2. Példák k-algebbrákra:
Mátrixgyűrű $k^{m\times n}$ ilyen például.
$k[x_1, \ldots, x_n]$ polinomgyűrűk is persze k-algebrák, ezek kommutatívak is, de ezek dimenziója nem véges.
G véges csoporthoz rendeljük a kG csoportalgebrát, ez szintén egy véges dimenziós k-algebra. Bázisa a G, összeadás komponensenként, szorzást pedig kiterjesztjük disztributívan.

Egy k-algebra megadása: egy vektortér $b_1, \ldots, b_n$ bázissal, és elegendő a báziselemeken megadni a szorzást. $b_i b_j = \sum \alpha_{ijk} b_k$ és innen a szorzatot disztributívan kiterjeszthetjük. Ehhez kell, hogy $(b_i b_j)b_k = (b_i(b_j b_k))$, ami persze a mi esetünkben teljesül.
Mivel $1 \in A$ ezért van egy természetes kópiája k-nak A-ban, $\{\lambda \cdot 1\}$-ként, sőt ez a résztest centrális. Úgy tekintjük, hogy $k \leq A$. Fordítva, hogyha $\exists k \leq Z(R)$ valami R gyűrűre, akkor R természetes módon k-algebrává válik, az axiómák következnek a gyűrűaxiómákból.

Példa 1.3. Kérdés: $\mathbb{H}$ mint ferdetest izomorf $\mathbb{R}Q$-val? ahol Q a kvaterniócsoport? Nem! a Kvaternióknak 4 elemű bázisa van, a kvaterniócsoport csoportalgebrájánakpedig 8! Előbbi esetben $i^2 = -1 \cdot 1$, a másik esetben $i^2 = " - 1 =\neq -1 \cdot "1"$.

Van olyan csoportalgebra $G = 1$ esetén kívül ami ferdetest? Találunk valódi ideált, tehát nem. Ilyen pl. a $\{\sum \lambda_g g : \sum \lambda_g = 0\}$ ez látványosan egy ideál, összeadásra zárt, báziselemmel szorzásnál kívülről csak megpermutálódnak az elemek, skalárszorzásra úgyszintén, tehát nem lehet ferdetest.
$u = \sum g$ a kedvenc elemünk. $uh = h$ minden $h \in G$-re, tehát az ezen elem által generált ideál pontosan a a skalárszorosaiból áll, ez az elem centrális is.

Definíció 1.4. $M = M_R$ főleg jobbmodulust hsználunk az R gyűrű felett. Ez azt jelenti, hogy M egy Abel-csoport és $m, n \in M, r, s \in R$-hez létezik $mr \in M$, a vektortereknél megszokott tulajdonságokkal: $(m+n)r = mr + nr$, $m(r+s) = mr + ms$, $m(rs) = (mr)s$, $m1 = m$.

Másképp: adott egy gyűrűhomomorfizmus $\phi : R \to End(M)$ egységelemtartó gyűrűmorfizmus.* Az előző nyelvre lefordítva $\phi : r \mapsto \cdot r$. Az első azonosság miatt lesz homomorfizmus az r-el való jobbszorzás, a $2, 3, 4$ pedig azt mondja hogy ϕ egy gyűrűhomomorfizmus. Visszafelé is persze, ez egy ekvivalens leírás.
Vegyük észre, hogy algebra fölötti modulus vektortés is, mivel $k \leq A$. Ekkor $\phi : A \to End_k(M)$ egy vektortérhomomorfizmus is.

Definíció 1.5. Balmodulus $_RM$ olyan mint a jobb, csak balról szorzunk.

Példa 1.6. Modulusok:
Abel csoportok pontosan a $\mathbb{Z}$ modulusok. $x \in M$-hez xm-et definiálhatjuk $\sum_1^m x$-ként.
Vektorterek pedig a k-modulusok.

Definíció 1.7. M_R egy modulus, $U \subseteq M$ nemüres részhalmaz részmodulus ha zárt a műveletekre. Jele $U \leq M$.
Definiáljuk az X által generált részmodulust $XR = \{\sum x_i r_i\}$ véges összegek, ez megegyezik továbbá $\bigcap_{X \subset U \leq R} U$-val. Tehát ez a legkisebb X-et tartalmazó részmodulus.

M végesen generált modulus, ha létezik egy véges X amire $XR = M$. M ciklikus, ha egy elem generálja. Egyszerű modulus M ha nem nulla, és ha $U \leq M$, akkor $U = 0$ vagy $U = M$.†
$Mod - R$ jelöli a jobb R-modulusok kategóriáját, $mod - R$ pedig a végesen generált jobb R-modulusok részkategóriáját jelöli, hasonlóan $R - Mod$ és $R - mod$ a bal verziókat, *Ab* pedig az Abel csoportok kategóriáját jelöli.

Definíció 1.8. $M, N \in Mod - R$ akkor $\phi M \to N$ egy modulusmorfizmus, ha művelettartó (obv.) az összeadásra és a skalárszorzásra.
Izomorfizmus hogyha bijektív homomorfizmus, a művelettartás automatikus az inverzre nézve. $M \cong N$ ha létezik köztük izomorfizmus.
$ker\phi$ és $im\phi$ definiálható analóg módon, nyilván ϕ injektív pontosan akkor ha a magja nulla, szürjektív pontosan akkor ha a kép az egész.

Definíció 1.9. Faktormodulust is képezhetünk. $U \leq M$, akkor $M/U = \{m + U\}$ mint faktor Abel csoport, és a modulusstruktúra megmarad U skalárszorzásra zártsága miatt.

Példa 1.10. R_R reguláris modulus, ciklikus persze, az 1 generálja. Minden ciklikus modulus ennek homomorf képe! Ha $M = mR$, akkor az $1 \mapsto m$ leképezés, és kiterjesztése $r \mapsto mr$ egy jóldefiniált szürjektív leképezés.

*ez az R egy reprezentációja
†ergo nincs valódi részmodulusa

Tétel 1.11 (homomorfizmus tétel)**.** *$\phi : M \to N$ akkor $M/ker\phi \cong im\phi$.*

Az előző példában $im\phi = M = R_R/ker\phi$. Ez a mag pont az m annullátora.

Példa 1.12. Ha S egyszerű modulus, akkor ciklikus, tehát faktora R_R-nek, és $ker\phi$ egy maximális részmodulusa R_R-nek.

Jelölés: $Hom(M_R, N_R) = Hom_R(M, N)$ az összes homomorfizmusok halmaza, sőt ez egy Abel csoport. Ha R egy k-algebra, akkor $m(\lambda\phi) = \lambda(m\phi)$-ként kapunk egy vektorteret a $Hom(M, N)$-en.

Definíció 1.13. Részmodulusok összege. $U_i \leq M$ valami I indexhalmazra, akkor $\sum U_i = \{\sum u_i\}$ álljon azon összegekből ahol csak véges sok $u_i \neq 0$. Ez ugyanaz mint az összes részmodulus metszete, amik tartalmazzák az összes U_i-t.
Részmodulusok direkt összege (belső direkt összeg). $U_i \leq M$, $M = \bigoplus U_i$, hogyha $M \sum U_i$ és $U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = 0$.
Modulusok direkt szorzata. $M_i \in Mod - R$ akkor $\prod_I M_i = \bigtimes_I M_i$, műveletek komponensenként.
Modulusok direkt összege. $M_i \in Mod - R$-re $\bigoplus M_i \leq \prod M_i$, ahol minden elemben csak véges sok komponens nem nulla. Ez persze ugyanaz mint az összeg tagjainak, mint részmodulusoknak a belső direkt összege.
Szabad modulusok. $F = F(X) \in Mod - R$ az X részhalmaza által generált szabad modulus, ha $\forall \phi : X \to M$ tetszőleges M_R-be menő leképezéshez létezik $\exists! \bar{\phi} : F \to M$ modulusmorfizmus, ami kiterjesztése ϕ-nek.

Példa 1.14. R_R-et szabadon generálja az 1 a korábbi gondolatmenet szerint.

Állítás 1.15. *$|X| = |Y|$ akkor $F(X) = F(Y)$.*

Proof. Veszünk egy $\phi : X \to Y$ bijekciót, és ennek a ψ inverzét. Ezek indukálnak $\bar{\phi}$ és $\bar{\psi}$ leképezéseket $X \leftrightarrow Y$. Ekkor $\bar{\phi}\bar{\psi}$ az identitás lesz az X-en persze, hiszen kiterjesztés. Az egyértelműség miatt tehát ez a leképezés identikus az egész $F(X)$-en, és szimmetrikusan fordítva is, tehát valóban izomorfizmusok. □

Szabad modulus konstrukciója egyszerűen $\bigoplus_X R_R$. Erre a modulusra nyilvánvalóan teljesül a szabad modulusoktól megkövetelt tulajdonság, az egyértelműségi tétel miatt készen is vagyunk.

Példa 1.16. Minden vektortér szabad modulus, tetszőleges bázisa szabadon generálja.
Abel csoportokra $\bigoplus \mathbb{Z}$ valami indexhalmazra.

2 Második előadás

2.1 bimodulus

$M, N \in Mod - R$ akkor $Hom_R(M, N)$ Abel csoport, ha k-algebránk van, akkor vektortér. Szeretnénk modulussá tenni, adni egy R hatást. Szeretnénk egy ϕ leképezésre az ϕr-t definiálni, ez hasson úgy, hogy $m(\phi r) = (m\phi)r$. Összeadásra jól viselkedik persze, de $(mr')\phi r = (mr')\phi r = (m\phi)(r'r)$, fordítva $m(\phi r)r' = (m\phi)rr'$, tehát ez csak kommutatív elemekre működik. Ezt extra struktúrával hárítjuk el.

Definíció 2.1. R, S gyűrűk, és $M \in R_Mod \cap Mod - S$ elemet ${}_RM_S$-nek jelöljük és R, S bimodulusnak nevezzük, ha az R és S hatások felcserélhetőek, vagyis $(rm)s = r(ms)$.

Példa 2.2. Vektortér V egyúttal k, k bimodulus is. ${}_kV$ eredetileg, és a másik oldalról ugyanúgy definiáljuk a hatást. $v\lambda = \lambda v$. Kommutativitás miatt ez valóban egy modulusstruktúra, összegzés és egység nyilvánvaló. A

két hatás felcserélhetősége is a kommutativitásból következik. Ezekből rögtön látszik hogy ugyanez működik kommutatív gyűrű feletti modulusokra.
$M \in Mod - R$-hez vesszük az R^{op} gyűrűt, az összeadás marad a régi, a szorzás pedig $r * s = sr$. Ekkor $M \in R^{op} - Mod$.
R gyűrű, $S \leq Z(R)$ és $M \in Mod - R$, akkor M valójában $S - R$ bimodulus az első példa szerint. Ha $M \in Mod - A$ ahol A egy k-algebra, akkor M egy $k - A$ bimodulus, ugyanígy a másik oldalon.

Tétel 2.3. *R, S, T gyűrűk, ${}_SM_R$ és ${}_TN_R$ bimodulusok. Akkor $Hom_R(M_R, N_R)$ egy $T - S$ bimodulus. A hatás $t \in T$-re $\exists t\phi : m \mapsto t(m\phi)$ és $\phi s : m \mapsto (sm)\phi$.*

Proof. Kell, hogy $t\phi, \phi s$ is R-homomorfizmus, ez 2+2 egyenlet. T és S hatása modulushatás (4+4), és felcserélhetőek (1).
Összegtartás triviális, skipp, marad 2+2+1. definíció, ϕ homomorfizmus és $T - R$ bimodulus az M és megint $t\phi$ definíciója:

$$(mr)(t\phi) = t((mr)\phi) = t(m\phi)r = (t(m\phi))r = (m(t\phi))r$$

analóg módon, az $S - R$ bimod szerkezetet használva:

$$(mr)(\phi s) = (s(mr))\phi = ((sm)r)\phi = ((sm)\phi)r = (m(\phi s))r$$

Modulushatásunk van?

$$m((tt')\phi) = (tt')(m\phi) = t(t'(m\phi)) = t(m(t'\phi)) = m(t(t'\phi))$$

Másik oldal:

$$m(\phi(ss')) = ((ss')m)\phi = (s(s'm))\phi = (s'm)(\phi s) = m((\phi s)s')$$

Hatások fölcserélhetősége:

$$m((t\phi)s) = (sm)(t\phi) = t((sm)\phi) = t(m(\phi s)) = m(t(\phi a))$$

□

Állítás 2.4. *${}_RM_S$ és ${}_RN_T$ bimodulusok, akkor $Hom_R(M, N)$ egy $S - T$ bimodulus lesz. $m(s\phi) = (ms)\phi$ és $m(\phi t) = (m\phi)t$ hatásokkal.*

Megjegyzés 2.5. Mindkettőnél a második modulus struktúra megőrzi az oldalt, az elsőé cserél.

Példa 2.6. Adott $M, N \in Mod - R$, tekinthetjük $Hom_{\mathbb{Z}}(M, N)$-et, ami egy $R - R$ bimodulus lesz. Ez egyszerűen azért van, mert minden gond nélkül tekinthetjük ${}_{\mathbb{Z}}M_R$-nek ezeket a modulusokat, és az állítást használhatjuk.
Ha $M, N \in Mod - A$, tekinthetjük $Hom_k(M, N)$-et, ez egy $A - A$ bimodulus lesz azért, mert $k \leq Z(A)$ és ${}_kM_A$ struktúrát kap a modulus.
$M \in Mod - A$, akkor $D(M) := Hom_k(M, K) \in A - Mod$, illetve ha $N \in A_Mod$ akkor $D(N) := Hom_k(N, k) \in Mod - A$, ezek M illetve N k-duálisa. Vektortereknél $D(V) = V$ persze, de itt persze nem mert nem is azonos oldali. Viszont ha mindenki véges dimenziós, akkor $D(D(M)) = M$.

2.2 Tenzorszorzat

Motiváció az 1/2 b feladat. Mi az R és R/I modulusok között a kapcsolat? Ha adott $M_{R/I}$ egyszerűen $mr = m(r+I)$. Fordíva, ha adott M_R-nél ez nem megy ilyen könnyen, nem biztos hogy $r - r' \in I$, és mégis máshogy hatnak m-en. Akkor fog ez menni, hogyha $MI = 0$, és akkor működik is az előbbi konstrukció.
$1 \in S \leq R$ esetén világos hogy minden R modulus S modulus is megszorítással. Ez azonban visszafelé nagyon nem igaz, például $\mathbb{Z}_2$ egy $\mathbb{Z}$ modulus persze, de ez a hatás nem terjed át $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$-n, pl mert $\mathbb{Q}$ modulus vektortér, tehát végtelen sok eleme van.
Lehet-e M-et bővíteni, vagy megváltoztatni úgy hogy mégis R-modulus legyen? Például egy valós vektortérben veszünk egy bázist, és ennek a bázisnak vesszük minden $\mathbb{C}$ kombinációját, akkor kiterjesztettük a vektortérstruktúrát $\mathbb{C}$-re. Ez azért jó, mert minden valós lineáris leképezés egy komplex vektortérbe kiterjed egyérteműen erre a komplexifikáltra.
Olyan R-modulust keresünk U_R ami a legtöbbet tart meg M-ből, ezt az előbbivel analóg módon az alábbi diagrammal kötjük ki. Ez az objektum lesz $M_s \otimes_S {}_S R$.

$$\begin{tikzcd} M_S \arrow[r, "\varphi_S"] \arrow[dr, "\forall \beta_S"'] & U_R \arrow[d, dashed, "\exists \varphi_R"] \\ & V_R \end{tikzcd}$$

Figure 1:

Általánosabban definiáljuk:

Definíció 2.7. M_R és ${}_R N$ modulusok. $\mathbb{Z}(M \times N)$ az $M \times N$ Descartes szorzat által szabadon generált Abel-csoport. Ezt lefaktoráljuk azon relációkkal, hogy a párok úgy viselkedjenek, mintha szorzatok lennének: $M \otimes_R N := \mathbb{Z}(M \times N) / < (m+m', n) - (m,n) - (m',n), (m, n+n') - (m,n) - (m,n'), (mr,n) - (m,rn) >$ Az (m,n) osztályát $m \otimes n$-el jelöljük, ezek generálják a tenzorszorzatot véges összegekkel. Továbbá a faktorizáció miatt $(m+m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n$, és hasonlóan a többi tulajdonsággal.

Tétel 2.8 (A tenzorszorzat univerzalitása)**.** *Ha G Abel-csoport és adott egy $\phi : M \times N \to G$ R-középlineáris, vagyis mindkét változójában additív, és $\phi(mr, n) = \phi(m, rn)$, akkor $\exists! \beta : M \otimes_R N \to G$ Abel csoport homomorfizmus, ami a ϕ-t átvezeti az $M \times N \to M \otimes N$ természetes leképezésen.*

Proof. Az egyértelműség egyszerű, csak a tenzorszorzat helyett először tekintsük az $M \times N \to \mathbb{Z}(M \times N)$ leképezést, itt minden párnak $(m,n)\phi$-be kell mennie hogy esélyünk legyen áthúzni a leképezést. A középlinearitási feltétel miatt ezen leképezés magjában van a tenzorszorzatot definiáló I ideál. □

Példa 2.9. $X \in Mod{-}R$, tekintsük $X \otimes_R R$-et. Állítjuk hogy ez izomorf X Abel csoportjával. Azt vegyük észre, hogy $x \otimes r = x \otimes r1 = xr \otimes 1$ az alaptenzorokra, ilyenek összege az összegtartás miatt $\sum x_i \otimes r_i = (\sum x_i r_i) \otimes 1$, ergo mindenelem $y \otimes 1$ alakú. Vegyük az $(x, r) \mapsto xr$ leképezést $X \times R$-ből X-be. Megszorítva $X \times \{1\}$-re kapunk egy bijekciót, emiatt látványosan a természetes leképezés megszorítása is bijektív $X \times \{1\} \to X \otimes R$. Ha van egy G torzió Abelcsoport, akkor $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ persze, a rendet átvihetjük. A bilinearitás miatt $0 \otimes r = 0$. Általában ha $I \lhd R$ úgy, hogy $MI = IN = 0$, akkor $M \otimes_R N = M \otimes_{R/I} N$.

Állítás 2.10. *Ha ${}_SM_R$ és ${}_RN_T$ bimodulusok, akkor $M \otimes_R N$ egy $S - T$ bimodulus lesz a $s(m \otimes n) = sm \otimes n$ és $(m \otimes n)t = m \otimes nt$ hatások disztributív kiterjesztésével.*[*]

3 Harmadik előadás

3.1 Kategóriák

Egy $\mathcal{K}$ kategória objektumokból és közöttük morfizmusokból áll. Minden objektumnak létezik egy identitás[†]morfizmusa $id_a : A \to A$, és a morfizmusok kompozíciója asszociatív. Az objektumok osztályát $Ob(\mathcal{K})$-val, két objektum A, B közötti leképezéseket $Hom(A, B)$-vel jelöljük.

Példa 3.1. $Ab, Mod-R, R-Mod, mod-R, R-mod$, továbbá $Ring$ az egységelemes gyűrűk unitális gyűrűhomomorfizmusokkal, Rng az általános gyűrűk, Grp a csoportok és Set a halmazok kategóriája.
Nyilván ezek mind Set részkategóriái (nem az összes objektum, és nem az összes morfizmus).

Definíció 3.2. $\phi : A \to B$ monomorfizmus, ha minden $\alpha, \beta : C \to A$ leképezésekre, ahol $\phi\alpha = \phi\beta$ igaz, $\alpha = \beta$ teljesül, ergo a bal egyszerűsíthető leképezések. A duális definíciót epimorfizmusnak nevezzük.

Állítás 3.3. *A Set részkategóriáin ha egy leképezés injektív, akkor monomorfizmus, duálisan ha szürjektív, akkor epimorfizmus.*

Proof. $C \underset{\alpha}{\overset{\beta}{\to}} A \xrightarrow{\phi} B$, mivel ezek halmazfüggvények, tekintsük a hatásukat egy $c \in C$ elemen. Ha $\phi(\alpha(c)) = \phi(\beta(c))$ teljesül, akkor ϕ injektivitása miatt $\alpha(c) = \beta(c)$, tehát valóban mono. A másik állítás duálisan teljesen analóg módon: $C \underset{\alpha}{\overset{\beta}{\leftarrow}} C \xleftarrow{\phi} A$, szürjektivitás miatt $\forall b \in B\ \exists a \in A : \phi(a) = b$, ezért $\alpha(b) = \alpha(\phi(a)) = \beta(\phi(a)) = \beta(b)$. $\square$

Állítás 3.4. *Mod-ban és mod-ban az állítás megfordítása is teljesül.*

Proof. Elégséges belátni, hogy ha egy leképezés nem injektív, akkor nem mono, és hogy ha nem szürjektív, akkor nem epi.
Ha ϕ nem injektív, akkor nem nulla magja van. Vegyük ennek a természetes beágyazását, és a triviális leképezést

$$0 \neq \ker \phi \underset{\iota}{\overset{0}{\to}} A \xrightarrow{\phi} B.$$

Mindkét kompozíció a nulla leképezés $\ker \phi \to B$, viszont a két leképezés nem egyenlő, hiszen a mag nem nulla, tehát ϕ nem monomorfizmus.
Hasonlóan, most faktorizálunk $Im\phi$-vel, a párhuzamos nyilak a faktorleképezés és a nulla leképezés, és kapjuk hogy egy nem szürjektív leképezés nem epimorfizmus. $\square$

Definíció 3.5. $\phi : A \to B$ izomorfizmus, ha létezik $\psi : B \to A$, amire $\phi\psi = id_B$ és $\psi\phi = id_A$. Ekkor $A \cong B$.

[*]nem triviális a jóldefiniáltság
[†]$id_A f = f$ és $g id_A = g$ minden $f : B \to A$ és $g : A \to B$-re.

$A \hookrightarrow B$ jelöli a mono, $A \twoheadrightarrow B$ pedig az epimorfizmusokat. $A \xrightarrow{\cong} B$ az izomorfizmusokat.

Megjegyzés 3.6. Általában egy epi és monomorfizmus nem izomorfizmus (azonban pl Mod és mod-ban igaz). Egyszerű ellenpélda egy kategória két objektummal, és egy nem identitás morfizmussal $A \to B$. Ez a leképezés nyilvánvalóan mono és epi, de nem lehet izomorfizmus, hiszen nincs az ellenkező irányba leképezés.

Definíció 3.7. Szorzat. M_i $(i \in I)$ objektumok, $N = \prod_I M_i$ az M_i-k szorzata, hogyha adva vannak $\phi_i : N \to M_i$ leképezések, és igaz hogy $\forall X\ \forall \beta_i : X \to M_i$-hez $\exists! \phi : X \to N$ amire $\beta_i \phi = \phi_i$.
A duális definíció a koszorzat, jele $N = \sqcup_I M_i$.

Állítás 3.8. *A szorzat és koszorzat izomorfia erejéig egyértelmű.*

Proof. Vegyünk két objektumot, amik teljesítik a definíciót M és M'. Írjuk fel a definíciót $X = M'$-vel a definícióból kapott leképezésekkel, kapva egy $M' \to M$ leképezést, illetve fordítva felírva egy leképezést az ellenkező irányba. Mostmár az egyértelműség garantálja hogy a kompozíció identikus. □

Állítás 3.9. *Modulusokra a szorzat a direkt szorzat, összeg pedig a direkt összeg.*

Proof. Elégséges belátni, hogy a direkt szorzat és összeg kielégítik a megfelelő diagramokat, ez pedig világos. Ha vannak leképezéseink minden M_i-be, akkor az egyetlen dolog amit tehetünk, hogy koordinátánként beképezzük a szorzatba, csak így lesz kompatibilis az összes vetítéssel.
A direkt összeg teljesen hasonló, a részmodulusok beágyazásával úgy tudunk csak kompatibilisek maradni, hogyha összeadjuk a leképezéseket. Ez értelmes lesz, mert minden eleme a direkt összegnek csak véges sok helyen nem nulla. □

3.2 Projektív és injektív modulusok

Definíció 3.10. Egy kategóriában a P objektumot projektívnak hívunk, hogyha $\forall \alpha : N \twoheadrightarrow M$ epire, és $\beta : P \to M$ morfizmusra létezik $\phi : P \to N$ amire $\alpha\phi = \beta$.

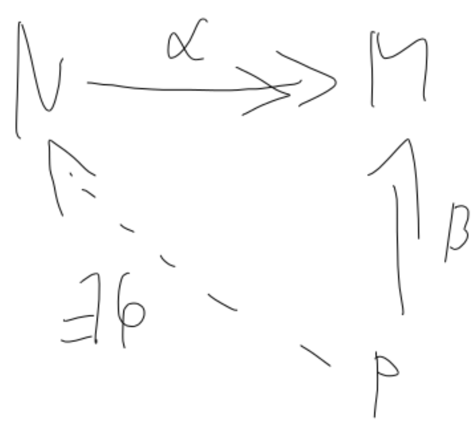


Figure 2: A projektív objektum univerzális tulajdonsága

A duális fogalmat injektív objektumnak nevezzük.

Állítás 3.11. 1. *minden szabad modulus projektív*

2. projektívek direkt összeadandója is projektív

3. projektív modulusok direkt összege (koszorzata) is projektív

Proof. Vegyük az X által generált szabad objektumot, és $P = F(X) \xrightarrow{\beta} M \twoheadleftarrow N$ leképezéseket. $x \in X$-re $\beta(x_i)$-t eltalálja az epimorfizmus*α valami $n_i \in N$ elemmel. Definiáljuk $\phi : X \to N$ $x_i \mapsto n_i$, mivel P szabad, ez kiterjed egy $\bar{\phi} : P \to N$ leképezéssé. Egy generátorra $\bar{\phi}(\alpha(x_i)) = \phi(\alpha(x_i)) = \alpha(n_i) = \beta(x_i)$, vagyis $\alpha\bar{\phi}|_X = \beta|_X$, tehát mindenhol egyenlőek.

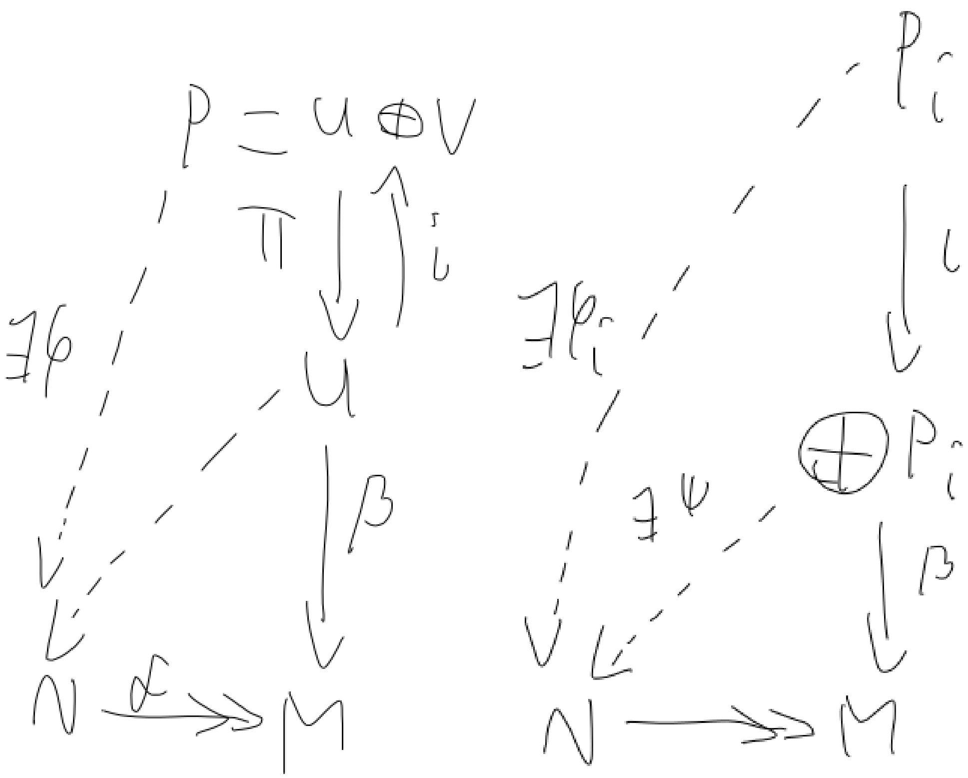


Figure 3: A második és harmadik pont bizonyítása

$i : u \mapsto (u, 0)$, $\pi(u, v) = u$, ezért $\phi i = id_U$. Mivel P feltevés szerint projektív, létezik $\phi : \alpha\phi = \beta\pi$. Tekintsük most a $\phi i : U \to N$ leképezést, erre $\alpha\phi i = \beta\pi i = \beta$.
ι_i a definícióban megkövetelt leképezések, a projektivitás miatt létezik ϕ_i, amire $\beta\iota_i = \alpha\phi_i$. A koszorzat definíciója miatt létezik $\phi : \phi_i = \psi\iota_i$. Mostmár $\alpha\psi\iota_i = \alpha\phi_i = \beta\iota_i$, a koszorzat egyértelműségi követelése miatt $\alpha\psi = \beta$. □

Állítás 3.12. *P modulusra ekvivalens:*

1. *P projektív*

2. *$\phi : M \twoheadrightarrow P$ felhasad, vagyis* $\ker\phi$ *direkt összeadandója M-nek*

3. *P direkt összeadandója egy szabad modulusnak*

*modulusokra epimorfizmus szürjektív!

Proof. $1 \to 2$, írjuk fel a projektivitás definícióját ϕ-re és id_P-re, kapunk egy $\psi : P \to M$ leképezést, melyre $\phi\psi = id_P$. Mivel id_P injektív, $im\psi \cap \ker\phi = 0$, és ψ injektív, mert $\phi\psi$ injektív, vagyis $im\phi = P$. Generálnak, mert ha $m \in M$, $\phi(m)$-hez létezik $p \in P$, amire $\phi(\psi(p)) = \phi(m)$, ergo $\phi(\psi(p) - m) = 0$, így $\psi(p) - m \in \ker\phi$, vagyis $m \in \ker\phi + im\psi$. Generálnak, és diszjunktak, tehát direkt összeg.
$2 \to 3$ P homomorf (epimorf) képe egy $F(X)$ szabadnak (választhatjuk X-et egy generátorrendszerének), tehát $F(X) = \ker\phi \oplus P$.
$3 \to 1$ Láttuk már hogy minden szabad modulus projektív, és egy projektív modulus direkt összeadandója is projektív. □

Következmény 3.13. *R_R direkt összeadandói projektívek*

Tétel 3.14.
1. *Ab-ban projektív = szabad*
2. *A végesen generált k-algebra, akkor M projektív pontosan akkor, hogyha $M = \oplus P_i$, ahol P_i direkt összeadandója A_A-nak.*

Állítás 3.15.
1. *injektív modulusok direkt összeadandója injektív*
2. *injektív modulusokdirekt szorzata injektív (általános kategóriákban is)*

4 Negyedik előadás

Állítás 4.1. *Ekvivalens*

1. *Q injektív*
2. *$Q \rightarrowtail M$, akkor $Q = im\alpha$ és direkt összeadandója M-nek.*

Proof. $1 \to 2$ Használjuk az injektivitást α-ra és id_Q-ra, kapjuk $\gamma : M \to Q$ amire $\gamma\alpha = id_Q$. Ez ugyan az, mint a házi feladatban.
$2 \to 1$ az érdekesebb eset. Veszünk egy $\alpha : M \rightarrowtail N$ leképezést, és egy $\beta : M \to Q$ leképezést, ezt szeretnénk kiterjeszteni N-re. Vesszük a pushoutot. Ekkor a ι_1 leképezés injektív, hiszen ha $\iota_1(q) = 0$, akkor $(q, 0) =$

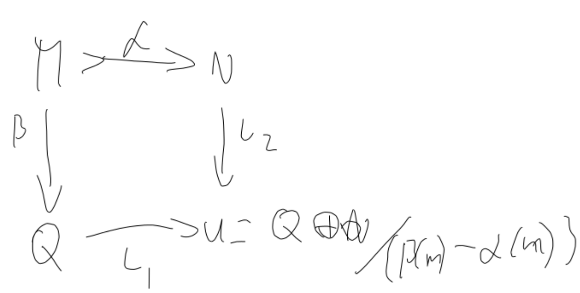


Figure 4:

$\beta(m) - \alpha(m)$ valami m-re, ergo $\alpha(m) = 0$, de ez feltevés szerint injektív, tehát $m = 0$, ezért $q = 0$ és valóban injektív, hasonlóan ι_2. Feltevés szerint $Q \rightarrowtail U$ felhasad, létezik $\pi : U \to Q$ amire $\pi\iota_1 = id_Q$. Vehetjük a $\pi\iota_2$ leképezést, ami megfelelő kiterjesztés lesz, hiszen $\gamma\alpha = \pi\iota_2\alpha = \pi\iota_1\beta = \beta id_Q = \beta$. □

Tétel 4.2 (Bare-kritérium)**.** *Ha Q_R injektív pontosan akkor, hogyha telejsíti az injektivitási tulajdonságot minden $I \rightarrowtail R_R$ beágyazásra, ahol I jobbideálja R-nek.*

Nem bizonyítjuk, megtalálható.

Tétel 4.3. *Minden modulus beágyazható injektívbe.*

Proof. Később homologikus algebrával. □

Megjegyzés 4.4. Minden modulus nyilván homomorf képe egy projektívnek (szabadnak).

Tétel 4.5. *Egy Abel csoport injektív pontosan akkor, hogyha osztható.*

Proof. Az injektívteszt lemmát alkalmazzuk. elég az $n\mathbb{Z} \rightarrowtail \mathbb{Z}$ monokat nézni. $n\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Z}$ is szabadok, elég azt megnézni, hogy az n és az 1 képe micsoda, és a kiterjeszthetőség pontosan azt mondja nekünk, hogy az n képe osztható n-el. □

Következmény 4.6. *Ab-ban az injektívek direkt összege, és faktora is injektív, hiszen az oszthatóság ezekre öröklődik.*

Következmény 4.7. *Ab-ban injektív $\mathbb{Q}$ és a $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, mert oszthatóak.*

Tétel 4.8. *Ab-ban az injektívek pontosan $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ példányainak direkt összegei.*
Egy A véges dimenziós k-algebrára $Mod-A$-ban az injektívek direkt felbonthatatlan injektívek direkt összegei, és a felbonthatatlan injektívek pedig pontosan $D(P_i^o)$, ahol $P_i^o \in A-Mod$ felbonthatatlan projektív (ezek pedig ${}_AA$ direkt összeadandói).

Tétel 4.9. *Ab-ban mindenki beágyazható injektívekbe.*

Proof. $M \in Ab$, ez homomorf képe egy szabadnak: $\phi : \oplus\mathbb{Z} \to M$, a homomorfizmus tétel szerint $M = \oplus\mathbb{Z}/ker\phi$. Most $\oplus\mathbb{Z} \rightarrowtail \oplus\mathbb{Q}$, és így a faktor is beágyaztatik, így M-et beágyaztuk egy osztható faktorába, ami osztható. □

4.1 Reguláris modulus felbontása direkt összegre

Állítás 4.10. *$R_R = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ akkor és csak akkor ha $\exists e_1, \ldots, e_n \in R$ idempotensek, hogy $M_i = e_iR$, továbbá $e_ie_j = \delta_{ij}e_i$ (ortogonális), és végül $\sum e_i = 1$ (teljes).*

Megjegyzés 4.11. Ha létezik $e \in R$ nem null vagy 1 idempotensek, akkor $e, 1-e$ egy ilyen rendszer. Ekkor $R = eR \oplus (1-e)R$.

Proof. $\to$ irány. A direkt összegzés miatt $1 = \sum e_i$, szeretnénk, hogy ezek jók. Ha $r_i \in M_i$, akkor átszorozva $r_i1 = \sum e_jr_i$, direkt összegben ennek a két előállításnak meg kell egyeznie, vagyis $j \neq i$-re $e_jr_i = 0$, $j = i$-re pedig $r_i = e_jr_i$. Kapjuk, hogy $M_i \leq e_iM_i \leq e_iR$ világos, és $e_iR \leq M_i$ is teljesül persze, ezért egyenlőek. $r_i = e_i$-re az előbbi egyenletből kapjuk hogy e_i idempotens és ortogonális ha $r_i = e_j$.
Másik irány. Adott $1 = \sum e_i$, tekintsük az $e_iR = M_i$ részmodulusokat R_R-ben. Állítjuk, hogy ezek direkt összege R_R. Generálnak, hiszen $r1 = \sum e_ir$ ahol minden összeadandó M_i-ben van. Indirekt legyen $M_i \cap \sum M_j \neq 0$. ekkor $m = e_ir_i = \sum_{i\neq j} e_jr_j$, átszorozva e_i-vel látjuk hogy $e_im = m = \sum e_ie_jr_j = 0$. □

Megjegyzés 4.12. A fenti felbontás gyűrű-direktösszeg, vagyis az M_i-k kétoldali ideálok R-ben akkor és csak akkor, hogyha $e_i \in Z(R)$.

4.2 Gráfalgebrák

Γ véges irányított gráf*, megengedünk többszörös élt és hurkot is.

Definíció 4.13. $k\Gamma$ algebra a következő: Vegyük azt a k-vektorteret, amit Γ sétái † alkotják, beleértve a 0 hosszúságuakat. A szorzás az utak konkatenációja ha lehet, 0 ha nem.

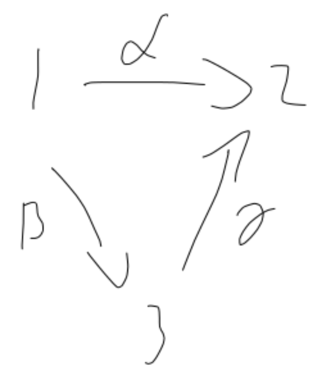


Figure 5: Γ

Példa 4.14. $k\Gamma$ bázisa az e_1, e_2, e_3 0 hosszú utak, idempotensek, α, β, γ és $\beta\gamma$, tehát a dimenzió 7. $e_1\alpha = \alpha$ vagy $e_2\alpha = 0$ például.

Példa 4.15. Ha Γ véges, attól még lehet a gráfalgebra végtelen dimenziós, pl egy csúcs és egy hurokél adja a polinomgyűrűt.

Vegyük észre, hogy a 0 hosszú utak e_i báziselemeihez tartozó elemek összege az egységeleme az algebrának, hiszen minden útnak egyértelmű kezdő és végpontja van.

Állítás 4.16. *$A_A = \oplus e_1 A \oplus \cdots \oplus e_n A$ egy felbontása A-nak direkt felbonthatatlanokra ha Γ-nak n csúcsa van és $A = k\Gamma$.*

Példa 4.17. Az előző példában $e_1 A =< e_1, \alpha, \beta, \beta\gamma >$, $e_2 A =< e_2 >$ és $e_3 A =< e_3, \gamma >$, tehát $k\Gamma = P_1 \oplus P_2 \oplus P_3$ ahol a dimenziók $4, 1, 2$.

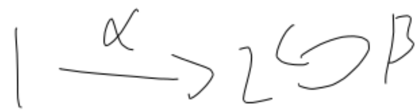
Definíció 4.18. $k\Gamma_+$ jelölje a legalább 1 hosszú utak által generált részmodulust (ideál is valójában). I megengedett ideál, ha létezik $m \geq 2$, hogyha $k\Gamma_+ \leq I \leq k\Gamma_+^2$. Ekkor $A = k\Gamma / I$ véges dimenziós algebra.

Példa 4.19. A gráfunk, és legyen az ideál $I = (\alpha\beta^2, \beta^3)$. A faktorban $A = k\Gamma$-ban ezek relációk lesznek. Adjuk meg A egy bázisát!‡ Ebből leolvashatjuk, hogy $A =< e_1, e_2, \alpha, \beta, \beta^2, \alpha\beta >_k$. Felbontás direkt összeadandókra $< e_1, \alpha, \alpha\beta > \oplus < e_2, \beta, \beta^2 >$. Ez csak modulusfelbontás, nem algebra. Tudnunk kell még, hogy a nyilak hogyan hatnak a báziselemeken. Az elsőnél $e_1 \xrightarrow{\alpha} \alpha \xrightarrow{\beta} \alpha\beta$, és $e_2 \xrightarrow{\beta} \beta \xrightarrow{\beta} \beta^2$. Még feljegyezzük hozzá, hogy $1-2-2$ és $2-2-2$, a kezdőpontokat, a konkrét élekkel címkézni opcionális, csak ha nem egyértelmű. A modulusstruktúra teljesen meg van határozva ezzel a diagrammal, látjuk az A hatását.

*quiver

†irányított utak ahol éleket többször használhatunk

‡Ha I utakkal, és utak különbségével van generálva, akkor A-nak létezik utakból álló bázisa



Példa 4.20. $I = (\alpha\gamma, \beta\alpha - \gamma^2)$-et vegyünk. A faktor egy bázisa $e_1, e_2, \alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta, \beta\alpha = \gamma^2, \gamma\beta$, a 3 hosszúakra $\alpha\beta\alpha = \alpha\gamma^2 = 0$, ezt nem lehet $\beta\alpha\gamma = 0$ szintén, viszont $\beta\alpha\beta$ még generátor. Végül $\gamma\beta\alpha = \beta\alpha\gamma = 0$ és $\beta\alpha\beta$-t nem tudjuk 4 hosszúvá folytatni, készen vagyunk 9 generátor.

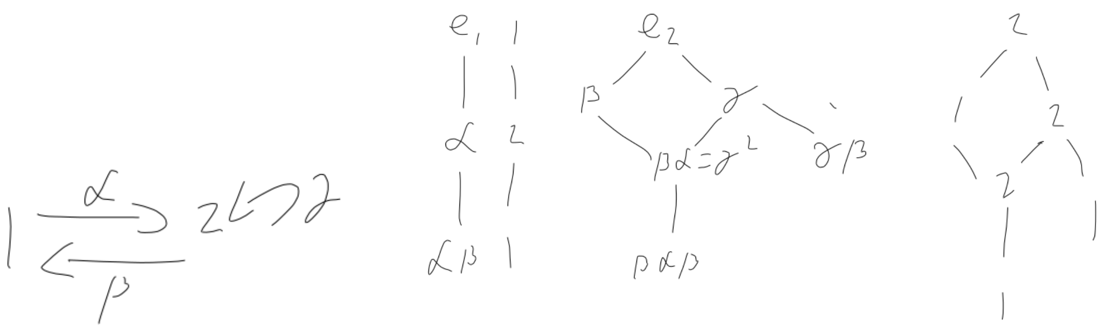


Figure 6:

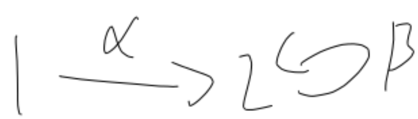
5 Ötödik előadás

Gráfalgebrákat kezdtünk el nézni. A faktoraikat is gráfalgebrának hívjuk, elkezdtük a Loewy-diagramok tárgyalását. $A_A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA$, ahol az e_i a Γ gráfcsúcsaiból álló 0 hosszú utakat jelöli. Az összegük pont az algebránk egységeleme.

5.1 Modulusok az A fölött

$M \in mod - A$, ez egyenlő $M1 = \oplus Me_i$-vel, ahol ez egy vektortér direkt összeg. Azt kell megadni $\dim Me_i$-n kívül, hogy hogy hatnak rajta a nyilak. Ha $i \xrightarrow{\alpha} j$ egy nyíl, akkor $\alpha = e_i\alpha e_j$, és így α-val jobbszorozni egy $Me_i \to Me_j$ transzformáció, mindenki mást úgyis annullál. Ezért a modulust megadhatjuk úgy, hogy vektorterek, és lineáris trafók közöttük.

Példa 5.1. A múltkori $I = (\alpha\beta^2, \beta^3)$-ös példát nézzük. e_1A és e_2A is 3 dimenziós. Adjunk meg egy-egy



alkalmas bázist minden $M_i := Me_i$-ben, és minden α nyílra adjuk meg a hatást a báziselemeken. Jó esetben bázislem képe báziselem vagy nulla, ezt fel lehet rajzolni. Ez azt mondja, hogy Me_1 1 dimenziós, Me_2 két

Figure 7: egy modulus A felett

dimenziós, és a vonalak megadják a két nyíl hatását.
Tetszőleges $\alpha : M_i \to M_j$ leképezést vehetnénk, ez modulus lesz $K\Gamma$ fölött, és ha az I annullálja akkor a faktoron is, ezt pedig elég a generátorokon ellenőrizni.
Alapesetben mátrixokkal adjuk meg ezeket az α leképezéseket. Egy jobb bázis választásával (összeg és különb-

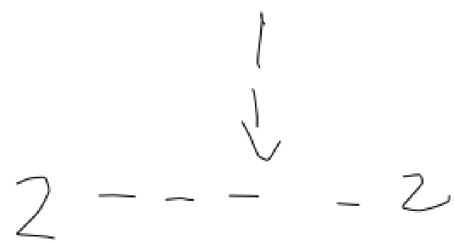


Figure 8: Csúnya Loewy diagram

ség) szebb diagramot kapunk $\frac{1}{2} \oplus 2$.

Példa 5.2. Az előző algebra fölött tekintsük az alábbi modulust. Ez ellenőrizhetően modulus, teljesülnek a

Figure 9:

relációk, vagy létrehozzuk faktorként. Most keressük meg M részmodulusait, és a szerintük vett faktorokat is. $N_1 \leq M_1$. Ha létezik $xb_1 + yb_2 \in N_1$ ahol $y \neq 0$, akkor átoszthatunk $y \in k$-val ha akarunk. Rátoljuk α-t, adódik $x'c_2 + c_1 \in N$, és most a β-t, ezzel $0 + c_2 \in N$, tehát $c_1 \in N$. Lecserélhetjük b_2-t $x'b_1 + b_2$-re, és így látjuk hogy $N =< c_2, x'c_2 + c_1, x'b_1 + b_2 >$ vagy a teljes, a faktor pedig vagy 0 vagy $< b_1 >$ képe generálja.
Most feltehetjük, hogy nincs ilyen N_1-ben. Ha $N_1 \neq 0$, akkor $N_1 =< b_1 >$, ezért $c_2 \in N$, és két opciónk van $N_2 =< c_2 >$ vagy M_2. Előbbi esetben $N =\frac{1}{2}$ és a faktor is egy $\frac{1}{2}$, a másik esetben a faktor csak 1.
Végül ha $N_1 = 0$, akkor vagy $\dim N_2 = 2$ és $N =\frac{2}{2}$, és a faktor $1 \oplus 1$, vagy $\dim N_2 = 1$, akkor $N = 2$ és a

Figure 10:

faktor $1 \oplus {}^1_2$. Végül persze lehet N_2 is nulla, így N nulla, és a faktor M.

5.2 Homomorfizmusok

Egy $\phi : M \to N$ morfizmus az Me_i, Ne_i komponenseket egymásba viszi, hiszen $me_i\phi = m\phi e_i$. Most 5/2 feladat.

Példa 5.3. Leolvassuk a Loewy diagramból a gráfot. A diagramot követve leolvashatjuk a relációkat. $I =$

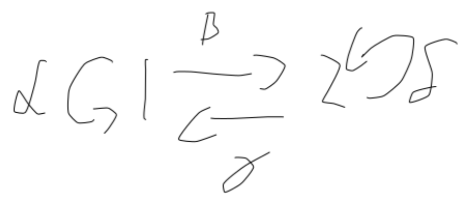


Figure 11:

$(\alpha^2, \beta\gamma, \alpha\beta - \beta\delta, \gamma\alpha, \gamma\beta, \delta^2, \delta\gamma)$. Kérdés, hogy $\dim Hom({}_1{}^2{}_2, {}^1{}_2{}^2) =?$. A "felső" (középső) kettest elvihetjük bármelyik kettesbe elvihetjük, és több nem is lehet. Mivel a tárgyteret egy elem generálja mint modulust, az egyes képe meghatározott.
Fordítva komplikáltabb. Az egyest egyesbe vagy nullába vihetjük, akkor a ketteest kénytelenek vagyunk az alsó kettesbe vagy 0-ba vinni, mert a tárgytér alsó kettese 0-ba kell menjen, és így a fenti β képe 0 kell legyen.

5.3 Komplexusok homológiái

Definíció 5.4. R-modulusok $(R_\cdot, d_\cdot)$ lánckomplexusa egy véges vagy végtelen sorozat: $\to M_2 \to M_1 \to M_0 \to M_{-1} \to \dots$ ahol $d_i : M_i \to M_{i-1}$, amely féligegzakt, ergo $d_{n+1}d_n = 0$.

Definíció 5.5. Egy lánckomplexus egzakt, hogyha nem csak $Im \leq Ker$, hanem egyenlőek is. Másképp mondva féligegzakt, és minden ami 0-ba megy előáll képként.

Példa 5.6. $0 \to X \to Y$ egzakt pontosan akkor ha a nemtriviális leképezés injektív, duálisan a szürjektivitásra is.

Definíció 5.7. Rövid egzakt sorozat $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ ha egzakt. Ez annyit tesz, hogy $X \hookrightarrow Y$ és $Y/X = Z$.

Definíció 5.8. Egy lánckomplexus homológiái $H_n(M_.) = kerd_n/imd_{n+1}$. Azt méri hogy mennyire nem egzakt a sorozat, pontosan akkor nulla, hogyha egzakt a sorozat (ha esetleg véges, kiegészítjük 0-kkal).

Jeölés: $x \in Kerd_n$-re $[x]$ jelöli a homológiaosztályát.

Példa 5.9. $M_. : \ 0 \to M_2 \to M_1 \to M_1 \to 0$ Ab-ban. Megmondjuk a csoportokat és a leképezéseket. $\mathbb{Z} \xrightarrow{4} \mathbb{Z} \xrightarrow{4} \mathbb{Z}_8$, nullák a két oldalon. A homológia $H_2 = 0, H_1 = \mathbb{Z}_2, H_0 = \mathbb{Z}_4$.

Definíció 5.10. R-modulusok kolánckomplexusa $(M^\cdot, d^\cdot)$ ugyanaz csak az indexek növekszenek, nevezzük kolánckomplexusnak ha féligegzakt.

Definíció 5.11. Kolánckomplexus kohomológiája $H^n(M^\cdot) = kerd^n/imd^{n-1}$.

Definíció 5.12. $Comp - R$ jelöli az R-lánckomplexusok kategóriája, ahol a morfizmusok láncleképezések. Ez annyit tesz, hogy ha adott $(M_., d_.)$ és $(N_., d_.)$ akkor létezzen $f_d : M_d \to N_d$ amire $d_n f_{n-1} = f_n d_{n-1}$.* Világos hogy lehet komponálni, és az identikus leképezés láncleképezés.

Láttuk, hogy $H_n : Comp - R \to Mod - R$, funktor is?

5.4 Funktorok

Adott C, D két kategória.

Definíció 5.13. $F : C \to D$ kovariáns funktor a következőt jelenti: $\forall X \in Ob(C)$-re egy $F(X) \in Ob(D)$, és $\forall \alpha \in Hom(X, Y) \exists F(\alpha) \in Hom(F(X), F(Y))$ úgy, hogy $F(\alpha\beta) = F(\alpha)F(\beta)$, és $F(id_X) = if_{F(X)}$.

Definíció 5.14. Ugyanezen tulajdonságok, kivéve hogy $F(\alpha\beta) = F(\beta)F(\alpha)$, akkor $F : C \to D$ kontravariáns funktor (persze ilyenkor $G(\alpha) : G(Y) \to G(X)$, ha $\alpha : X \to Y$).

Példa 5.15. Például $M \in Mod - R$-re az $X \mapsto Hom(M, X)$ leképezés egy $Mod - R \to Ab$ kovariáns funktor, az $Y \to Hom(X, M)$ pedig egy kontravariáns funktor. Ha $X \xrightarrow{\alpha} Y$ és veszünk $\phi : Y \to M$, ehhez természetes módon adódik a visszahúzottja mint $\phi\alpha : X \to M$ leképezés.

6 Hatodik előadás

5/5 feladat. Visszafelé haladunk a végéről a sorozatnak, H_0 kiszámításánál a képben eltaláljuk a generátort, az a maximális. H_1-nél a kép $\frac{2}{1}$, a mag az alsó egyes. Előtte az $\frac{1}{2}$ alakú modulusnál a kép és a mag is a kettes. Előtte ezért a mag mindenki a felső kettes alatt, a kép pedig az alsó kettes. Ezért előtte a $\frac{2}{1}$-ben a mag az egyes, a kép pedig nulla, hiszen nulla van előtte. Féligegzaktság ezért világos, a homológiák $1,\ 1 \oplus 3, 0, 2, 0$.

Példa 6.1. $M \in Mod - R$-re $F = Hom(M, -) : Mod - R \to Ab$ egy funktor. Az objektumokon $X \mapsto Hom(M, X)$ A morfizmusokon prekompozícióval hat $F(\alpha) : \phi \mapsto \alpha\phi$. Mivel a függvénykompozíció asszociatív, ez kompatibilis a kategóriáinkkal, és persze identitást identitásba visz, ez egy kovariáns funktor.
Fordítva $N \in Mod - R$ és $G = Hom(-, N)$. Az objektumokon $X \mapsto Hom(X, N)$, morfizmusokon $(\phi : Y \to Y) \mapsto (\phi\alpha : X \to N)$ hat, emiatt a kompozíció sorrendje megfordul, kontravariáns funktort kapunk.
Ezek additív funktorok, azaz $F : Hom(X, Y) \to Hom(F(x), F(y))$ abelcsoport homomorfizmus, hasonlóan G. Tehát morfizmusok összege morfizmusok összegébe megy, ez egyszerűen következik a morfizmusokon való hatásból. k-algebra fölött ezek vektortér morfizmusok is.

*minden kis négyzet kommutatív

Speciálisan $D = Hom_k(-,k)$ egy kontravariáns additív funktor $Mod - R \to R - Mod$.

Állítás 6.2. *Láncleképezés két komplexus között $f_. : M_. \to N_.$ homomorfizmust indukál $H_n(f_.) : H_n(M_.) \to H_n(N_.)$. Ezzel $H_n : Comp - R \to Mod - R$ additív kovariáns funktor.*

Proof. Írjuk fel a komplexusok egy tagját. Első észrevétel, hogy $f_n(Kerd_n) \leq Kerd'_n$ ahol d_n az $M_.$ és d'_n az N lánckomplexus leképezése. Továbbá $f_n(Imd_{n+1}) \leq Im(d'_{n+1})$ szintén a négyzetek kommutativitása miatt. Definiáljuk, hogy $x \mapsto f_n(x)$, ez egy értelmes leképezés $kerd_n \to kerd'_n$, majd ezt faktorizáljuk imd'_{n+1}-vel, $[f_n(x)] \in H_n(N_.)$, ez persze homomorfizmus. Ha $x \in imd_{n+1}$, akkor az f_n általi képe a láncleképezés volta miatt egyenlő $d'_{n+1}(f_{n+1}(x'))$-vel, ahol $d_{n+1}(x') = x$, tehát határ, tehát nulla, és valóban indukáltatik egy leképezés a homológiákon, hiszen a leképezés magja tartalmazza imd_{n+1}-et.
Kompozíció képe kompozíció persze, és additív is mert $[f_n + g_n\ x] = [f_n x + g_n x] = [f_n x] + [g_n x]$. $\square$

Definíció 6.3. $f.,g. : M. \to N.$-re $f.$ és $g.$ homológok, hogyha $H_n(f.) = H_n(g.)$, jelölés $f \equiv G$. Ritkán használjuk.
$f.,g.$ homotópok, jele $f. \sim g.$ akkor hogyha létezik egy $s_n : M_n \to N_{n+1}$ leképezéssorozat, amire $f. - g. = s_{n-1}d_n + d'_{n+1}s_n$.

Állítás 6.4. *Ha $f. \sim g.$, akkor $H_n(f.) = H_n(g.)$.*

Proof. H_n additív, ezért elég, hogy $H_n(f. - g.) \equiv 0$. Ha $x \in ker\ d_n$, akkor $(f_n - g_n)(x) = (s_{n+1}d_n + d'_{n+1}s_n)(x) = d'_{n+1}s_n(x)$ aki persze határ, tehát nulla homológiában. $\square$

Definíció 6.5. $M.$ és $N.$ homotópok, hogyha létezik $f.$ és $g.$ úgy, hogy $f.g. \sim id_{N.}$ és $g.f. \sim id_{M.}$.

Állítás 6.6. *Ha $M. \sim N.$, akkor $H_n(M.) \cong H_n(N.)$*

Proof. Az előbbiek szerint $f.$ és $g.$ homológiákon izomorfizmusokat indukálnak, egymás inverzei H_n funktorialitása miatt. $\square$

Nyilvánvaló, hogy ha $M.$ egzakt, akkor 'homológ a nullával', vagyis a $\cdots \to 0 \to 0 \to \dots$ lánccal, a nulla leképezés mindkét irányba izomorfizmust ad, de nem feltétlenül homotóp!

Példa 6.7. Tekintsük a következő egzakt sorozatot:

$$M. = 0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{1 \mapsto 2} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{1 \mapsto 1} \mathbb{Z}_2 \to 0$$

Egzakt, tehát a homológiája nulla, azonban nem homotóp a nullával. Egyfelől $0. \to M. \to 0.$ valóban identikus, ez az irány jó. A másik irányba vett kettős kompozíció a 0 leképezés $M. \to M.$, lehet ez homotóp az identitással? Megpróbáljuk megkonstruálni a lánchomotópiát id és 0 között. $ims_1d_2 \in 2\mathbb{Z}_4$ és hasonlóan imd'_3s_2 is, mert másodrendű elem képe másodrendű, míg az identitás képe az egész $\mathbb{Z}_4$, tehát nem létezhet ilyen homotópia.

Mely rövid egzakt sorozatok 0.-homotópok? A válsz a háziban adott, pontosan a felhasadóak, mit is jelent ez?

Definíció 6.8. $0 \to X \to X \oplus Z \to Z \to 0$-t hívjuk felhasadó egzakt sorozatnak, ahol a leképezések a beágyazás és a vetítés. Általánosabban $0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ egzakt és $im\alpha = ker\beta$ direkt összeadandója Y-nak.

A 6/1 negyedik pontja szerint ez ekvivalens azzal, hogy ha léteznek $\alpha' Y \to X$ és $\beta' : Z \to Y$ amire $\alpha'\alpha / id_X$, $\beta\beta' = id_Z$, $\beta\alpha = 0$, $\alpha'\beta' = 0$, és végül $\alpha\alpha' + \beta'\beta = id_Y$. Vegyük észre az analógiát a direkt összeg két faktorára való vetítés, és beágyazás tulajdonságaival. Ebből a tulajdonságból következik az egzaktság, nem kell külön föltenni!

Következmény 6.9. *Felhasadó rövid egzakt sorozat képe tetszőleges additív funktornál ugyanilyen, hiszen az előbbi 5 összefüggést megtartja egy additív funktor.*
Ez nem automatikus, additív funktor sem visz feltétlenül egzakt sorozatot (rövidet sem) egzaktba feltétlenül.

Példa 6.10. 6/2 példa.

$$M. = 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{mod } 2} \mathbb{Z}_2 \to 0$$

Vegyük az $F = Hom(\mathbb{Z}_2, -)$ és a $G = Hom(-, \mathbb{Z}_2)$. Lássuk be hogy az $M.$ képe nem egzakt! Hol romlik el? Előbbi esetben

$$0 \to 0 \to 0 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$$

hiszen $\mathbb{Z}$-ben nincs véges rendű elem. Ez nem egzakt $\mathbb{Z}_2$-ben persze. A másik irányban

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{id} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \to 0$$

(figyelem a sorend megfordul!), látjuk, hogy itt is a végén romlik el.

Definíció 6.11. Adott egy additív funktor $F : Mod - R \to Mod - S$, akkor ez indukál egy $F. : Comp - R \to Comp - S$ funktort is.

Lánckomplexus képe valóban lánckomplexus, hiszen $d^2 = 0$-t megtartja egy additív morfizmus. Láncleképezésekből láncleképezés lesz, a kommutativitás persze megmarad.

Állítás 6.12. *Ha F additív funktor és $f. \sim g.$ akkor $F(f.) \sim F(g.)$.*

Proof. $F(s_n)$ megfelelő választás az additivitás miatt. □

Definíció 6.13. Adott $f. : M. \to N.$ akkor értelmezhető $ker\ f.$ és $im\ f.$, egyszerűen képezzük a $ker\ f_n$ modulusokat, ezekre meg kell hogy tudjuk szorítani a differenciált. Ha $f_n(x) = 0$, akkor persze $f_{n-1}(d_n(x)) = d'_n(f_n(x)) = 0$, vagyis $d_n(x) \in ker\ f_{n-1}$, tehát valóban megszoríthatjuk d-t a magokra. Analóg módon d' megszorítható a képekre és kapunk még egy komplexust.

Definíció 6.14. Komplexusok egy $\dots \to M^k_. \to M^{k-1}_. \to \dots$ sorozata egzakt pontosan akkor ha $im = ker$ mindenhol. Ergo vizszintesen egzakt, függőlegesen féligegzakt.

Tétel 6.15 (Homológiák hosszú egzakt sorozata)**.** *Hogyha adott egy rövid egzakt sorozata lánckomplexusoknak $0 \to (X., d.) \xrightarrow{f.} (Y., d.') \xrightarrow{g.} (Z., d.'') \to 0$, akkor létezik egy $\partial.$ leképezés minden n-re, hogy*

$$\dots \to H_{n+1}(Z.) \xrightarrow{\partial} H_n(X.) \to H_n(Y.) \to H_n(Z.) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X.) \to \dots$$

egzakt

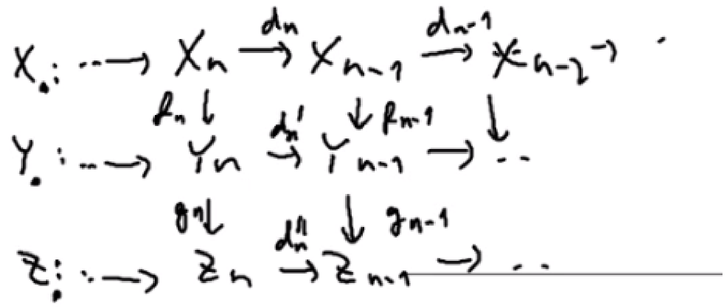


Figure 12:

7 Hetedik előadás

Proof. Diagramvadászattal keressük meg a $\partial.$ leképezést, ehhez egy lemma.

Lemma 7.1. *Legyen* $M_1 \overset{f_1}{\longleftrightarrow} M_2 \overset{f_2}{\longleftrightarrow} M_3 \ldots \overset{f_{n-1}}{\longleftrightarrow} M_n$ *modulusok és morfizmusok, ahol* f_i *a kettőből valamelyik irányba mutat. Ha* $\forall x_1 \in M_1$*-hez* $\exists! x_n \in M_n$ *amihez van kompatibilis* $(x_1, \ldots, x_n)$ *elemsorozat (az egymás melletti elemek a megfelelő függvénynél egymásba mennek az értelmes sorrendben). Ekkor az* $x_1 \mapsto x_n$ *leképezés homomorfizmus.*
Sőt, $\exists!$ *helyett elég az, hogy* $(0, x_2, \ldots, x_n)$ *kompatibilis sorozatnál* $x_n = 0$.

Proof. Ha $(x_1, \ldots, x_n)$ és $(y_1, \ldots, y_n)$ kompatibilisek, akkor persze a koordinátánkénti összegük, és skalárszorosuk is kompatiblis. Ha a gyengített feltétel teljesül, akkor persze az egyértelműség is, veszünk két kompatibilis sorozatot x_1-ből kiindulva, a különbségük egy 0-ból induló sorozat, tehát a végük egyértelmű és a leképezés jóldefiniált. □

A lemmát felhasználva világos, hogy ∂_n-et úgykapjuk meg, hogy

$$H_n(Z.) \leftarrow kerdn'' \hookrightarrow Z_n \leftarrow Y_n \rightarrow Y_{n-1} \hookleftarrow X_{n-1} \hookleftarrow kerd_{n-1} \rightarrow H_{n-1}(X)$$

$$[z] - z - z - y - d'_n(y) - x - x - [x]$$

A bal irányú leképezéseknél kell ellenőrizni, hogy van-e kompatibilis sorozat. A $Z_n \leftarrow Y_n$-nél létezik ős szürjektivitás miatt.
Utána $Y_{n-1} \hookleftarrow X_{n-1}$-nél cseréljük ki az utakat és alkalmazzuk az egzaktságot. $g_{n-1}(d'_n(y)) = d''_n(g_n(y)) = d''_n(z) = 0$, ebből kifolyólag létezik x, amire $d'_n(y) = f_{n-1}(x)$.
A következő hely $X_{n-1} \hookleftarrow kerd_{n-1}$. Kellene, hogy $d_{n-1}(x) = 0$, ez pontosan akkor történik meg, hogyha $f_{n-2}(d_{n-1}(x)) = 0$ mert injektív, most pedig a másik úton menve a diagramon ez egyenlő $d'_{n-1}(f_{n-1}(x)) = d'_{n-1}(d'_n(y)) = 0$ valóban.
Látjuk hogy minden z-hez létezik egy kompatibilis sorozat, egyértelműség kell, a nulla osztálya mindig nullába érkezik-e? Ekkor $z \in imd''_n$, tehát van $z', y' : z = d''_{n+1}(z') = d_{n+1}(g_{n+1}(y')) = g_n(d'_{n+1}(y'))$ ha a másik úton megyünk végig. Ugyanakkor $z = g_n(y)$ is igaz, vagyis $y - d'_{n+1}(y') \in kerg_n = imf_n$. Egzaktság miatt létezik x, hogy $f_n(x) = y - d'_{n+1}(y')$. Rendezve y-ra kapjuk hogy $d'_n(y) = d'_n(d'_{n+1}(y')) + d'_n(f_n(x')) = f_{n-1}(d_n(x'))$

és mivel f_{n-1} injektív, $x = d_n(x')$ vagyis a képben van, és a homológiaosztálya nulla. Következik hogy ∂_n létezik és jóldefiniált homomorfizmus.
Leellenőrizzük az egzaktságot, egyet kivéve, az házi feladat. Félig egzakt Y_n-nél annyit jelent, hogy $H_n(g.) \circ H_n(f.) = H_n(g.f.) = H_n(0) = 0$.
Z_n-nél kellene hogy $\partial_n H_n(g.) = 0$? Úgy indulunk ki a konstrukciónál, hogy $[z] = [g_n(y)]$, és $d'_n y = 0$ hiszen homológiaosztály. Vegyük ezt az y-t a kompatibilis sorozatban, és így utána 0 van, és így a legvégén is.
X_n-nél $H_n(f.)\partial_n = 0$-t szeretnénk. $[z]$-ből kapjuk az x-et, és vesszük az $f_{n-1}(x)$ homológiaosztályát. Ez persze megegyezik $d'_n(y)$-al, ami tehát a d'_n képében van, tehát nulla a kompozíció valóban.
Most az egzaktság. Y_n házi feladat.
Z_n-nél tegyük el hogy $\partial_n([z]) = 0$, tehát $z \in kerd''_n$ és van egy kompatibilis sorozat $(z, ..., y, ..., x)$, ahol $[x] = 0$. Ekkor persze létezik x' amire $d_n(x') = x$, elindulunk visszafelé. $d'_n(y) = f_{n-1}(x) = f_{n-1}(d_n(x')) = d'_n(f_n(x'))$. Tekintsük $x^* = y - f_n(x')$-t. Erre $d'_n(y^*) = 0$, tehát ez a $H_n(Y.)$ homológiának egy eleme. Másrészt $g_n(y^*) = g_n(y) - g_n(f_n(x')) = g_n(y) = z$, tehát a mag valóban egyezik a képpel.
X_n-nél ha $x \in kerd_{n-1}$, amire $H_n(f.)([x]) = 0$, akkor neki van őse ∂_n-nél? $[f_{n-1}(x)] = 0$, akkor van y amire $d'_n(y) = f_{n-1}(x)$, tekintjük $g_n(y) = z$-t. Erre $(z, ..., y, .., x)$ egy kompatibilis sorozat ∂_n-hez. Ellenőrizni kell még, hogy $z \in kerd''_n$. $d''_n(z) = d''_n(g_n(y)) = g_{n-1}(d'_n(y)) = g_{n-1}(f_{n-1}(x)) = 0$. Ezzel a tétel bizonyítása kész. ☐

Állítás 7.2. *A ∂_n homomorfizmusok természetesek, azaz ha adott két rövid egzakt sorozata lánckomplexusoknak és köztük egy láncleképezések, amik kompatibilisek a rövid egzakt sorozatokkal, akkor felírva a homológiák hosszú egzakt sorozatát, akkor a két SES közötti leképezések kommutálnak a ∂_n leképezésekkel.*

Proof. N.B., ki lehetne számolni. ☐

Példa 7.3. 7/1 feladat. A leképezések injektívek, nullát írhatunk a sorozat elejére, kiegészítjük a cokerrel egzakt sorozattá. Ezek $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4$. A leképezéseknél mindenhol az $1 \mapsto 1$ leképezést kell venni hogy valóban faktorizáció legyen, ezért közöttük $\mathbb{Z}_4 \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_4$.

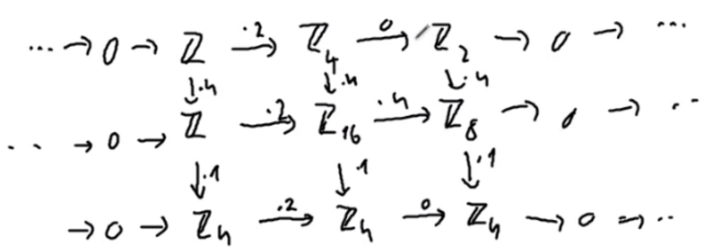


Figure 13: lánckomplexusok egzakt sorozata

A homológiák hosszú egzakt sorozatán a leképezéseket ki tudjuk találni egzaktságból. Kézzel is ki szeretnénk számolni a határleképezéseket, egyszerűen lekövetve, hogy hogyan mennek a leképezések.

Lemma 7.4 (Kígyó)**.** *Ha adott két rövid egzakt sorozat, és közöttük egy láncleképezés, akkor ezt kiegészítve a magokkal és komagokkal a mostmár 4-soros diagram is egzakt, sőt $0 \to ker\alpha \to ker\beta \to ker\gamma \to coker\alpha \to coker\beta \to coker\gamma \to 0$ is egzakt.*

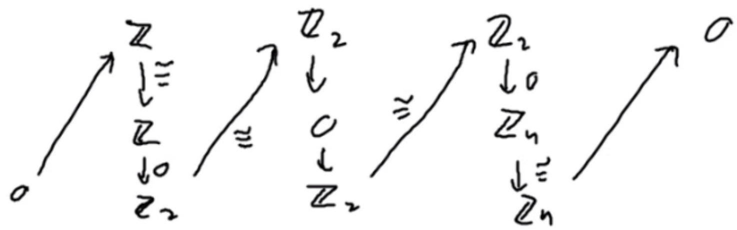


Figure 14: A homológiák és a leképezések

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & Y_1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & Z_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_0 \arrow[r] & Y_0 \arrow[r] & Z_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Figure 15:

Proof. Úgy tekintjük 'függőleges' dolgokat, mint komplexusokat: $0 \to X_1 \to X_0 \to 0$ hasonlóan $Y.$ és $Z.$. Erre most felírjuk a homológia egzakt sorozatát, és látjuk, hogy H_1 a megfelelő leképezés magja, H_0 a megfelelő leképezés komagja, és kapjuk a kígyót, mint a homológiák hosszú egzakt sorozatának határleképezését. □

7.1 Derivált funktorok

Definíció 7.5. Projektív feloldás a következő: Egy M modulusra ez egy egzakt sorozat

$$\cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

Ahol P_i mind projektívek. Duálisa az injektív feloldás. $0 \to M \to Q_0 \to \dots$, ahol Q_i injektívek.

A konstrukció világos, minden modulus faktora egy szabadnak, a magot megint lefedhetjük egy szabaddal s így tovább. Az injektív eset bonyolultabb, tudjuk, hogy mindenki beágyazható injektívbe, a sort folytatni nem olyan egyszerű, majd belátjuk.

Példa 7.6. 7/2. Az A algebra felett keressük $\frac{1}{2}$ és 2 projektív feloldásait. A generátorokat kell megnézni, és egymás után a magokat kell megint eltalálni. Vegyük észre, hogy nem egyértelmű ez, nyugodtan vehetünk

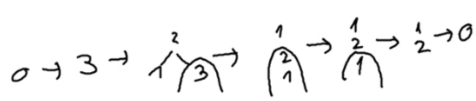


Figure 16:

még hozzá tagokat, amiket utána megint lefedünk.
A b feladatban az első projektív összeadandót kétszer kell venni, mert két egyes generálja a modulust. Továbbmenve a kettesek fedik egymást kétféle magokkal a végtelenségig, tehát nem véges itt.

8 Nyolcadik előadás

Példa 8.1.

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0$$

egy projektív feloldása a $\mathbb{Z}_2$-nek, de vehetünk be extra, fölösleges tagokat $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$.

Definíció 8.2. Csonkolt projektív feloldás, amikor a $\cdots \to P_0 \to M \to 0$-ból töröljük M-et, vagyis $\cdots \to P_0 \to 0$. Ugyanez persze működik duálisan az injektívekre.

Világos, hogy H_0-ja a csonkolt sorozatnak $P_0/Imd_1 = P_0/ker\alpha = Im\alpha = M$. Teljesen hasonlóan a csonkolt injektív feloldásnál.

Állítás 8.3. *Legyen $\dots P_i \to P_{i-1} \to \cdots \to M \to 0$ egy féligegzakt sorozat, ahol P_i projektív, és vegyünk egy $\cdots \to N_1 \to N_0 \to N \to 0$ egzakt sorozatot**. *Ekkor Minden $\phi : M \to N$ leképezésnek létezik felemeltje láncleképezésként. Továbbá ez az $f.$ homotópia erejéig egyértelmű.*

Megjegyzés 8.4. A projektivitás következő formája fog kelleni: P projektív pontosan akkor, hogyha $\alpha : P \to Y \leftarrow X : \beta$ adottak (nem feltétlen epi!) akkor hogyha $im\alpha \leq im\beta$, akkor létezik $\phi : P \to X$ amire $\beta\phi = \alpha$. Nyilván, Y helyett vehetjük $im\beta$-t.

Proof. Az f_n-eket rekurzívan definiáljuk, $f_{-1} = \phi$. f_0-ra a projektivitás miatt jön létre d_0 és ϕ-re. Ha f_{n-1}-ig megvan már, akkor elég látni, hogy $f_{n-1}d_n$ képe benne legyen imd'_n-ben. Mivel $N.$ egzakt, $imd'_n = kerd'_{n-1}$. Most $d'_{n-1}f_{n-1}d_n = f_{n-2}d_{n-1}d_n = f_{n-2}0 = 0$ az eddigi konstrukció, és az $M.$ féligegzaktsága miatt.
Elég látni, hogy a 0felemeltje homotóp a csupa nullával. Vegyük valami felemeltjét a nullának $g.$ ahol $g_{-1} = 0 : M \to N$. Ehhez kell $s_n : P_n \to N_{n+1}$ úgy, hogy $g_n = s_{n-1}d_n + d'_{n+1}s_n$. $s_{-1} = 0$ megfelelő persze, majd indkció. Ha megvan $n-1$-ig, szeretnénk definiálni s_n-et. $g_n - s_{n-1}d_n$-nek kellene egyeznie $d'_{n+1}s_n$-el. Ehhez kell, hogy a képek között a megfelelő tartalmazás fennáll $img_n - s_{n-1}d_n \leq imd'_{n+1} = kerd'_n$, tehát megint komponálunk d'_n-vel és megnézzük, hogy nulla lesz. $d'_n(g_n - s_{n-1}d_n)$ az első tagot kicserélhetjük $g_{n-1}d_n$-re. Tehát adódik $(g_{n-1} - d'_n s_{n-1})(d_n) = s_{n-2}d_{n-1}d_n = 0$. Megint a projektivitás miatt létezik ilyen s_n! ☐

Következmény 8.5. *Ha $P.$ és $P.'$ az M és M' csonkolt projektív feloldásai, akkor minden függvény felemelhető lánclekpezéssé, és a felemelés homotópia erejéig egyértelmű, vagyis minden leképezés megkapható $H_0(f.)$-ként.*

Megjegyzés 8.6. Persze kicserélhetjük a sorozatot a csonkoltra, megmarad az hogy az indukált leképezés láncleképezés, és a homoótpia is megmarad hiszen amúgy is nulla volt az elején.

Állítás 8.7. *Tetszőleges két projektív feloldás homotóp.*

Proof. Emeljük fel az id_M-et mindkét irányba $f.$ és $g.$ láncleképezésekké. Ekkor $g.f.$ is az id_M felemelése, tehát homotóp $id_{P.}$-al, és ugyanígy a másik irányban. ☐

Állítás 8.8. *Ha adott $F : Mod - R \to Mod - S$ additív kovariáns funktor, és $f. : P. \to P.'$ láncleképezés az M és M' csonkolt projektív feloldásai között. Ekkor $H_n(F.(P.))$ független a $P.$ választásától, sőt $H_n(F.(f.))$ is csak $H_0(f.)$-tól függ, azaz $\phi : M \to M'$.*

*de N_i nem feltétlen projektív!

Proof. Homotóp komplexusokokat $F.$ homotóp komplexusokba visz, mert additív, tehát a homológiák izomorfak. Teljesen hasonlóan, ha $f. \sim g.$, akkor a képeik is homotópok, tehát a homológián indukált leképezéseik azonosak. $\square$

Legyen F rögzített additív kovariáns funktor. M-hez választunk $P.$-ot, ezt elküldjük $F.(P.)$-ba, és vesszük a homológiát $H_n(F.(P.))$. Ha adott egy morfizmus $\phi : M \to M'$, ez felemelkedik $f.$-á, és ehhez is el tudjuk játszani a játékot, $H_n(F.(f.))$. A felemelés csak homotópia erejéig egyértelmű, tehát az $F.$ képe is, utána pedig már izomorfizmus erejéig.

Definíció 8.9. Derivált funktorok. Ha F additív kovariáns funktor, akkor F n-edig balderivált funktora $L_nF := H_n(F.(*))$.* Hasonlóan az n-edik jobbderivált funktora $R^nF := H^n(F.(*))$ † ugyanez csak injektív feloldásokkal. Ha G kontravariáns additív, akkor R^nG projektív feloldással van definiálva, és L_nG injektívekkel.

Speciálisan használni fogjuk a $h_M = Hom(M, -), h^\circ_N Hom(-, N), - \otimes_R M$ funktorokra.

Definíció 8.10. $Ext^n(M, N) = R^n h^\circ_N(M)$

Példa 8.11. 8/4 feladat, számoljuk ki $Ext^n_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$-t. Vesszük $\mathbb{Z}_2$ csonkolt projektív feloldását, meghomozzuk és homológiát számolunk. Mint óra elején láttuk $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{1 \mapsto 2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0$ a rezolúció. Csonkolunk, és hattatjuk rá a $Hom(-, \mathbb{Z}_2)$ funktort. A sor maga úgy fog kinézni, hogy $0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$, látszik, hogy d_1 a nulla leképezés középen. Mostmár látjuk, hogy $H_0 = \mathbb{Z}_2, H_1 = \mathbb{Z}_2$ és mindenki más nulla. Vegyük észre, hogy $Ext^0 = Hom$.

Definíció 8.12. Egy $Mod{-}R \to Mod{-}S$ additív funktor egzakt, hogyha egzakt sorozatot egzakt sorozatba visz. Balegzakt, hogyha minden $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ rövid egzaktat balról egzaktba visz, vagyis hogyha kovariáns, akkor $0 \to FX \to FY \to FZ$ egzakt‡. Ha kontravariáns, akkor $0 \to GZ \to GY \to GX$-nek kell egzaktnak lennie. Analóg módon a jobbegzakt.

Állítás 8.13. *Egy funktor egzakt pontosan akkor, hogyha minden rövid egzaktat rövid egzaktba visz.*

Proof. Egyik irány világos. Vegyünk egy hosszú egzakt sorozatot, felbontjuk rövid egzaktakra egyszerűen a magok és képek külön kiírásával. Még egy kis külön figyelmet igényel ha rövidebb az egzakt sorunk, mint egy rövid egzakt, de ekkor egyszerűen kiegészítjük a maggal és a komaggal. $\square$

Állítás 8.14. *Mindkét oldali Hom funktor balegzakt.*

Proof.

$$0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$$

Rátesszük a $Hom(M, -) = F$ funktort, $0 \to FX \to FY \to FZ$ kellene hogy egzakt marad. Ha adott $\phi : M \to X$, ehhez $\alpha\phi$-t rendelafunktor, mivel α injektív volt, ezért ϕ-nek 0-nak kell lennie, vagyis injektív a kompozíció. Továbbá persze féligegzakt FY-nál mert $\beta\alpha = 0$. $\psi : M \to Y$ adott, és $\beta\psi = 0$, akkor van őse? $m \mapsto \psi(m)$, de mivel ennek a β-ja 0, ezért van őse x, amire $\alpha(x) = \psi(m)$, csak azt kell látni, hogy homomorfizmus. Jóldefiniáltság világos, mert α injektív, tehát a mag egyenlő a képpel Y-nál. $\square$

*úgy nevezzük el, hogy merre végtelen a komplexus

†felülre írjuk, hiszen kohomológia

‡a végéről eltűnik a nulla

9 MISSING

10 Tizedik előadás

Múlt órai összefoglaló: ha adott egy additív funktor (ko- vagy kontravariáns), és a derivált funktor projektív/injektív feloldásokból van definiálva, akkor megfelelő oldali egzaktság esetén* teljesül, hogy a 0. derivált funktor természetesen izomorf az eredeti funktorral. Továbbá projektíveken/injektíveken $n > 0$. derivált funktorok nullát vesznek fel, és végül létezik egy hosszú egzakt sorozat, ami az F v G ráhúzása utáni féligegzaktat a nem egzakt végén folytatja a derivált funktorokkal.
Ez a 3 tulajdonság jellemzi is a derivált funktorokat ebben a 4 esetben (kovar/kontravar, proj/inj). Ebből kettőt írunk fel, ami a $Hom(M, -)$ és $Hom(-, N)$-re alkalmazható (másik kettő HF).

Tétel 10.1. *F kovariáns balegzakt additív funktor, és Φ_n kovariáns additív funktorok egy családja ($n \geq 0$). Tegyük fel hogy*

1. *Φ_0 természetesen izomorf F-el*
2. *$\Phi_n(Q) = 0$ ha Q injektív, $\forall n > 0$*
3. *$0 \to X \to Y \to Z \to 0$ rövid egzakt, akkor léteznek leképezések, hogy*

$$0 \to \Phi_0 X \to \Phi_0 Y \to \Phi_0 Z \to \Phi_1 X \to \dots$$

   is egzakt lesz.

Ekkor Φ_n természetesen izomorf $R^n F$-el.

Tétel 10.2. *G kontravariáns balegzakt additív funktor, és Φ_n kontravariáns additív funktorok egy családja ($n \geq 0$). Tegyük fel hogy*

1. *Φ_0 természetesen izomorf G-vel.*
2. *$\Phi_n(P) = 0$ ha P projektív, $\forall n > 0$*
3. *$0 \to X \to Y \to Z \to 0$ rövid egzakt, akkor léteznek leképezések, hogy*

$$0 \to \Phi_0 Z \to \Phi_0 Y \to \Phi_0 X \to \Phi_1 Z \to \dots$$

   is egzakt lesz.†

Ekkor Φ_n természetesen izomorf $R^n G$-vel.

Bizonyítás vázlat. Utóbbit bizonyítjuk, természetességtől eltekintünk. $\Phi_0 = G$ adott. Vegyünk egy modulust, és egy projektív feloldását $\dots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$. Az i. magot jelöljük K_i-vel (ergo $0 \to K_i \to P_{i-1} \to K_{i-1} \to 0$ egzakt, ahol $K_0 = M$). Alkalmazzuk erre a rövid egzaktra a harmadik pont feltevését!

$$\dots \to \Phi_m P_{i-1} \to \Phi_m K_i \to \Phi_{m+1} K_{i-1} \to \Phi_{m+1} P_{i-1}$$

*ott maradjon egzakt, ahol az eredeti modulust levágjuk a feloldásból

†vegyük észre hogy most a másik irányban megy a kontravariancia miatt

Mivel projektíveken eltűnik, középen izomorfizmust látunk $\Phi_{m+1}K_{i-1} = \Phi_m K_i$. Végigkövetve $\Phi_n(M) = \Phi_n(K_0) = \Phi_{n-1}(K_1) = \cdots = \Phi_1(K_{n-1})$. A derivált funktorra ugyanez teljesül, tehát elegendő R^1G és Φ_1 izomorfiáját látni. Nézzük a projektív feloldás elejét $0 \to K \to P \to M \to 0$. Itt is a hosszú egzaktat nézzük

$$0 \to GM \to GP \to GK \to \Phi_1 M \to \Phi_1 P = 0$$

Ugyanez igaz R_1G-re is Tehát mindkettő a $GP \to GK$ leképezés komagja, speciálisan izomorfak. □

A derivált funktorok axiomatikus jellemzéséből bizonyíható:

Tétel 10.3. *$Ext^n(M,N)$ ugyanaz, minthogyha $Hom(-,M)$ n. derivált funktorát vesszük az M-ben,vagy hogyha a $Hom(M,-)$ n. derivált funktorát vesszük az N-ben.*

Definíció 10.4. $Tor_n(M,N)$ pedig a $-\otimes N$ funktor n. derivált funktora.

Példa 10.5. Tekintsük a 9/6 feladat algebráját $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 2$ kétcsúcsú gráf, és $I = (\alpha\beta^2, \beta^3)$. Kérdés az $Ext^1(1, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix})$. Veszünk egy projektív rezolúció első szeletét

$$0 \to \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix} \to 1 \to 0$$

Az előbbi bizonyítást követve számolunk, húzzuk rá a $Hom(-, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix})$ funktort. A dimenziókat könnyen kiszámolhatjuk, 0 mert nincs 1-es tipusú, hasonlóan a második, majd 2, ezért mivel vektorterekről van szó, a keresett Ext^1-nek is 2 a dimenziója. Rögtön látunk is két nemizomorf bővítést. Ha a másodikat is szeretnénk, akkor a

Figure 17:

második maghoz vegyünk egy projektív rezolúció elejét, az első maggal lezárva, és ráhomozunk. (a dimenziók pont kiejtik egymást, nullát kapunk)

10.1 Modulusok bővítései

Definíció 10.6. $M, N \in Mod - R$, M-nek N-el való bővítése egy $0 \to N \to L \to M \to 0$ RES. Bővítésen a morfizmusok a láncleképezések RES-ek között. Két bővítése M-nek N-el ekvivalensek pontosan akkor, hogyha létezik egy morfizmus aminek M és N komponensei a megfelelő identitások.

Következmény 10.7. *Bővítések izomorfizmusánál az L, L'-n értelmezett leképezés izomorfizmus a kígyó lemma miatt.*

Következmény 10.8. *Bővítések ekvivalenciája ekvivalenciareláció.*

Példa 10.9. M és N minden felhasadó bővítése ekvivalens. $0 \to N \to L \to M \to 0$ és hasonlóan vesszősökkel, és a felhasadást mutató másik irányú leképezésekkel. Válasszuk $\kappa = \iota_1' id_N \pi_1 + \iota_2' id_M \pi_2 : L \to L'$. Kommutál? Igen, az összeg egyik oldala egzaktság, a másik pedig felhasadás miatt tűnik el.

Definíció 10.10. $Ex(M, N)$ jelölje az M-nek N-el való bővítéseinek az ekvivalenciaosztályait.

Definíció 10.11. Pullback: az $X \to Z \leftarrow Y$ diagram pullbackje egy $X \leftarrow U \to Y$ kiegészítése kommutatív négyzetté, ami teljesíti az alábbi univerzális tulajdonságot.

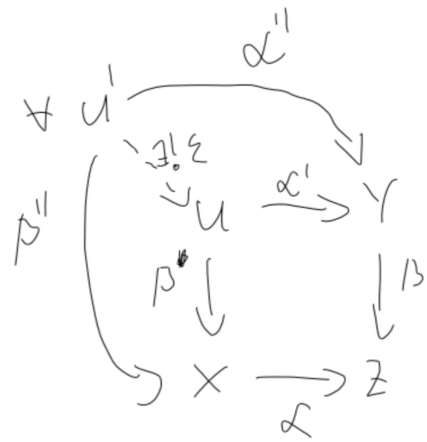


Figure 18: A visszahúzás univerzális tulajdonsága

Duálisan megfogalmazhatjuk az előretoltat is.

Állítás 10.12. *$Mod - R$-ben mindig létezik pullback és pushforward, és izomorfia erejéig egyértelmű.*

Proof. Ha U és U' is jó, akkor az univerzális tulajdonságban megkövetelt ϵ-ok kompozíciója és az id_U is megfelel, egyértelműség miatt izomorfak. □

Konstruáljuk meg! $U := \{\alpha(x) = \beta(y)\} \leq X \oplus Y$, ellenőrizzük le az univerzális tulajdonságot. $\alpha' = \pi_2|_U$ hasonlóan $\beta' = \pi_1|_U$, hova képezzük u'-t? $\epsilon(u') = (\beta''(u'), \alpha''(u'))$, más nem is lehet a kommutativitás miatt. Ez valóban U-ba képez, hiszen U' kommutatívan egészíti ki a diagramot.
A pushforwardhoz vesszük $X \oplus Y/(\alpha(z), -\beta(z))$-t mint U, állítjuk hogy ez megfelelő lesz. Ha adott egy U' a definíció szerint, akkor (x, y)-t le kell képeznünk $\alpha''(y) + \beta''(x)$-be. Ez persze értelmes az imént definiált U-n, amivel faktorizálunk ennek a leképezésnek a magjában van.

Állítás 10.13. *Visszahúzottban és előretoltban ha α vagy β injektív/szürjektív, akkor α' ill. β' is ilyen.*

Proof. 9/2, illetve 9 HF1. Konkrét konstrukciót használjuk. □

Definíció 10.14. Ha $\xi \in Ex(M, N)$ és adott egy $f : M' \to M$, akkor létezik $f\xi \in Ex(M', N)$ ami a ξ f-el való felemelése.

MISSING

11 Tizenharmadik előadás

Láttuk, hogy ha M-hez rögzítjük $\eta : 0 \to K \to P \to M \to 0$ projektív feloldásának első tagját, akkor igaz, hogy $\forall \xi \in Ex(M, N)$ előáll az η egy $g : K \to N$-nel való lenyomottjaként.

Tétel 11.1. *$Ex(M,N)$ egy Abel-csoport a Baer összeggel, mint művelettel, sőt $End\ M - End\ N$ bimodulus is). A nullemel a felhasadó bővítések osztálya, az ellentett pedig $(-id)\xi = -\xi$.*

Proof. A 10. feladatsor 1−4 feladatban ötletekkel meg van adva a bizonyítás. Az 1 d-hez mindhárom leképezésben ∇-t kell venni, és a visszahúzott és a felemelt átlósan megegyezik, hasonlóan az e-nél.
A korábbiak alapján a $Hom(K,N) \xrightarrow{\eta\cdot} Ex(M,N)$ szürjektív, a kettes feladat miatt művelettartó. Következményképp Abel csoportot kapunk persze, mivel $Hom(K,N)$ az. □

Tehát a $\eta\cdot$ egy szürjektív Abel csoport homomorfizmus, mi a magja?

Lemma 11.2. *$\xi : 0 \to N \to L \to M \to 0$ bővítés α, β leképezésekkel, és $g \in Hom(N, N')$, akkor ξg felhasad pontosan akkor, hogyha g átvezethető α-n, ergo létezik $g = N \xrightarrow{\alpha} L \to N'$ leképezés.*

Proof. Egyfelől ha ξg felhasad, akkor létezik a másik irányba egy $\tilde{L} \to N'$ leképezés, az átvezetett pedig $L \to \tilde{L} \to N'$ lesz, hiszen az előrelökött diagramban a négyzetek kommutálnak.
Visszafelé tegyük fel, hogy átvezethető valami $\gamma : L \to N'$, mivel egy pushout diagramunk van, létezik $\epsilon : \tilde{L} \to N'$ amire kommutál visszafelé, és az id ugyanezt tudja, az univerzális tulajdonság miatt ezek egyenlőek. □

Tétel 11.3. *$Ex(M,N) = Ext^1(M,N)$*

Proof. $\eta : 0 \to K \to P \to M \to 0$ az előbbi jelöléssel. Alkalmazzuk a $Hom(-,N)$ funktort. A deriváltfunktorok hosszú egzakt sorozatában

$$0 \to Hom(M,N) \xrightarrow{\beta\cdot} Hom(P,N) \xrightarrow{\alpha\cdot} Hom(K,N) \to Ext^1(M,N) \to 0$$

látszik, a végén nulla van mert P projektívnak lett választva. Az előbb láttuk, hogy $Hom(P,N) \xrightarrow{\alpha\cdot} Hom(K,N) \xrightarrow{\eta\cdot} Ex(M,N) \to 0$ is egzakt a lemma miatt, a mag pont az akit át lehet vezetni alfán.
Következik, hogy $Ex(M,N)$ pont α komagja, de ez egyenlő $Ext^1(M,N)$-el is, és készen vagyunk. □

Példa 11.4. $A_A = \substack{1\\2\\2} \oplus \substack{2\\2\\2}$. Hogyan találjuk meg $Ex(1, \substack{2\\2\\2})$ b-ziselemeit ha nem látjuk rögtön? $0 \to \substack{2\\2} \to \substack{1\\2\\2} \to 1 \to 0$.
$Hom(\substack{2\\2}, \substack{2\\2\\2})$ két dimenziós, akét báziselemmel kell pushoutot csinálni. Középen az egyiknél ${}^{2}{}_{\substack{2\\2}}{}^{2}$, a másiknál ${}^{\substack{2\\2}}{}_{2}{}^{1}$.

11.1 Homologikus dimenziók

Definíció 11.5. $M \in Mod - R$ projektív dimenziója $pd\ M = n$ hogyha M-nek létezik n hosszú* projektív feloldása $0 \to P_n \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$, de rövidebb nem. Ha nincs véges feloldás, akkor pedig végtelen.
Hasonlóan M injektív dimenziója $id\ M = n$ ha létezik n hosszú injektív feloldása, de rövidebb nem (ugyanazon hosszkonvencióval mint az előbb). Ha nincs, akkor végtelennek definiáljuk itt is.

Állítás 11.6. *$pd\ M = 0$ pontosan akkor ha M projektív, pontosan akkor ha $Hom(M,-)$ egzakt, pontosan akkor ha $Ext^1(M,-) = 0$.*
$id\ M = 0$ pontosan akkor ha M injektív, pontosan akkor ha $Hom(-,M)$ egzakt, pontosan akkor, hogyha $Ext^1(-,M) = 0$.†

*ez $n+1$ db modulus, de n db nyíl!
†ergo a nulla funktor, minden N-re $Ext^1(N,M) = 0$

Proof. Első ekvivalencia triviális, $P_0 = M$ izomorfizmus jó lesz 0 hosszú feloldásnak. A második ekvivalencia is volt, és a harmadik egyik fele is volt. Ha $Ext^1(M,-) = 0$, akkor tetszőleges $0 \to X \to Y \to Z \to 0$-ra ha ráhúzzuk ezt a Homot, akkor egzaktat kapunk mivel a következő tag a derivált funktorok HESében nulla, ergo egzakt a $Hom(M,-)$ funktor.
Injektívekre teljesen hasonlóan. □

Definíció 11.7. A projektív feloldás magjait $\Omega_i := ker(P_{i-1} \to P_i)$ jelöljük és sziziginek hívjuk.
Injektív feloldás magjai a koszizigik, $\mho_i$-vel jelöljük $coker(Q_{i-1} \to Q_i)$.

Állítás 11.8. *M modulusra ekvivalensek:*

1. *k hosszú a legrövidebb projektív feloldás*
2. *Valamely projektív feloldás k. szizigije projektív, de a korábbiak nem*
3. *minden projektív feloldásra az előbbi*
4. *$Ext^{k+1}(M,-) = 0$, de létezik N amire $Ext^k(M,N) \neq 0$*

Proof. Vegyük észre, hogy az Ext-ek hosszú egzakt sorozatából következik, hogy $Ext^{k+1}(M,N) = Ext^1(\Omega_k, N)$, ahol Ω_i az M i. szizigije. Ezért $Est^{k+1}(M,-) = 0$ pontosan akkor eljesül ha $Ext^1(\Omega_k,-) = 0$, ami ekvivalens azzal hogy Ω_k projektív. Ez adja a 2-3-4 ekvivalenciáját.
Kell még a $3 \to 1$. Egyrészt kell egy k hosszú projektív feloldás, ami létezik mert elvághatjuk a k. szizigi után, ami feltevés szerint projektív. Rövidebb nem lehet, mert akkor egy korábbi szizigi is projektív lenne. Ugyanezen érvelés mutatja az $1 \to 2$ irányt is, egy legrövidebb feloldásban a k. szizigi projektív. A többi nem lehet projektív, mert akkor létezne rövidebb projektív feloldás. □

Példa 11.9. $A_A := 2^1_4 3 \oplus^2_4 \oplus^3_4 \oplus 4$. Micsoda $pd1$? $0 \to 4 \to^2_4 \oplus^3_4 \to 2^1_4 3 \to 1 \to 0$ tehát 2.

Állítás 11.10. *$0 \to X \to Y \to Z \to 0$ egzakt és $pd\ X, pd\ Y, pd\ Z$ közül kettő véges, akkor a harmadik is. Továbbá bővítés projektív dimenziója legföljebb annyi mint a két összetevőnek $pdY \leq \max\{pdX, pdZ\}$.*

Proof. $Hom(-,N)$-el vegyük a hosszú egzaktat. Egyszerűsített jelölés $Hom(M,N) =: (M,N)^0$ és $Ext^k(M,N) =: (M,N)^k$.

$$\dots \to (Z,M)^k \to (Y,M)^k \to (X,M)^k \to (Z,M)^{k+1} \to (Y,M)^{k+1} \to (X,M)^{k+1} \to \dots$$

Világos hogy $(Z,M)^k$ a két komponens extjei közé esik, ahonnan ezek nullák, egzaktság miatt $(Y,M)^k$ is nulla lesz, hasonlóan a többire, tehát ha bármely kettő véges, akkor a harmadik is.
A konkrét becsléshez ha a maximum végtelen nincs mit bizonyítani. Ha $\max\{pdX, pdZ\} = n$, akkor $k \geq n$-re igaz, hogy $(X,N)^{k+1}$ és $(Z,N)^{k+1} = 0$ minden N-re, tehát a középső $(Y,N)^{k+1}$ is eltűnik. □

Következmény 11.11. *Ha $0 \leq M_1 \leq ... \leq M$, és $pdM_{i+1}/M_i \leq n$, akkor $pdM \leq n$, lépésenként bővítve.*

Megjegyzés 11.12. Ha $Ext^k(M,-) = 0$, akkor persze $Ext^{k+1}(M,-) = 0$ ugyanis $Ext^{k+1}(M,N) = Ext^k(M, \mho_1(N)) = 0$.

Példa 11.13. 10/5 c. Itt is a véges eset érdekes, ha pdY végtelen, és pdX véges, akkor pdZ-nek végtelennek kell lennie az előző állítás miatt.

$$(Y,N)^{n-1} \to (X,N)^{n-1} \to (Z,N)^{n-1} \to (Y,N)^n \to (X,N)^n \to (Z,N)^{n+1} \to (Y,N)^{n+1}$$

Ebben $(X,N)^n = (Y,N)^{n+1} = 0$ ezért $(Z,N)^{n+1} = 0$, és a szürjektivitás és dimenziófeltétel miatt $(Z,N)^n \to (Y,N)^n$ szürjektív, és mivel létezik olyan N hogy utóbbi nem nulla, ott előbbi sem tűnhet el.

Definíció 11.14. R gyűrű *jobboldali globális dimenziója* $rgldim\ R := \sup\{pdM : M \in Mod-R\}$, a baloldali hasonlóan $lgldimR$ a balmodulusok projektív dimenzióinak szuprémuma.

Állítás 11.15. *$rgldimR$ ugyanaz, ha injektív dimenziókkal definiáljuk!*

Proof. $rgldimR = \sup\{n : \exists M, N \in Mod - R : Ext^n(M,N) \neq 0\}$, ez pedig abszolút szimmetrikus. □

Megjegyzés 11.16. $rgldimR$ és $lgldim$ általában nem azonos. Persze kommutatív esetben igen, pl $\mathbb{Z}$-re, illetve véges dimenziós k-algebra esetben, tudniillik a k-dualitás $Mod-A$ projektív feloldásait $A-Mod$-beli injektív feloldásokba viszi.

Állítás 11.17. *A véges dimenziós algebra, ekkor $gldimA = \max\{pdS | S\ egyszerű\}$.*

Ez következni fog az alábbi tételből

Tétel 11.18. *$rgldimR = \sup\{pdR/I | I_R \leq R_r\}$ tehát elég a globális dimenziót ciklikus modulusokon ellenőrizni. Algebra esetben ezek véges dimenziósak.*

Példa 11.19. 10/7 a) Elég az egyszerűeknek a feloldásait nézni. $pd1 = 1$, de $pd2 = \infty$, tehát $gldimA = \infty$.

12 Tizennegyedik előadás

Proof. Legyen $n = \sup\{pdR/I : I \leq R_R\}$. Ha ez végtelen, akkor a globális dimenzió is az, és készen vagyunk. Ha véges, akkor $Ext^{n+1}(R/I, N) = 0$ minden I, N-re. Ebből szeretnénk, hogy $Ext^{n+1}(M,N) = 0$ minden M, N-re. $0 \to N \to Q_0 \to Q_1 \to \dots$ injektív feloldás N-hez, ennek vegyük a koszizigijeit $\mho_1, \dots$. Ugyanúgy mint a szizigikkel a hosszú egzakt sorozat miatt a magas extekek redukálhatjuk: $Ext^{n+1}(M,N) = Ext^1(M, \mho_n)$. Feltevés szerint $Ext^1(R/I, \mho_n) = 0$. A másik oldalon $0 \to I \to R \to R/I \to 0$-ra alkalmazzuk a $Hom(-, \mho_n)$ funktort és az egzakt sort

$$0 \to Hom(R/I, \mho_n) \to Hom(R, \mho_n) \to Hom(I, \mho_n) \to 0$$

feltevés szerint, ergo szürjektív a visszahúzás az $I \hookrightarrow R$ leékpezésnél az n. koszizigikre. A Baer kiritérium/injektív teszt lemma miatt ez bizonyítja, hogy $\mho_n$ injektív. Következik, hogy $Ext^1(-, \mho_n) = 0$, tehát $Ext^{n+1}(-, N) = 0$. □

Állítás 12.1. *R féligegyszerú pontosan akkor hogyha a (bal vagy jobb) globális dimenziója nulla.*

Definíció 12.2. M modulus féligegyszerű pontosan akkor ha egyszerűeknek a direkt összege. R gyűrű féligegyszerű, hogyha R_R az.

Megjegyzés 12.3. Automatikusan véges ez az összeg, mert az 1 csak véges sok komponensben szerepel.

Tétel 12.4. *R féligegyszerű pontosan akkor, hogyha minden R-modulus féligegyszerű.*

Tétel 12.5 (Wedderburn-Artin)**.** *R féligegyszerű pontosan akkor, hogyha izomorf véges sok ferdetestek fölötti mátrxgyűrűk összegével.*

Bizonyítás ötlet. A vissza irány eléggé világos, az oda irányhoz pedig az fog kiderülni, hogy $End(R_R) = R_R$. $R = S_1^{k_1} \oplus \dots$, és $End(S_1)$ egy ferdetest, hiszen a kép vagy a nulla vagy az egész. □

Következmény 12.6. *R-ből az R^{op}-ba a transzponálás izomorfizmus R és R^{op} között, és a féligegyszerűség kétoldali tulajdonság.*

Állítás 12.7. *M modulus féligegyszerű pontosan akkor, hogyha minden $U \leq M$-re U direkt összeadandó. Ekvivalens azzal is, hogy M egyszerűek nem feltétlenül direkt összege.*

A globális dimenziós állítás bizonyítása. Egyfelől $R_R = \oplus_1^m S_i$ egyszerűek direkt összege. Minden S_i projektív, sőt minden egyszerű projektív, hiszen R_R faktora, ha valaki nem szerepel az az S_i-k között, akkor a leképezés csak a nulla lehet, ergo csak az S_i-k az egyszerűek. Következik, hogy R/I-re (aminek szintén véges kompozíciólánca van, mert R-nek véges), ezért $rgldimR_R = 0$.
Másik irányba $U \leq V$ modulusokra V/U projektív, hiszen $gldimR = 0$ miatt mindenki projektív, emiatt U direkt összeadandó a V-ben, mert felhasad az egzakt sorozata, és V féligegyszerű. □

Tétel 12.8. *R-re ekvivalens:*

1. *$rgldimR \leq 1$*
2. *projektív modulus minden részmodulusa projektív*
3. *injektív modulus minden faktora is injektív*
4. *R_R minden részmodulusa projektív*

Az ilyen R-et jobböröklődőnek hívjuk.

Proof. $1 \to 2$ minden $U \leq P$ szizigije a P/U-nak, a dimenziófeltétel miatt U projektív. Visszafelé $0 \to \Omega_1 \to P_0 \to M \to 0$ mivel része projektívnek, ezért a dimenzió legföljebb 1.
$1 \leftrightarrow 3$ ugyanígy duálisan.
Az $2 \leftrightarrow 4$-hez használjuk hogy elég $I \leq R_R$-eket nézni. Egyik irány nyilvánvaló, a másikhoz pedig a 11.18 tétel, R/I-nek legfeljebb 1 a projektív dimenziója. □

Megjegyzés 12.9. Általában a kétoldali globális dimenzió nem egyenlő, sőt $\forall 1 \leq m, n \leq \infty$ létezik R, amire $lgldimR = m$, $rgldimR = n$. :'(
Egy egyszerűbb ellenpélda kis esetre Lam:Lectures on Modules and Rings 46. o. "Small's example". Felsőháromszög mátrixok ahol bal felül egész, a második oszlopban pedig racionális számok állnak. Erre igaz, hogy jobböröklődő, de nem balöröklődő. pfuj.

Tétel 12.10 (Hilbert szizigitétele 1890)**.** *$gldimk[x_1, \dots, x_n] = n$*

Tétel 12.11 (Ausland tétele)**.** *Minden véges dimenziós A algebra beágyazható részalgebraként egy véges globális dimenziójúba.*

12.1 Adjungált funktorok

Definíció 12.12. $F : C \to D$ és $G : D \to C$ kovariáns funktorok adjungáltak, hogyha $Hom_D(F(X), Y) = Hom_C(X, G(Y))$ teljesül minden X, Y-ra.
Mivel nem szimmetrikus adefiníció, precízebben mondhatnánk, hogy F a G baladjungáltja, vagy G az F jobbadjungáltja.

Példa 12.13. $F : Set \to Grp$ a szabad csoport funktor, és $G : Grp \to Set$ a felejtő funktor. $Hom(F(X), H) = Hom(X, H)$ persze igaz lesz, minden $X \to H$ halmazleképezéshez létezik pontosan egy leképezés $F(X)$-ből H-ba, ami ezt a leképezést kiterjeszti, és csoporthomomorfizmus, ez pont a szabad csoportok univerzális tulajdonsága.

Tétel 12.14. *Legyen R, S két gyűrű. Tekintsük az $A_R, {}_RB_S, C_S$ (bi)modulusokat. Ekkor $Hom_S(A \otimes_R B, C) = Hom_R(A, Hom_S(B, C))$ természetesen, azaz a $- \otimes_R B : Mod_R \to Mod_S$ illetve a $Hom(B, -) : Mod_S \to Mod_R$ adjungált funktorok.*

Proof. $Hom_R(A, Hom_S(B, C))$ egy eleme egy $a \mapsto (\phi : B \to C)$ leképezés, erre úgy is gondolhatunk, hogy minden a, b-hez rendel egy c elemet, ergo egy $A \times B \to C$ léképezés, ami homomorfizmus mindkét változójában, és középlineáris a homomorfizmusségfeltételek miatt $(b)(\phi r) = (rb)(\phi)$. Ezzel pont a tenzorszorzás univerzális tulajdonságát kapjuk, és valóban természetesen megfelel egymásnak a két objektum. $\square$

Tétel 12.15. *Minden M_R modulus beágyazható injektívbe.*

Proof. Az állítást láttunk Abel csoportokra. $\oplus\mathbb{Q}/V \geq \oplus\mathbb{Z}/V = U$.
Így minden M_R-hez létezik $U_\mathbb{Z}$ Abel csoport hogy $M_\mathbb{Z} \leq U_\mathbb{Z}$. Belátjuk a következő állításokat: $M_R = Hom_R({}_RR_R, M_R) \leq Hom_\mathbb{Z}({}_RR_\mathbb{Z}, M_\mathbb{Z}) \leq Hom_\mathbb{Z}({}_RR_\mathbb{Z}, U_\mathbb{Z})$, és ez utóbbi injektív R-moduls.
Az első egyenlőség egyszerű, $\phi \mapsto \phi(1)$ megfelelő lesz, $R{-}mod$ hom is. Injektív, hiszen $1\phi = 1\psi$ akkor $r \in R$-re $(1r)\phi = (1\phi)r = (1\psi)r = r\psi$. Szürjektív is, hiszen minden m-re $1 \mapsto m$ kiterjed homomorfizmussá, mert R_R szabad. A két tartalmazás nyilvánvaló, mért lesz injektív az utolsó tag?
Elég látni, hogy $Hom_R(-, Hom_\mathbb{Z}({}_RR_\mathbb{Z}, U_\mathbb{Z}))$ egzakt. Adjungáltság miatt ez természetesen izomorf $Hom_\mathbb{Z}(- \otimes_R {}_RR_\mathbb{Z}, U_\mathbb{Z})$-vel.
Az egyik funktor egzakt pontosan akkor ha a másik a természetes izomorfizmus miatt.
Ez két funktor kompozíciója, belátjuk hogy mindkettő egzakt. $(M \otimes_R {}_RR_\mathbb{Z}) \to M_\mathbb{Z}$ egy modulusizomorfizmus $m \otimes r \mapsto mr$. Következik, hogy egzaktból egzaktat csinál. A $Hom(-, U_\mathbb{Z})$pedig egzakt, hiszen $U_\mathbb{Z}$ injektív. $\square$

Megjegyzés 12.16. Ha k-algebrákban gondolkodunk, akkor lehet $\mathbb{Z}$ helyett k fölött csinálni az előbbit, és persze test feletti vektortereknél mindenki injektív.