Kähler sokaságok
kahlersu0sm20em

Előadó: Szőke Róbert

2022/2023/2

1 Első előadás

M sima sokaság, használni fogjuk a következő fogalmatkat. Metrika, görbület, érintőnyaláb, valós differenciálformák, d operátor, de Rahm kohomológia.
M komplex sokaság, adott rajta egy Riemannmetrika g, szeretnénk valamilyen értelemben kompatibilissé tenni ezt a két struktúrát, amikor ez sikerül, azokat a sokaságokat hívunk Kählernek. Ha M kompakt Kähler, akkor ez erős topológiai megszorításokat ad.
Először a komplex struktúrát akarjunk "infinitezimálisan" megvizsgálni. $n = 1$ a komplex síkon minden ponthoz vehetjük a $T_p\mathbb{C}$ érintőteret. Ezt kifeszíti valós módon a ∂_x és a ∂_y vektorok. A komplex struktúra ad nekünk egy i-vel való szorzást az érintőtéren is, ha van egy görbénk, akkor eltolva az origóba egy máik érintővektort reprezentál $i\cdot$ ez a görbe. Kapunk egy $j : T_p\mathbb{C} \to T_p\mathbb{C}$ valós lineáris leképezést. A bázisvektorokon ez $\partial_x \mapsto \partial_y$ és $\partial_y \mapsto -\partial_x$-ként hat. Látványosan $j^2 = -id$. Ha $f = u + iv$ holomorf, a valós deriváltja $\begin{matrix} a & -b \\ b & a \end{matrix}$ alakú lesz, ahol $a = \partial_x u$ és $b = \partial_x v$. Átfogalmazhatjuk ezzel a y leképezéssel is úgy, hogy $f'_{\mathbb{R}}(p)j_p = j_{f(p)}f'_{\mathbb{R}}(p)$, ergo hogy a deriváltja komplex lineáris.
Hasonlóan megy minden $\mathbb{C}^n$-ben, koordinátánként. Ugyanúgy kapunk egy J endomorfizmusát az érintőnyalábnak ami koordinátánként ugyanúgy hat a természetes bázisban, és a holomorfitás megint annyit tesz, hogy $F'_{\mathbb{R}}(q)J_p = J_{f(p)}F'_{\mathbb{R}}(p)$.
Ha most M egy komplex sokaság, $p \in M$ és vehetünk egy holomorf atlaszt körülötte. A térképezéssel átvihetjük a J operátort T_pM-re, a holomorf koordinátázás miatt ez jóldefiniált, az áttérések deriváltja felcserélhető a J-kkel. W H Y

Definíció 1.1. Majdnem komplex struktúra egy $J : T_pM \to T_pM$ endomorfizmus minden $p \in M$-re, amire $J^2 = -id$ teljesül.

Definíció 1.2. Legyen M komplex sokaság, g egy Riemann metrika rajta. Azt mondjuk, hogy g Hermitikus ha $\forall p \in M$-re J_p ortogonális, ergo $g(J_pX, J_pY) = g(X, Y)$.

Állítás 1.3. *Ha M egy komplex sokaság, akkor mindig létezik rajta Hermitikus metrika.*

Proof. Ha g tetszőleges, akkor $\frac{1}{2}(g \circ J \otimes J + g)$ megfelel. $\square$

Definíció 1.4 (Erich Kähler, 1933)**.** Ha (M, g) Hermitikus, definiáljuk az $\omega(X, Y) := g(JX, Y)$ metrikához tartozó alapformát.

Állítás 1.5. *ω bilineáris, ami teljesen világos. Továbbá $\omega(Y,X) = g(JY,X) = g(J^2Y,JX) = -g(JX,Y) = -\omega(X,Y)$ tehát antiszimmetrikus, egy 2-forma pontonként. Végül ha $\omega(X,\cdot) \equiv 0$, akkor mivel ez megegyezik $g(JX,\cdot)$-tal, ebből pedig következik g metrika volta miatt, hogy $JX = 0$, és mivel J invertálható, ezért $X = 0$, vagyis ω nemelfajuló forma.*

Definíció 1.6. (M,g) Hermitikus sokaság Kähler, hogyha $d\omega = 0$.

Megjegyzés 1.7. Ha (M,g) Kähler, akkor (X,ω) szimplektikus.

Példa 1.8. (M^2,g) egy Hermitikus sokaság, akkor automatikusan Kähler, hiszen $d\omega$ egy 3-forma lenne, amiből csak a nulla van. Következő egyszerű példa a $\mathbb{C}$ a standard dx^2+dy^2 Euklideszi metrikával. Veszünk két vektort $A = \alpha\partial_x + \beta\partial_y$, és $B = \gamma\partial_x + \delta\partial_y$. Kiszámoljuk $\omega(A,B)$-t.

$$g(\alpha\partial_y - \beta\partial_x, \gamma\partial_x + \delta\partial_y) = \alpha\delta - \beta\gamma = det(\begin{Bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{Bmatrix})$$

Ez a mátrix megegyezik a $\begin{matrix} dxA & dxB \\ dyA & dyB \end{matrix}$ mátrix determinánsával,ami pedig pont $dx \wedge dy(A,B)$ definíció szerint, ami látványosan zárt, tehát valóban Kähler. $n > 1$ esetben is hasonlóan lehet eljárni komponensenként $\sum dx_i \wedge dy_i$, ami szintén triviálisan zárt.
ω komplex alakja. $n = 1$-re ugye $dx \wedge dy$-t kaptunk. $x = (z+\bar{z})/2,\ y = (z-\bar{z})/2$, ha ezt beírjuk a formulába. Gyakorlatilag ingyen kiterjed a d operátor komplex értékű formákra/függvényekre, valós és képzetes részre külön-külön. Amit kapunk az $\frac{-i}{4}(0 + dz \wedge (-d\bar{z}) \wedge d\bar{z} \wedge dz + 0) = \frac{i}{2}dz \wedge d\bar{z}$. $n > 1$-re teljesen hasonlóan koordinátánként átírhatjuk a formát $\sum dx_i \wedge dy_i = \frac{i}{2}\sum dz_i \wedge d\bar{z}_i$. A harmadik jelölésre is átírjuk: $\bar{\partial}|z|^2 = zd\bar{z}$, majd $\frac{i}{2}\partial\bar{\partial}|z|^2 = \frac{i}{2}1dz \wedge d\bar{z}$ alakban kapjuk meg a Kähler formát. Általában is $\sum dx_i \wedge dy_i = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}||z||^2$.

Ha (M,g) Riemann sokaság, $f > 0$ pozitív valós értékű függvény, akkor átskálázhatjuk a metrikát (M,fg) is Riemann sokaság. Lehet-e így új Kähler sokaságokat gyártani?

Gyakorlat 1.9. *Ha (M,g) Kähler, $dimM > 1$ és (M,fg) is Kähler, akkor f konstans.*

Példa 1.10. További példa Kähler sokaságokra $n = 1$ esetben először. $M = \{|z| < 1\} \subset \mathbb{C}$ az egységkörlap a hiperbolikus metrikával $g_h = \frac{4}{(1-|z|^2)^2}g_e$. A görbülete konstans -1. Mi a Kähler forma? Az Euklideszit már tudjuk, minden pontban csak egy számmal szorzunk, ezért $\omega = \frac{4}{(1-|z|^2)^2}dx \wedge dy = \frac{2i}{(1-|z|^2)^2}dz \wedge d\bar{z} = (-2i)\partial\bar{\partial}log(1-|z|^2)$.
Általában magasabb dimenzióban találjuk a komplex n-dimenziós hiperbolikus teret. Alaphalmaz az egységgolyó, $\{z \in \mathbb{C}^n : ||z|| < 1\}$. Nem a metrikát adjuk meg hanem a Kähler formát, ez $-2i(\partial\bar{\partial}log(1-||z||^2))$. Ez nem a már ismert valós hiperbolikus tér, ennek nem konstans a metszetgörbülete, de a holomorf metszetgörbülete megmarad azonosan -1-nek (itt csak komplex altereknek nézzük a görbületét).

$n = 1$-re legyen $f = u + iv$ alakú, definiáljuk $\bar{\partial}f = f'_{\bar{z}}d\bar{z}$ és $\partial f = f'_z dz$. Leellenőrihető, hogy $\partial f + \bar{\partial}f = df$. Ha $\alpha = adz + bd\bar{z}$, akkor $\bar{\partial}\alpha = \bar{\partial}a \wedge dz$, és $\partial\alpha = \partial b \wedge d\bar{z}$. Függvényre alkalmazvalátványos, hogy $\bar{\partial}^2 f = 0 = \partial^2 f$. A vegyes tagok pedig $\partial\bar{\partial}f = f''_{\bar{z}z}dz \wedge d\bar{z}$ illetve $f''_{z\bar{z}}d\bar{z} \wedge dz$, tehát egy előjelváltásban tér el a két vegyes derivált.

Példa 1.11. Az utolsó fontos példánk a projektív tér P^{n-1}, több módon is meg fogjuk csinálni, először Mumford konstrukciója. X komplex sokaság, amin adott egy Hermitikus Riemann metrika. Tegyük fel, hogy egy G Lie-csoport hat izometriákkal. Minden x-re tekinthetjük a G_x stabilizátort, ennek az elemei indukálnak valós lineáris endomorfizmusokat T_xX-en. Ezzel kapjuk a G_x-nek egy ρ_x unitér reprezentációját.

Állítás 1.12 (Mumford). *Tegyük fel, hogy $\forall x \in X$-re a J_p leképezés benne van $im\rho_x$-ben. Ekkor g Kähler metrika.*

Proof. Kell, hogy ω zárt. G megőrzi J-t és a metrikás is, tehát a Kähler forma is invariáns rá. Vegyünk $u, v, w \in T_xX$ érintővekorokat, kiszámoljuk $d\omega_x(u, v, w)$-t. Világos, hogy $d\omega$ is invariáns G-re. Ha $a \in G_x$,akkor a keresett szám megegyezik $d\omega_x(a_*u, a_*v, a_*w)$-vel, válasszuk a-t olyannak, hogy $a_*|_x = J_x$. Ekkor $d\omega_x(u, v, w) = d\omega_x(Ju, Jv, Jw) = d\omega_x(-u, -v, -w)$. □

2 Második előadás

M komplex, g Riemann metrika, csinálunk egy új metrikát $h = g + g \circ J \otimes J$, ami könnyen láthatóan egy Hermitikus metrika lesz már. Fordítsuk figyelmünket $M = P^n$-re, és rajta egy h Hermitikus metrikát. A projektív tereken hat az $U(n+1)$ csoport projektív transzformációkkal (tranzitívan). Egy $l \in P^n$ pont stabilizátora U_l irreducibilisen hat T_lP^n-en. A h metrikát kiátlagoljuk az $U(n+1)$-re kiátlagolva kapunk egy invariáns Hermitikus metrikát. Pozitív konstans szorzó erejéig egyetlen ilyen metrika létezik a projektív téren, erre fogjuk belátni hogy Kähler.
A Mumford kritériumot fogjuk használni.

Proof. $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to P^n$ a standard projekció. Tekintsünk egy v nem nullavektort, és generált egyenest, a projektív pontját. Meg kell vizsgálnunk egy pont stabilizátorát. Kapunk egy $\rho : U_l(n+1) \to T_l(P^n)$, az érdekel, hogy a J_l benne van-e a képben. Azonosítjuk $T_v\mathbb{C}^{n+1}$-et $\mathbb{C}^{n+1}$-el, tekintsük $v^\perp = W$-t. Erre gondoljunk úgy, mint egy altér ebben a $\mathbb{C}^{n+1}$-ben, π_* egy izomorfizmust létesít W és T_lP^n között (ahol $l = [v]$). Mozgathatjuk az l egyenest önmagában, ez egy S^1-et ad a stabilizátorba (hiszen az osztály ugyanaz), vagy a komplementumon alkalmazhatunk egy unitértranszformációt, ami pontonként helyben hagyja l-et, ergo $U_l = U(n) \times S^1$, és az előbbi vetítés miatt a stabilizátor képe pont $U(W)$, tehát a J_l valóban eleme hiszen az i-vel való szorzás unitér. □

2.1 de-Rahm kohomológia

M sima sokaság, $f \in c^\infty(M, \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C})$. Ehhez hozzá lehet rendelni a df külső derivált 1-formát M-en.

Tétel 2.1. *Létezik egy d külső derivált operátor ami sima k formákból $k+1$ formákat csinál. Ez az operátor lineáris, az ékszorzatra gradált kommutatív $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{grad\omega_1}\omega_1 \wedge d\omega_2$. Továbbá $d^2 = 0$! és kiterjeszti a függvényekről értelmezett df operátort.*

Ha $M = U \subset \mathbb{R}^n$ egy nyílt részhalmaz, akkor $\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_I dx^I$.

Definíció 2.2. Ha $\alpha \in \Omega^k(M)$ egy sima k-forma, akkor egzaktnak hívjuk, hogyha létezik $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$, amire $d\beta = \alpha$. Vegyük észre, hogy ha α egzakt, akkor $d\alpha = d^2\beta = 0$.

Definíció 2.3. α zárt, hogyha $d\alpha = 0$.

$H^k_{dR}(M, \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}) := kerd_k/imd_{k-1}$ a k. de-Rahm kohomológia csoport. Ha M, N sima sokaságok, és egy $F : M \to N$ sima leképezés, akkor ez indukál egy leképezést a sima formák között visszahúzással. $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$, ami $\alpha(v_1, \ldots, v_k) \mapsto \alpha(TFv_1, \ldots, TFv_k)$. A visszahúzás művelete kompatibilis a külső deriválással, tehát ez indukál egy leképezést a kohomológiacsoportokon. Továbbá a kompozícióra is szépen viselkedik, vagyis $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$, és az identitás identitást indukál, vagyis H_{dR} egy funktor.

Tétel 2.4. *Két sima leképezés $f_0, f_1 : M \to N$ homotópok a sima kategóriában, akkor ugyanazt indukálják a kohomológiákon.*

Következmény 2.5 (Poincaré lemma). *Ha M simán pontrahúzható, akkor $H^k_{dR}(M, \mathbb{R}v\mathbb{C}) = 0$ $k \geq 1$ esetén.*

Állítás 2.6. *Legyen M, g Kähler. Legyen $N < M$ zárt komplex részsokaság, akkor ez is Kähler a $g|_N$ metrikával*

Proof. A metrika megszorítása is metrika, ezzel semmi gond. Hermitikusság és a zártságra hatjunk. $p \in N$, $u, v \in_T pN$. Mivel N komplex részsokaság, a T_pN érintőtér komplex altér, ezért $Ju, Jv \in T_pN$. Így az ambiens sokaság Hermitikussága miatt $g(Ju, Jv) = g(u, v)$ és a megszorított metrika is Hermitikus. A forma persze szintén megszorítással jön létre. Róla tudjuk, hogy zárt M-en,emiatt $\omega|_N = d(\omega_M|_N) = (d\omega_M)|_N = 0$. ☐

Következmény 2.7. *Ha $M \subset P^N$ zárt komplex részsokaság, akkor M Kähler.*
Ha M Stein, akkor M Kähler.[*]

Tétel 2.8 (Wirtinger). *M^n, h Hermitikus sokaság. A metrika meghatároz egy térfogati formát, állítjuk hogy $vol_h = \frac{1}{n!}\omega^n$.*

A térfogati forma egy tetszőleges Riemann sokaságon megadható lokálisan mint egy pozitívan iranyitott ortonormált bázis duálisa összeékelve, Egy maximális fokú forma, ami pozitívan irányított bázisokon pozitívan értékelődik ki.

Proof. Legyen $M = \mathbb{C}^n$ a standard metrikával. A térfogati forma egyszerűen $dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n$. $\omega = \frac{i}{2} \sum dz_j \wedge d\bar{z}_j = \sum dx_j \wedge dy_j$. Kiszámoljuk ω^n-et. Szerencse, hogy a 2-formák kommutálnak, így nem kell vesződni a tagok sorrendjével. Ha ugyanazt a tagot választjuk akkor kiölik egymást, pontosan azok maradnakmeg ahol minden tagból egy másikat veszünk ki, tehát valóban $n!$-szor kapjuk meg a standard térfogati formát.
Most általában is visszavezetődik erre a kérdés, hiszen az állításunk lokális. Vesszük a T_pM érintőteret, a J hatással ez egy komplex vektortér. Ezt azonosítani tudjuk a standard $\mathbb{C}^n$-el, csak egy ortonormált bázist kell választani. ☐

Következmény 2.9. *M, g kompakt Hermitikus, akkor $0 < vol(M) = \int_M vol_g = \int_M \frac{1}{n!}\omega^n$ miatt ω nem lehet egzakt, hiszen $\omega = d\alpha$, akkor $\omega^n = d(\alpha \wedge d\alpha \wedge \cdots \wedge d\alpha)$, és a stokes tétel miatt nulla lenne az integrál.*

Következmény 2.10. *M egy Hermitikus sokaság, N^m egy zárt komplex részsokaság, a beágyazással ő is kap egy Hermitikus metrikát, és $\omega_N = i^*\omega_M$. Továbbá $vol(N) = \frac{1}{m!}\int_N \omega_N^m = \frac{1}{m!}\int_N (i^*\omega_M)^m$*

Következmény 2.11. *Ha M kompakt Kähler, akkor $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^n$ mind zárt, de nem egzakt formák, vagyis $[\omega^d] \in H^{2d}_{dR}(M, \mathbb{R})$-ben nem nulla.*

Proof. $d\omega = 0$, és nem egzakt már volt korábban. Hasonlóan $d\omega^k$ is nulla, de nem egzakt egy teljesen hasonló érveléssel mint ez előbb. Ha $\omega^k = d\alpha$, $\omega^n = \omega^k \wedge \omega^{n-k} = d\alpha \wedge \omega^{n-k} = d(\alpha \wedge \omega^{n-k})$ ☐

Következmény 2.12. *M^n kompakt Kähler, akkor$H^{2k}(M, \mathbb{R}) \neq 0$.*

Példa 2.13. $M = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}/x \sim 2x = S^1 \times S^{2n-1}$ nem lehet Kähler, hiszen $H^2 = 0$ (plusz a de-Rahm tétel).

[*] Bishop-Narasimhan-Remmert

Ha M, g Kähler, és Γ biholomorfizmusokkal izometrikusan és szabadon teljesen szakadásosan hat, akkor a faktor is Kähler

Proof. M/Γ komplex sokaság tavalyi tétel volt. Mivel izometrikus a hatás, kapunk egy Riemann metrikát lent is, a Hermitikusság is lokális és átmegy a faktoron. A Kählerség egy lokális kérdés, és a faktorizáció lokális izometria. □

Következmény 2.14. *Például a tóruszok mind Kählerek lesznek, pedig generikusan ezek nem projektívek.*

Van egy karakterizáció arra, hogy egy kompakt Kähler sokaság mikor ágyazható be egy projektív térbe.

3 Harmadik előadás

A d operátor helyett mi van $\mathbb{C}$ esetben? veszünk egy $D \subset \mathbb{C}^n$ nyíltat, és egy pontját w. $T_w D$ bázisát alkotják a ∂_{x_i}és ∂_{y_i} vektorok, ahol $z_i = x_i + iy_i$ a koortinátázás.
$df = \sum \partial_{x_j} f dx_j + \partial_{y_j} f dy_j$, speciálisan ha $f(z) = z_k$, akkor $dz_k = dx_k + idy_k$, és ezt $(1,0)$formának hívjuk. Hasonlóan $d\overline{z_k} = 1dx_k - dy_k$,és ezt $(0,1)$ formának hívjuk. Ezzel kifejezhetjük az eredeti valós differenciálformákat, $dx_k = \frac{1}{2}(dz_k + d\overline{z_k})$, és hasonlóan $dy_k = \frac{1}{2i}(dz_k - d\overline{z_k})$. Visszahelyettesítve $df = \sum \partial_{x_j} f(dz_j + d\bar{z}_j)/2 + \partial_{y_j} f(dz_j - d\bar{z}_j)/2i$.
Összegyűjtjük a dz_js és a konjugáltas tagokat. $df = \sum(\frac{1}{2}\partial_{x_j} - \frac{i}{2}\partial_{y_j} f)dz_j + (\frac{1}{2}\partial_{x_j} + \frac{i}{2}\partial_{y_j} f)d\bar{z}_j$. A dz_j együtthatója pontosan $\partial_{z_j} f$ atavalyi jelöléseinkkel, és hasonlóan a dy_j együtthatója $\partial_{\bar{z}_j} f$. Definiáljuk ezeket az összegeket mint ∂f és $\bar{\partial} f$.

Megjegyzés 3.1. $\bar{\partial} f = 0$ pontosan akkor, hogyha mindenkonjugáltas derivált nulla, ami ekvivalens azzal, hogy f holomorf.

Egy általános $(1,0)$ forma ezeknek a dz_j-knek lineáris kombinációját jelenti, egy koérintővektor $T_w^* D \otimes \mathbb{C}$-ben.

Megjegyzés 3.2. Értelmes $\overline{\partial f}$-ről beszélni, a leképezés értékét pontonként konjugáljuk, és ez egybeesik $\bar{\partial} \bar{f}$-el.

Tekintsünk egy látalános 1-formát $\alpha = \sum a_j dx_j + b_j dy_j$, ahol $a_j, b_j \in C^\infty(D, \mathbb{C})$, ezt is átírhatjuk a dz_j és $d\bar{z}_j$ operátorokkal $\sum A_j dz_j + B_j dy_j$. Az első tag egy általános $(1,0)$ forma,a második tagok összege egy általános (0,1) forma.* Tulajdonképp tehát α két forma összegeként áll elő, egy 1,0 és egy 0,1 formával. Ezt szokás $\alpha^{1,0} + \alpha^{0,1}$ alakban leírni. Világos hogy ez az előállítás egyértelmű.
Kiterjesztjük a ∂ és a $\bar{\partial}$ operátorokat ezekre is. $d\alpha = \sum da_j \wedge dx_j + \sum db_j \wedge dy_j$. Az első tag $da_j = (\partial + \bar{\partial})a_j$, azonosan a második, összegyűjtjük a ∂-os tagokat $\sum \partial a_j \wedge dx_j + \partial b_j \wedge dy_j$, és ugyanez $\bar{\partial}$-ra. Tovább kifejezzük ezeket a dz_j és a konjugáltas segítségével, $\sum \partial A_j \wedge dz_j + \partial B_j \wedge d\bar{z}_j + \bar{\partial} A_j \wedge dz_j + \bar{\partial} B_j d\bar{z}_j$. Az első két tag összegét hívjuk $\partial\alpha$-nak, a második kettő összegét $\bar{\partial}\alpha$-nak.
Tovább átírva $\sum \partial A_j \wedge dz_j + \sum \partial B_j \wedge dz_j = \partial_{z_k} A_j dz_k \wedge dz_j + \sum \partial_{z_k} dz_k \wedge d\bar{z}_j$ az első tagot 2,0 formánakhívjuk, a másodikat 1,1-nek. Szimmetrikusan $\bar{\partial}\alpha = \sum\sum \bar{\partial}_{d\bar{z}_k} A_j d\bar{z}_k \wedge dz_j + \sum\sum \bar{\partial}_{\bar{z}_k} B_j d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_j$, egy 1,1 és egy 0,2 forma. $dz_j \wedge dz_k$ a 2,0 formák egybázisa $j < k$-val, hasonlóan $dz_k \wedge d\bar{z}_j$ az 1,1-eknek stb.

Állítás 3.3. *$f \in C^\infty(D, \mathbb{C})$, akkor $\partial\partial f = 0$ illetve $\bar{\partial}^2 f = 0$, végül vegyesen $\partial\bar{\partial} f = -\bar{\partial}\partial f$.*

Megjegyzés 3.4. Függvényekre $d = \partial + \bar{\partial}$ és 1-formákra is.

*definíció szerint

Proof. Tudjuk, hogy $d^2 = 0$, és mivel $d = \partial + \bar\partial$ kibontva a kettes kompozíciót látjuk, hogy $0 = \partial^2 + \partial\bar\partial + \bar\partial\partial + \bar\partial^2$ adódik, az első egy 2,0 forma, a középső kettő egy 1,1 az utolsó pedig egy 0,2 formát ad. Egy lineáris függetlenségi állítás miatt egy ilyen felbontás csak úgy lehet nulla ha minden komponens külön külön nulla, és ezt akartuk belátni. □

Legyen most adott egy β 0,1 forma, az érdekel minket, hogy mikor van primitívje $\bar\partial$ szerint, $\bar\partial f = \beta$. Az mindenképpen szükséges feltétel, hogy $\bar\partial\beta = 0$ persze. Ha $n = 1$, akkor ez automatikusan teljesül, nincsenek 0,2 formák at all, és az egyenlet amit meg kell oldanunk $f'_{\bar z} = B$, egy inhomogén Cauchy-Riemannegyenlet. Volt tkfen, hogy $D = \mathbb{C}, \mathbb{D}$ vagy körgyűrű esetén pl megoldható. Valójában azonban minden síkbeli tartományon ezt meg lehet oldalni.
$n > 1$-re már nem üres a szükséges feltételünk.

Példa 3.5. $n = 2$ ha $\beta = B_1 d\bar z_1 + B_2 d\bar z_2$, akkor $\bar\partial\beta = (\partial_{\bar z_1} B_1 d\bar z_1 + \partial_{\bar z_2} B_1 d\bar z_2) \wedge d\bar z_1 + (\partial_{\bar z_1} B_2 d\bar z_1 + \partial_{\bar z_2} B_2 d\bar z_2) \wedge d\bar z_2 = (\partial_{\bar z_1} B_2 - \partial_{\bar z_2} B_1) d\bar z_1 \wedge d\bar z_2$, ergo vegyes parciálisderiváltaknak kell eltűnniük, csak komplex értelemben.

$n > 1$ esetben a szükséges feltétel nem elégséges! D-től függ, mint láttuk tvkftn, ott láttuk pl hogy $D = \mathbb{C}^n$, policilinderre Dolbout tétele szerint elégséges, vagy egy nyílt golyón (ez még sokkal nehezebb), analitikusan konvex tartományokra.

Példa 3.6. $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$-ra létezik β amire $\bar\partial\beta$, de nincs primitívje.

Tétel 3.7. *Legyen (M, g) Kähler sokaság ω a Kähler forma rajta. Állítjuk, hogy $\forall p \in M$-hez létezik egy D nyílt környezet és $v \in C^\infty(D, \mathbb{R})$, amire $\omega|_D = 2i\partial\bar\partial v$.*

Szükségünk van az imént említett

Tétel 3.8 (Dolbeault)**.** *Ha D egy policilinder $\mathbb{C}^n$-ben és β egy $\bar\partial$ zárt 0,1 forma, akkor ő $\bar\partial$ egzakt is.*

Ezt nem bizonyítjuk, de a tételt levezetjük belőle.

Proof. Veszünk egy térképet $p \in M$ körül és a képe körül egy elég kis policilinder lesz a környezetünk. ω zárt forma, policilinder konvex és emiatt meg tudjuk rajta oldani a Poincaré egyenletet, létezik α amire $d\alpha = \omega$. Ez a forma felbomlik $\alpha^{1,0} + \alpha^{0,1}$ alakban. Tehát $\omega = \partial\alpha^{1,0} + \bar\partial\alpha^{1,0} + \partial\alpha^{0,1} + \bar\partial\alpha^{0,1}$. Mivel α egy valós forma, $\alpha = \bar\alpha$, ebből kifolyólag pedig $\alpha^{1,0} = \bar\alpha^{0,1}$ és vice verza.

Kiegészítendő, hogy ω mért egy 1,1forma! folyt köv

□

Definíció 3.9. Az $\omega = \frac{i}{2}\partial\bar\partial v$ normalizációval a v függvényt Kähler potenciálnak nevezzük.

Példa 3.10. $n = 1$-re $\mathbb{C}, g_{eu}$-n* a Kähler potenciál $|z|^2/2$ lesz, mert ,$\bar\partial v = z d\bar z$ utána pedig $dz \wedge d\bar z$adódik, amint akartuk.
$n > 1$-re hasonlóan vehetjük $||z||^2/2$-t.

Mennyire egyértelmű ez a függvény? Ez azt jelenti, hogy $\partial\bar\partial(v_2 - v_y) = 0$, az ilyen függvényeket pluriharmónikus függvényeknek hívjuk. Egy dimenzióban ez pont a harmonicitást jelenti.

Gyakorlat 3.11. *v pluriharmonikus pontosan akkor ha $v = Re(holo)$, pont mint egydimenzióban.*

*$\omega = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar z$

Egy Kähler potenciál v, akkor $\bar{\partial} v = \sum v'_{\bar{z}_j} d\bar{z}_j$, majd pedig $\omega = \sum v''_{\bar{z}_j z_k} dz_k \wedge d\bar{z}_j$ a tétel miatt. Tudjuk, hogy ω egy valós forma, az előbbi egyenlőség jobb oldala apriori egy komplex forma, az $\omega = \overline{\omega}$ feltételből az következik, hogy a $(v''_{\bar{z}_j z_k})$ mátrix Hermitikus, ezt hívják v Lévi mátrixának.

Gyakorlat 3.12. *Ha ω Kähler forma, akkor a Lévi mátrix pozitív definit.*

Példa 3.13. $n = 1$-re $\omega = \frac{i}{2} v''_{\bar{z}z} dz \wedge d\bar{z}$, valósra átírva $\Delta v/4 dx \wedge dy$ adódik.
Általában is $g(JX, Y) = \omega(X, Y)$. Ha tekintjük $g(JX, JY)$-t, adódik hogy a forma vissza is adja a metrikát. $g(\partial_x, \partial_x) = \omega(\partial_x, \partial_y) = \Delta v/4 \cdot 1$.

Definíció 3.14. Ha $\Delta v > 0$ akkor v szigorúan szubharmonikus.

Definíció 3.15. Ha v Lévi mátrixa pozitív definit, akkor v szigorúan pluriszubharmonikus.

4 Negyedik előadás

Definíció 4.1. V valós vektortér, adott rajta egy J majdnem komplex struktúra. $b : V \times V \to \mathbb{C}$ valós bilineáris leképezés J invariáns ha $b(Jx, Jy) = b(x, y)$.

Állítás 4.2. *Ha M, g Hermitikus sokaság, $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$ a fundamentális forma, akkor $\omega_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ J-invariáns minden p-re.*

Proof. $\omega(JX, JY) = g(J^2X, JY) = g(JX, Y)$ a definíció és az Hermitikusság miatt. □

Állítás 4.3. *$p \in \mathbb{C}^n$, $\beta \in T_p\mathbb{C}^n \times T_p\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ valós bilineáris, alternáló ($\mathbb{C}$ értékű 2-forma). Ekkor β egy $(1, 1)$ forma pontosan akkor hogyha J-invariáns.*

Proof. $J_p : \partial_{x_k} \mapsto \partial_{y_k}$ és $\partial_{y_k} \mapsto -\partial_{x_k}$. Felírjuk β-t komplex alakban

$$\beta = \sum a_{kl} dz_k \wedge dz_l + \sum b_{kl} dz_k \wedge d\bar{z}_l + \sum c_{kl} d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_l$$

Emlékezzünk, hogy az első tagot (2,0), a középsőt (1,1) és az utolsót (0,2) formának hívjuk.
Meg kell értenünk, hogy mi történik $dz_k(J\partial_{x_l})$-el, ez látványosan $\delta_{kl} i$ lesz, hiszen tudjuk a képet. Vegyük észre, hogy ez megegyezik $i dz_k(\partial_{x_l})$-el is. hasonlóan $dz_k(J\partial_{y_l}) = -\delta_{kl} = i dz_k(\partial_{y_l})$, vagyis a J-vel való hatás az alapformaértékét i-vel szorozza. Teljesen hasonlóan a konjugáltasokra $d\bar{z}_k(JX) = -i d\bar{z}_k(X)$.
Most az állítást már be tudjuk látni, $dz_k \wedge dz_l(JX, JY)$ értéke egy determinánsként áll elő. $det(\begin{matrix} dz_k(JX) & dz_l(JX) \\ dz_k(JY) & dz_l(JY) \end{matrix})$ mindenhonnan kijön egy i, vagyis a determináns i^2-el szorzódik, előjelet vált. A vegyes tagoknál $i(-i)$-vel szorzódik, tehát invariáns. Végül a konjugáltas tagokban mindenhonnan $-i$ emeltetik ki, megint előjelet váltunk. Következik, hogy $\beta(JX, JY) = -\beta^{2,0}(X, Y) + \beta^{1,1}(X, Y) - \beta^{0,2}(X, Y)$. Következik, hogy $\beta^{2,0} = \beta^{0,2} = 0$, mert tipusonként meg kell egyezniük. □

Tétel 4.4. *Ha M, g Kähler, ω a formája, akkor ω (1,1) tipusú lokális holomorf koodinátákban és minden $p \in M$-nek van U nyílt környezete (policilinderrel biholomorf) és egy $v : U \to \mathbb{R}$, ahol $\omega = 2i\partial\bar{\partial} v$.*

Proof. Mivel ω zárt a Poincaré tétel szerint találunk egy α valós 1-formát lokálisan, mert policilindernek választottuka halmazt, ott az egyenlet megoldható. $\omega = d\alpha = d(\alpha^{1,0} + \alpha^{0,1}) = (\partial + \bar{\partial})(\alpha^{1,0} + \alpha^{0,1})$. Kibontjuk és $\partial\alpha^{1,0} + \bar{\partial}\alpha^{1,0} + \partial\alpha^{0,1} + \bar{\partial}\alpha^{0,1}$ A két szélső tag 2,0 és 0,2 formák, a két középső pedig 1,1. A J-invariancia miatt mostmár következik, hogy ez a két szélső tag eltűnik. $\partial\alpha^{1,0} = \bar\partial\alpha^{0,1} = 0$. Továbbá mivel ez egy valós forma önmaga konjugáltja, és $\alpha^{1,0} = \overline{\alpha^{0,1}}$, és hasonlóan a másik esetre. $\bar\partial\alpha^{0,1} = 0$-t tudjuk, Dolbeault azt mondja nekünk, hogy létezik $f : U \to \mathbb{C}$, amire $\bar\partial f = \alpha^{0,1}$. Hasonlóan így kapjuk hogy $\overline{\bar\partial f} = \alpha^{1,0}$. Visszaírva $\omega = \bar\partial(\partial \bar f) + \partial\bar\partial f$. A kerek deriválási operátorok antikommutálnak, így ez tovább megegyezik $\partial\bar\partial(f - \bar f) = 2i\partial\bar\partial v$, ahol $v = imf$. $\square$

Állítás 4.5. *$\partial, \bar\partial$ holomorf leképezésekkel felcserélhetők.*

Vagyis ha van egy holomorf leképezés $F : U \to V$, és adott egy forma V-n, akkor $F^*\partial\alpha = \partial F^*\alpha$, és hasonlóan a konjugáltasra.

Állítás 4.6. *$\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0 \xrightarrow{\pi} P^n$ szubmerzió, és $ker\pi_* =< z >< T_z\mathbb{C}^{n+1}$.*

Proof. Válasszunk olyan z-t, aminek az első koordinátája nem nulla $(z_0, \ldots, z_n)$. Ezen pontokat lefedi az U_0 térkép. Tekintsük $\pi^{-1}(U_0)$-t, ugyanezzel a képlettel, $(z_0, \ldots, z_n) \mapsto (z_1/z_0, \ldots, z_n/z_0)$.
$v \in ker\pi_*$ pontosanakkor, hogyha a kompozíció f_0 magjában van. $z + tv$ alakú görbék reprezentálják az érintővektorokat, és itt nyilván akkor fogunk a konstans útba vetülni, hogyha v párhuzamos a z-vel. $\square$

Állítás 4.7. *V egy valós vektortér, J egy a.c.s., és adott egy J invariáns valós 2-forma ω. Definiáljuk $b(X,Y) := \omega(X, JY)$, ez egy szimmetrikus bilineáris J-invariáns forma.*

Proof. bilinearitás trivi, az invariancia $b(JX, JY) = \omega(JX, J^2Y) = \omega(X, JY) = b(X,Y)$. szimmetria végül $b(Y,X) = \omega(Y, JX) = \omega(JY, -X) = -\omega(-X, JY) = b(X,Y)$. $\square$

Következmény 4.8. *Ha M komplex sokaság, és legyen adott egy ω valós 1,1 forma, akkor pontonkén definiálva $g(X,Y) = \omega(X, JY)$ ha ez minden pontban pozitív definit, akkor g Hermitikus metrika, ha ω zárt, akkor ez egy Kähler metrika, és ω a Kähler formája.˙*

Most megkonstruáljuk a Kähler formát a projektív téren. $z \in \mathbb{C}^{n+1}$, akkor egy U_j térképen $\rho_j : U_j \to \mathbb{R}$ rendelje $[z] \mapsto \frac{||z||^2}{|z_j|^2}$, ez minden térképen az $1+||w||^2$ függvénybe megy, ami lokálisan egy Kähler potenciál, sőt a logaritmusa is az, ezt fogjuk majd kiszámolni és alkalmazni. Áttéréseknél $\rho_j([z]) = \rho_k(\frac{|z_k|}{|z_j|})^2$, logaritmus után összeg lesz. Azt kell észrevenni, hogy $log(\frac{|z_k|}{|z_j|})^2$ pluriharmonikus, mert egy holomorf függvény abszolútérték négyzetének a logaritmusa, és ezek mindig pluriharmonikusak. Következik, hogy $\partial\bar\partial\log\rho_j$ összeragad egy globális formává.
Választjuk $\omega_j = \frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial\log\rho_j$, kapunk egy 2-formát a projektív téren. Ez az ω valós lesz mint azt egy egyszerű konjugálással láthatjuk. Triviálisan zárt, hiszen $d = \partial + \bar\partial$. kell még a pozitív definitség

Állítás 4.9. *$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus 0 \to P^n$, akkor $\pi^*\omega = \frac{i}{2\pi} = \partial\bar\partial\log||z||^2$.*

Proof. Megnézzük az U_j térképen. A visszahúzott most $i/2\pi\partial\bar\partial\log\rho_j(\pi(z))$ lesz definíció szerint. Megint visszaírjuk a definíciót, a logaritmus szétszedi a hányadost, és a másik tag pluriharmonikus. $\square$

Állítás 4.10. *ω $U(n+1)$ invariáns.*

Proof. Veszünk egy A mátrixot, hozzá tartozik a μ_A projektív transzformáció. Húzzuk vissza π^*-al $\mu_A^*\omega$-t, ez persze megegyezik $(\mu_A \circ \pi)^*\omega$-val. Ez utóbbi kompozíció nyilván megegyezik a $(\pi \circ A)^*\omega$-val. Ez tovább $A^*\pi^*\omega$, az első visszahúzottat az imént kiszámoltuk, ebbe még beleírunk A-t Az helyére, de mivel unitér volt, így megtartja. Ezzel az adódik, hogy $\pi^*(\mu_A^*\omega - \omega) = 0$. Most használjuk, hogy π^* szürjektív, mert ez így csak akkor tudteljesülni, ha $\mu_A^*\omega = \omega$. $\square$

A pozitív definitséghez elég egyetlen pontban számolni az unitér invariancia miatt, mert erre invariánsaformánk, és a "metrikánk" is. Hogy néz ki ez U_0 origójában? Itt $\frac{i}{2pi}\partial\bar{\partial}\log(1+||w||^2)$, ezt tudjuk expliciten számolni.

$$\frac{i}{2\pi}\partial(\frac{\sum w_j d\bar{w}_j}{1+||w||^2})$$

Ráengedve a ∂-t $\sum \frac{\delta_{jk}(1+||w||^2-w_j\bar{w}_k)}{(1+||w||^2)} dw_k \wedge d\bar{w}_j$ és $w=0$-ban $\frac{i}{2\pi}\sum dw_k \wedge d\bar{w}_k = \frac{1}{\pi}\sum dx_k \wedge dy_k$, ez egy pozitív konstansszorosa az euklideszi metrikának, tehát pozdef.

Definíció 4.11. Ez a g a Fubini-Study metrika a prjektívtéren.

5 Ötödik előadás

MISSING

6 Hatodik előadás

Lemma 6.1. *M komplex sokaság, h Hermitikus metrika, $\omega(X,Y) = g(JX,Y)$.*

1. $d\omega(X,Y,Z) = g((\nabla_X J)Y,Z) + g((\nabla_Y J)Z,X) + g((\nabla_Z J)X,Y)$
2. $2g(\nabla_X JY,Z) = d\omega(X,Y,Z) - d\omega(X,JY,JZ)$

Következmény 6.2. *g Kähler ekvivalens azzal, hogy $\nabla J = 0$, vagyis a majdnem komplex struktúra nem csakortogonális, hanem unitér, felcserélhető a párhuzamos eltolással.*

Lemma bizonyítása. Cartan formulát használjuk.

$$d\omega(X,Y,Z) = X\omega(Y,Z) - Y\omega(X,Z) + Z\omega(X,Y) - \omega([X,Y],Z) + \omega([X,Z],Y) + \omega([Y,Z],X)$$

Apriori tudjuk, hogy a végeredmény tenzor, ügyes kiterjesztéseit választjuk a pontbeli vektoroknak hogy minél kevesebb tag legyen. $X_p, Y_p, Z_p, JX_p, JY_p, JZ_p$-t mind úgy, hogy lokálisan felcserélhetőek legyenek, ezzel az utolsó három tag máris eltűnik.

Gyakorlat 6.3. *∇ torziómentességét és metrikusságát kihasználva megkapjuk az első formulát az állításban.*

A ketteshez emlékezzünk a Levi-Civita konnexió unicitási állítására. $2g(X,\nabla_Z Y) =$ valami formula amiben csak a metrika, és vektormezők és a Lie-zárójeleik szerepelnek.* A kommutálási feltétel miatt a Lie-zárójelek mind eltűnnek, és a formulába $X \to Z, Y \to JY, Z \to X$ helyettesítéssel, illetve $X \to JZ, Y \to Y, Z \to X$ helyettesítéssel plusz az első állítást felhasználva pont megkapjuk a második formulát. Definíció szerint $(\nabla_X J)Y = \nabla_X(JY) - J\nabla_X Y$-t is kihasználjuk! □

És most következzék valami egészen más.

* $Zg(X,Y) + g(Z,[X,Y]) + Yg(X,Z) + g(Y,[X,Z]) - Xg(Y,Z) + g(X,[Y,Z])$

6.1 Hodge-elmélet

$\mathbb{R}^n$-en f harmonikus ha $\Delta f = 0$, vagyis $\sum \partial^2_{x_j x_j} f = 0$. Sokaságon csak úgy nincs értelme harmonikus függvényről beszélni, egydimenziós komplex sokaságokon pont igen, ekkor csak annyit jelent, hogy a függvényünk u a valós része egy holomorf függvénynek lokálisan. Máshogy $\Delta f = div(grad(f))$. A gradiens persze $\sum \partial_{x_j} f \partial_{x_j}$. Ha $Y = a_j \partial_{x_j}$ vektormező, akkor $divY = \sum \partial_{x_j} a_j$. Sima sokaságon gradiensnek nincs értelme, df-et viszont tudunk gyártani, továbbá divergenciáról sem világos hogy minek kellene lennie.

Tegyünk egy Riemann metrikát is a sokaságunkra! Ekkor a gradiens létezik mint $df^\sharp$. A metrikából ingyen kapjuk a Levi-Civita konnexiót is, ez segít a divergenciához. $(divY)|_p$-hez választunk egy X_j ortonormált bázist T_pX-ben, a formula $\sum_j g(\nabla_{X_j} Y, X_j)$, ez minden ponthoz valóban egy számot rendel. Nem nehéz ellenőrizni, hogy ez egy jól definiált operátor. Mostmár definiálhatjuk a Laplace-Beltrami operátort függvényekre mint $\Delta_a u = div(gradu)$. u harmonikus, hogyha $\Delta_a u = 0$.

Ezt szeretnénk kiterjeszteni formákra. Lineáris algebrai előkészületek. V^n valós vektortér, $0 \leq k \leq n$, és vegyük $\{\cdot,\cdot\} : \Lambda^k V^* \times \Lambda^{n-k} V^* \to \Lambda^n V^*$ az ékszorzást $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$. Világos, hogy $dim_{\mathbb{R}} \Lambda^n V^* = 1$.

Gyakorlat 6.4. *Ez a $\{.,.\}$ egy nemelfajuló párosítás.*

Legyen adott még egy $< \cdot, \cdot >$ skaláris szorzat is adva V-n. Ez indukál a $\Lambda^k V^*$ tereken is skaláris szorzásokat. $k = 1$-re világos, hogy $v \mapsto < v, \cdot >$ definiál egy izomorfizmust V és V^* között. Itt $< l_v, l_w > := < v, w >$ lesz a belső szorzás. Következésképp ha $e_1, \ldots, e_n$ egy o.n.b. V-ben,akkor l_{e_j} egy o.n.b. lesz V^*-ban.

$\Lambda^k V^*$-on vegyünk tetszőleges $\phi_j, \psi_s \in V^*$, ekkor a tiszta k-formák $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k$ és $\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_k$ skaláris szorzata definíció szerint $det(< \phi : j, \psi_s >)$. Az általános k-formák ilyeneknek a lineáris kombinációi, tehát ezzel mindenhol definiáltuk a skaláris szorzást.

Gyakorlat 6.5. *Ez jól definiált.*

Megjegyzés 6.6. Ha $\phi_1, \ldots, \phi_n$ egy o.n.b. V^*-ban, akkor az indexek növekvő k hosszú részhalmazait összeékelve ortonormált bázist kapunk $\Lambda^k V^*$-ban.

Ahhoz hogy $\Lambda^n V^*$ kanonikusan azonosulhasson $\mathbb{R}$-el meg kell irányítanunk V-t. Vegyük az $e_1, \ldots, e_n$ pozitív ortonormált bázist V-ben, vegyüka hozzá tartozó duális bázist, és belőlük képezzük $l_{e_1} \wedge \cdots \wedge l_{e_n} =: dVol$-t, ez egy 1-normájú elem, vele fogjuk azonosítani $\Lambda^n V^*$-ot $\mathbb{R}$-el úgy, hogy $\mathbb{R} \ni t \mapsto tdVol$. Ezzel áthúzhatjuk a $\{.,.\}$ párosításunkat $\mathbb{R}$-re, még mindig egy nemelfajuló leképezést kapva.

Fix α-ra $L_\alpha : \beta \mapsto < \alpha \wedge \beta, dVol >$ egy lineáris funkcionál $\Lambda^{n-k} V^*$-on, és ezen a téren adott egy skaláris szorzás. Emiatt létezik pontosan egy $w \in \Lambda^{n-k} V^*$, amire $< v, \cdot > = L_\alpha$. Ezzel minden k-formához hozzárendeltünk egy $n-k$ formát.

Definíció 6.7 (Hodge csillag)**.**

$$w := *\alpha$$

$* : \Lambda^k V^* \to \Lambda^{n-k} V^*$ persze egy lineáris leképezés, ennél azonban sokkal több is igaz. $< *\alpha, \beta > = < \alpha \wedge \beta, dVol >$, vagyis $\alpha \wedge \beta = < *\alpha, \beta > dVol$.

Gyakorlat 6.8. *$e_1, \ldots, e_n$ egy pozitív o.n.b. Vegyük a megfelelő duális bázist, $*(\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}) = \epsilon \phi_{j_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{j_{n-k}}$ ahol $\{i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\}$, és $\epsilon = \pm 1$ attól függően, hogy $\phi_{i_1}, \ldots, \phi_{i_k}, \phi_{j_1}, \ldots, \phi_{j_{n-k}}$ egy pozitív vagy negatív bázis.*

Következmény 6.9. $* : \Lambda^k V^* \to \Lambda^{n-k} V^*$ *izometria.*

$*dVol = 1$ és $*1 = dVol$

Gyakorlat 6.10. *$*^2 \in End\Lambda^k V^*$ megegyezik $(-1)^{k(n-k)} \cdot id$-el.*

$\alpha, \beta \in \Lambda^k V^*$, vegyük $\alpha \wedge *\beta =< *\alpha, *\beta > dVol =< \alpha, \beta > dVol$.
Most ezt az egész hóbelevancot ráültetjük a sokaságainkra. Legyen M, g kompakt irányított Riemann sokaság, $p \in M$ és $V = T_pM$.

Megjegyzés 6.11. Lokálisan az $(x_1, \ldots, x_n)$ koordinátákban a g_{ij} metrikus tenzorral a térfogati forma pont $dVol = \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

Megjegyzés 6.12. $H^n_{dR}(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, ennek $dVol$ eleme, ő azonosítja $\mathbb{R}$-el. Minden t-re $tdVol$ egy speciális eleme az ő kohomológiaosztályának.

Emlékeztető:$A^k(M, \mathbb{R})$ jelöli a sima k-formák terét. Bevezetjük ezen a téren az L^2 skaláris szorzatot. A definíció a következő: $(\alpha, \beta) := \int_M \alpha \wedge *\beta = \int_M < \alpha, \beta > dVol$. Mivel a térfogati forma integrálja pozitív látjuk, hogy $(\alpha, \alpha) > 0$ ha $\alpha \not\equiv 0$.

Állítás 6.13. *$(.,.)$ egy skaláris szorzat.*

$Z^k(M, \mathbb{R})$ jelöli a d-zárt differenciálformák halmazát, ebben néztük az egzakt formákat, a faktor persze a de-Rahm kohomológiacsoport.

Megjegyzés 6.14. Mivel nem nulla az integrálja, a Stokes tétel miatt $dVol$ nem egzakt.

Szeretnénk valami hasonlót, ha $[\alpha] \in H^k_{dR}$, minden kohomológiaosztályból szeretnénk egy kitüntetett elemet választani, mint a $dVol$lal is tettük.
Alapötlet: Q^n véges dimenziós vektortér, amin skaláris szorzás adott, és benne W egy affin altér, ergo van egy U valódi lineáris altér és egy vektor α, hogy $W = U + \alpha$. α sokféle lehet persze, vehetjük például a legkisebb normájút $\alpha_0 \in W$. Ennek a kiválasztása nem nehéz persze, a skaláris szorzat szerint $Q = U \perp U^\perp$ és $\alpha = \alpha_U + \alpha_\perp$, választhatjuk $\alpha_\perp$-et.
Ha Q Hibert-tér és W zárt, akkor ez ugyanígy működik. Nekünk a $Z^k(M, \mathbb{R})$-en kéne ügyködni, ez végtelen dimenziós valós vektortér, de nem Hilbert*!!

7 Hetedik előadás

Állítás 7.1. *$d_k : A^k \to A^{k+1}$-nek létezik formális adjungáltja az L^2 skalárszorzatra nézve. Vagyis létezik $\delta_k : A^{k+1} \to A^k$, hogy $\alpha \in A^k, \beta \in A^{k+1}$-ra $(d\alpha, \beta) = (\alpha, \delta\beta)$ teljesül. Expliciten $\delta = (-1)^{nk+1} * d*$.*

Proof.

$$(d\alpha, \beta) = \int_M < d\alpha, \beta > dVol = \int_M d\alpha \wedge *\beta$$

Stokes tételrehajtunk, ehhez $d(\alpha \wedge *\beta) = d\alpha \wedge *\beta + (-1)^k \alpha \wedge d * \beta$, folytatva az előző sort

$$= \int_M d(\alpha \wedge *\beta) - (-1)^k \int_M \alpha \wedge d * \beta = 0 - (-1)^k \int_M \alpha \wedge d * \beta$$

Ahol az első tag a Stokes tétel miatt tűnik el, zárt sokaságon vagyunk. $\alpha \wedge d * \beta = \alpha \wedge (-1)^{(n-k)k} * *d * \beta$ mert $d * \beta$ egy $n - k$ forma. Még tovább

$$(-1)^{k+1+(n-k)k} \int_M \alpha \wedge * * d * \beta = (-1)^{k+1+(n-k)k} \int_M < \alpha, *d * \beta > dVol$$

*nem teljes

láthatóan az előjelek passzolnak, nk+1 megjelent, marad még $k - k^2$ ami mindig páros. $\square$

Megjegyzés 7.2. Ha a dimenzió páros, akkor mindig $\delta = - * d*$, pl a komplex esetben majd.

Definíció 7.3 (Hodge-Laplace). $\Delta_H = \delta_{k+1} d_k + d_k \delta_k$

Definíció 7.4. Egy α k-forma harmonikus, ha $\Delta\alpha = 0$. A $k = 0$ esetben $\Delta_H = \delta_1 d$.

Gyakorlat 7.5. *Előjel erejéig $\delta_1 = -div$. A metrikával azonosíthatjuk a vektormezőket az 1-formákkal.*

$\Delta_H f = -\sum \partial^2_{jj} f$ lokális koordinátákban.

Gyakorlat 7.6. $*\delta_k = (-1)^k d*$ *illetve* $\delta_k * = (-1)^{k+1} * d$

Megjegyzés 7.7. $*$ lokális. Ha az irányítást lokálisan megváltoztatjuk, akkor $*$ előjelet vált, δ felírásában kétszer is megtörténik ez, tehát ő jóldefiniált nemirányítható esetben is.

Tétel 7.8. $d\Delta = \Delta d, \delta\Delta = \Delta\delta, *\Delta = \Delta *$.

Proof. $\Delta = \delta d + d\delta$, felírjuk az állításokat.

$$\Delta d = (\delta d + d\delta)d = d\delta d = d(\delta d + d\delta) = d\Delta$$

Teljesen ugyanígy ∂-al, $*$-ra pedig házi feladat. $\square$

Állítás 7.9. $\alpha, \beta \in A^k$ *akkor* $< \Delta\alpha, \beta >=< \alpha, \Delta\beta >$.

Proof.

$$< (\delta d + d\delta)\alpha, \beta >=< d\delta\alpha, \beta > + < \delta d\alpha, \beta >=< \alpha, d\delta\beta > + < \alpha, \delta d\beta >= (\alpha, \Delta\beta)$$

Ahol csak azt használtuk hogy δ és d formális adjungáltak. $\square$

Állítás 7.10. $\Delta\alpha = 0$ *pontosan akkor hogyha* $d\alpha = 0$ *és* $\delta\alpha = 0$.

Proof.

$$< \Delta\alpha, \alpha >=< d\delta\alpha, \beta > + < \delta d\alpha, \beta >=< \delta\alpha, \delta\alpha > + < d\alpha, d\alpha >\geq 0$$

$\square$

A harmonikus formák vektorterét jelöljük $\mathcal{H}^k$-val.

Gyakorlat 7.11. *M kompakt irányított összefüggő és $f : M \to \mathbb{R}$ amire $\Delta f \equiv 0$, akkor f konstans.*

Állítás 7.12. *$\alpha \in Z^k(M, \mathbb{R})$ pontosan akkor harmonikus, hogyha $||\alpha||^2$ lokális minimum a kohomológiaosztályában, és legfeljebb egy harmonikus forma van minden kohomológiaosztályban.*

Proof. Tegyük fel hogy $||\alpha||^2$ lokális minimum $[\alpha]$-ban. Legyen $\beta \in A^{k-1}$ tetszőleges és tekintsük az $\nu(t) := ||\alpha + td\beta||^2$ függvényt. Ennek $t = 0$-ban lokális minimuma van, vagyis $\nu'(0) = 0$ kifejtve ez $0 = 2 < \alpha, d\beta >= 2 < \delta\alpha, \beta >$, következik hogy $\delta\alpha = 0$, hiszen ez egy olyan forma, aminek mindenkivel vett skalári szorzata 0, mivel zárt $d\alpha = 0$, és így harmonikus.
Ha α harmonikus, tekintsük $||\alpha + d\beta||^2$-et, ezt kibontjuk $||\alpha||^2 + 2(\alpha, d\beta) + ||d\beta||^2 \geq ||\alpha||^2$, a vegyes tag eltűnik mert $\delta\alpha = 0$. Ebből látjuk hogy $||\alpha||^2$ minimális, és egyenlőség csak akkor teljesülhet hogyha $d\beta = 0$, ebből kapjuk az egyértelműségi állítást. $\square$

Tétel 7.13 (Hodge). *M kompakt irányított Riemann sokaság, ekkor*

1. *minden* $0 \leq k \leq n$*-ra* $dim\mathcal{H}^k < \infty$.
2. $A^k = \Delta A^k \bigoplus \mathcal{H}^k = d\delta A^k \bigoplus \delta d A^k \bigoplus \mathcal{H}^k = dA^{k-1} \bigoplus \delta A^{k+1} \bigoplus \mathcal{H}^k$

Végtelen parcdifet skippeljük, az összegek ortogonalitását megnézzük.

Proof. $H^k \perp \Delta A^k$. Vegyünk egy α harmonikust, és egy β-t. $0 = (0, \beta) = (\Delta\alpha, \beta) = (\alpha, \Delta\beta)$. Ez analogonja annak a setupnak mikor adott egy véges dimenziós vektortér skaláris szorzással, és egy önadjungált operátor rajta, ekkor $V = ker \oplus im$, a bizonyítás pontosan ugyanez. $(\alpha, d\delta\beta) = (\delta\alpha, \delta\beta) = (0, \delta\beta) = 0$, másik hasonlóan, a harmadik esetben $(d\delta\alpha, \delta d\beta) = (d^2\delta, \alpha, \beta) = 0$, az utolsó állítás teljesen hasonló. □

Tétel 7.14. *M kompakt irányított Riemann sokaság, akkor* $\forall[\alpha] \in H^k_{dR}(M, \mathbb{R})\exists!$ *harmonikus forma. Ez ad egy* $H^k dR \to H^k$ *izomorfizmust.*

Proof. Létezés kell csak, vegyünk egy zárt α formát, az előző tétel szerint $\alpha = d\beta + \delta\gamma + \mu$, ez utóbbi harmonikus.

$$(\alpha, \delta\gamma) = (d\alpha, \gamma) = 0 = (d\delta\gamma, \gamma) = ||\delta\gamma||^2$$

tehát $\delta\gamma = 0$ és μ megfelel. □

Következmény 7.15. *M kompakt irányított, akkor* $dim H^k_{dR} < \infty$.

Proof. Lássuk el metrikával. □

Tétel 7.16 (Poincarédualitás).

Proof. Vegyünk egy Riemann metrikát M-en, a harmonikus formák k szintben izomorfak a de Rahm csoporttal. Mivel a Laplace operátor kommutál a *-al, nyertünk. □

Tétel 7.17. *Ha M kompakt Lie csoport, a metrika biinvariáns, akkor* α *harmonikus k-forma pontosan akkor hogyha biinvariáns.*

Következmény 7.18. *M páratlan dimenziós sima sokaság, akkor az Euler karakterisztikája 0.*

Proof. kiesnek a tagok a definiáló összegből lol. Hanem irányítot ptorigression. □

Gyakorlat 7.19 (*). *M kompakt irányított,* $\tilde{M}$ *véges fedés, akkor* $b_k(\tilde{M}) \geq b_k(M)$.

Ez volt a valós elmélet, most jön a komplex. Először $\mathbb{C}^n$-ben adjuk meg a Dolbeault csoportokat. $D \subset \mathbb{C}^n$ tartomány, láttunk már $(1,0), (0,1), (1,1), (2,0), (0,2)$. Komplex értékű k-formák $\Lambda^k T^{*\mathbb{C}}_{wD}$ multilineáris alternáló leképezések $\mathbb{C}$-be. Lokális alakjuk a szokásos $\sum a_s d\xi_{i_1} \wedge ...$ ahol $\xi_* = xv.y.$ $dz_s = dx_s + dy_s$ konjugáltasan stb össze lehet gyűjteni a sima és a konjugáltas tagokat, kapunk egy finomabb febontást megint úgy hogy hány ilyen és olyan van. Függvényre már definiáltuk a $\partial, \bar{\partial}$ operátorokat, ezzel kiterjed minden.

8 Nyolcadik előadás

Kis kitérő.

Tétel 8.1 (de Rahm)**.** *X sima sokaság, akkor $\hat{H}^q(X, \mathbb{C}$ vagy $\mathbb{R}) = H^q_{dR}(X, \mathbb{C}$ vagy $\mathbb{R})$.*

Definíció 8.2. X egy topologikus tér, $\mathcal{S} \to X$ egy kéve finom*, hogyha $\forall \{U_\alpha\}$ lokálisan véges nyílt fedésre létezik $\{h_\alpha\}$ $h_\alpha : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ kévemorfizmusok, hogy

1. $\forall \alpha \exists \bar{W}_\alpha \subset U_\alpha : h_\alpha \rho_x = 0$ ha $x \notin \bar{W}_\alpha$
2. $\sum h_\alpha = id$

Példa 8.3. X sima sokaságon a sima k-formák kévéje finom.

Proof. Vegyünk egy lokálisan véges fedést, és egy alárendelt egységosztást: $\rho_\alpha \in C^\infty(X)$, és $\overline{\{\rho_\alpha \neq 0\}} \subset U_\alpha$, az összegük pedig 1. Mostmár a $h_\alpha : A^k \to A^k$ leképezés legyen $\phi \mapsto \rho_\alpha \phi$. □

Tétel 8.4. *X (parakompakt T^2) topologikus tér, $\mathcal{S} \to X$ egy finom kéve, akkor $\hat{H}^q(X, \mathcal{S}) = 0$ ha $q \geq 1$.*

Proof. $q = 1$ az egyszerűség kedvéért. $\{U_\alpha\}$ lokálisan véges nyílt fedés, megmutatjuk hogy $\hat{H}^1(\{U_\alpha\}) = 0$ minden fedésre, akkor persze $\hat{H}^1(\mathcal{S}) = 0$. Vegyünk egy kociklust $c = \{\sigma_{\alpha,\beta}\} \in Z^1(U, \mathcal{S})$, vagyis $\sigma_{\alpha,\beta} \in \mathcal{S}(U_\alpha \cap U_\beta)$, és kociklus, vagyis $\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\beta\gamma} + \sigma\gamma\alpha = 0$. Kell, hogy $c = \delta a$, ahol $a = \{f_\alpha\}$, az $f_\alpha \in \mathcal{S}(U_\alpha)$ és $f_\beta - f_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}$.
Vegyünk két nemüresen metsző U_α, U_β halmazt, rajta a $\sigma_{\alpha\beta}$ szelést, és a $h_\alpha \sigma_{\alpha\beta}$ szorzatot a finomsági feltevésből. Ez a szorzat nullaként kiterjed a teljes U_β-ra. β-t fixálva létrehozhatjuk ezeket a szeléseket az összes őt metsző halmazzal, jelölje $\tau_{\alpha\beta} := h_\alpha \sigma_{\alpha\beta}$. Most definiáljuk $\tau_\beta = \sum \tau_{\alpha\beta}$, ami egy értelmes összeg a lokális végesség miatt, ez egy szelése $\mathcal{S}(U_\beta)$-nek.

$$\tau_\beta - \tau_\alpha = \sum \tau_{\gamma\beta} - \sum \tau_{\gamma\alpha} = \sum h_\gamma(\sigma_{\gamma\beta} - \sigma_{\gamma\alpha}) = (\sum h_\gamma)\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}$$

□

Következmény 8.5. *X sima sokaság, akkor $\hat{H}^q(X, A^k) = 0$ $q \geq 1$-re.*

de Rahm bizonyítás. Emlék: ha adott kévék rövid egzakt sorozata† egy adott tér felett $0 \to E \to F \to G \to 0$. Akkor ehhez tartozik egy HES

$$0 \to H^0(E) \to H^0(F) \to H^0(G) \to H^1(E) \to \dots$$

Tekintsük a $0 \to dA^{p-1} \to A^p \to dA^p \to 0$, a Poincaré tétel miatt kapjuk hogy ez a sorozat a közepénél is egzakt, felírjuk a hozzá tartozó HESt.

$$0 \to H^0(dA^{p-1}) \to H^0(A^p) \to H^0(dA^p) \to H^1(dA^{p-1}) \to 0 \dots$$

Az A^p kéve aciklikussága miatt kapjuk, hogy $H^{q-1}(dA^p) = H^q(dA^{p-1})$ ha $q \geq 2$, illetve $H^1(dA^{p-1}) = H^0(dA^{p-1})/dH^0(A^p)$. $p = 0$ esetben $0 \to \mathbb{C} \to A^0 \to dA^0 \to 0$ egzakt. Felírjuk ennek is a HESt, látszik

*fine

†minden roston egzakt

hogy $H^1(\mathbb{C}) = H^0(dA^0)/dH^0(A^0) = Z^1(X)/\{df : f \in A^0\} = H^1_{dR}$ definíció szerint. Leolvasható továbbá $H^{q-1}(dA^0) = H^q(\mathbb{C})$ ha $q \geq 2$. Legyen most $q \geq 2$ az előzőek szerint a fenti sorozat folytatható:

$$H^q(\mathbb{C}) = H^{q-1}(dA^0) = H^{q-2}(dA^1) = \cdots = H^1(dA^{q-2}) = H^0(dA^{q-1})/dH^0(A^{q-1})$$

, és megint a lokálisan egzakt csírák pont a zártak és definíció szerint megkapjuk a de Rahm csoportokat. □

És most vissza $\mathbb{C}^n$-hez, α egy k-forma ki lehetett fejezni $dz_k, d\bar{z}_k$-val és felbontani az $(i, k-i)$ komponenseire, értelmeztük a $\partial\alpha, \bar{\partial}\alpha$ leképezéseket, az együtthatófüggvényeket deriváljuk, láttuk hogy egy függvény d-je felbomlik $1,0$ és $0,1$ komponensre, az első adja a $\partial\alpha$-t, a másik egy $\bar{\partial}\alpha$-t értelmez nekünk, egy $i+1, k-i$ és egy $i, k-i+1$ forma.

Állítás 8.6. *$\partial^2, \bar{\partial}^2 = 0$ és $\partial\bar{\partial} = \bar{\partial}\partial$.*

Proof. Tudjuk, hogy $d^2 = 0$ és $\partial + \bar{\partial} = d$, és számolunk. Az első tag ∂^2 egyp,q formából egy $p+2, q$ formát csinál, $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial$ egy $(p+1, p+1)$ formát, $\bar{\partial}^2$ pedig egy $p, q+2$ formát csinál, az eredmény nulla, különböző fokúak, tehát mindegyiknek külön el kell tűnnie. □

Definíció 8.7. $D \subset \mathbb{C}^n$ tartomány, vegyük az $\{\omega \in A^{p,q} : \bar{\partial}\omega = 0\}/\{\bar{\partial}\eta \in A^{p,q-1}\}$, ezt jelöljük $H^{p,q}(D)$Dolbeault csoport.

Emlék, láttuk a $H^{0,1}(D)$-t, ami pont az inhomogén Cauchy Riemann egyenlet megoldhatóságát méri. Szintén emlék a Poincaré tétel egy általánosítása policilinderre, ergo $H^{0,1}(D) = 0$ ha D policilinder, vagy $\mathbb{C}^n$ vagy körlapok szorzata. Ezt tételt Dolbeault látta be, sőt általában is ugyanezen terekre $H^{p,q}(D) = 0$ ha $q \geq 1$.

Megjegyzés 8.8. $H^{p,q}(D)$ függ a komplex struktúrától, nem topológiai információt tárol.

$H^{p,0}(D) = \{\omega = \sum a_I dz_I : \bar{\partial}\omega = 0\}$, vagyis hogy $a_I \in \mathcal{O}(D)$ "holomorf formák". Speciálisan $H^{0,0}(D) = \mathcal{O}(D)$.

Példa 8.9. $H^{0,1}(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) \neq 0$.

Megjegyzés 8.10. ha $n = 1$ akkor $H^{0,1}(\mathbb{C}) = 0$, sőt minden $D \subset \mathbb{C}$ tartományra is megoldható a $\bar{\partial}$ egyenlet. Analóg módon $H^{0,n}(D) = 0$ ha $D \subset \mathbb{C}^n$ tartomány.

Tétel 8.11 (Serre)**.** *$D \subset \mathbb{C}^n$ tartomány, és $H^{0,q}(D) = 0$, akkor D holomorfitási tartomány/analitikusan konvex/Stein.*

Tétel 8.12 (Oka, Norguet, Bremermann)**.** *Vegyünk egy holomorfitási/analitikusan konvex/Stein tartományt, akkor $H^{0,q}(D) = 0$ $q \geq 1$-re, sőt $H^{p,q}(D) = 0$.*

Ha M komplex sokaság és tudjuk hogy mit jelent a p,q forma, Hodge belátta a valós esetet először, majd elkezdték a komplexet nézni. Legyen M kompakt komplex úgy hogy $M \hookrightarrow P^N$, így örököl metrikát és megy rajta a valós harmonikus elmélet. H^k véges dimenziós tér, a dimenziói pont a Betti számok. Vegyük azon harmonikus formákat, amik p,q formák is, ennek a dimenziója...
V^n egy vlaós vektortér, a komplexifikációja $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V \oplus "iV"$. Ha $A \in EndV$, akkor $A_{\mathbb{C}}$ kiterjed $X + iY \mapsto AX + iAY$, van konjugálásunk is persze. $b : V \times V \to \mathbb{R}$ valós bilineáris , akkor azt is lehet komplexifikálni, ha szimmetrikus akkora komplexifikált is.

Állítás 8.13. *Ha V egy valós vektortér és b egy valós skaláris szorzat, akkor $h(v, w) = b_{\mathbb{C}}(v, \bar{w})$.*

Proof. □

9 Kilencedik előadás

A projektív térbe való beágyazás NEM topologikus tulajdonság! Szotrnó.
$w \in D \subset \mathbb{C}^n$ és bevezettük a $\partial_z, \partial_{\bar{z}}$ komplex érintővektorokat, ezek az érintőtér komplexifikáltjában élnek. $T_w^{1,0} = \{\sum a_j \partial_{z_j}\} < (T_w\mathbb{C}^n) \otimes \mathbb{C}$, és hasonlóan $T_w^{0,1} = \{\sum a_j \partial_{\bar{z}_j}\} < (T_w\mathbb{C}^n) \otimes \mathbb{C}$. A direkt öszegük $T_w^{1,0} \oplus T_w^{0,1} = T_w D \otimes \mathbb{C}$ mindenki, ezt a felbontást csináljuk általában. Az érintőtér almost komplex struktúráját ki lehet terjeszteni a komplexifikáltra természetesen, a sajátértékei $\pm i$ a $J_{\mathbb{C}}^2 = -id$ egyenlőség miatt.

Állítás 9.1. *$J_{\mathbb{C}} \partial_{z_k} = i \partial_{z_k}$ $J_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}_k} = -i \partial_{\bar{z}_k}$ tehát ezek a sajátalterek.*

Absztrakt módon (V, J) egy majdnem komplex vektortér, mindezt megismételjük rá. $V_{\mathbb{C}}$-re kiterjesztjük J-t, $J_{\mathbb{C}}^2 = -id$ megmarad, és vesszük a megfelelő sajátaltereket. Definiálhatjuk tehát $V^{1,0} = \{\xi \in V_{\mathbb{C}} | J_{\mathbb{C}} \xi = i\xi\}$ és $V^{0,1} = \{\xi \in V_{\mathbb{C}} | J_{\mathbb{C}} \xi = -i\xi\}$. A direkt összegük persze a teljes tér, és a valós felbontás analogonjára $\partial_{z_k} = \frac{1}{2}\partial_{x_k} - \frac{i}{2} J \partial_{x_k}$, vagyis $V^{1,0} = \{v - iJv : v \in V\}$ és megfelelően $V^{0,1} = \{v + Jv | v \in V\}$.
Egy M komplex sokaságra $p \in M, V = T_p M$ választással ugyanezt eljátszhatjuk. $T_p M \otimes \mathbb{C} = T_p^{1,0} M \oplus T_p^{0,1} M$. Kapjuk a $T^{1,0} \to M$ holomorf vektornyalábot mint a komplexifikált érintőnyaláb alterét. Ha $U \subset M$ nyílt, $\phi : U \to \mathbb{C}^n$ holomorf koordináta, akkor $\phi_* : T^{1,0} U \to T^{1,0} \phi(U)$ azonosít.

Gyakorlat 9.2. *Ragasztófüggvények: ϕ_α, ϕ_β holo térképeknél a ragasztás pont a $(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})'$ derivált lesz.*

$T^{0,1} M \to M$ csak egy sima $\mathbb{C}$ nyaláb.

Gyakorlat 9.3. *Mik a ragasztófüggvények?*

Ebből kiindulva formák: $D \subset \mathbb{C}^n$, bevezettük a $dz_k, d\bar{z}_k$ formákat, ezek nem a valós koérintőtérben élnek, hanem $T_w^* D \otimes \mathbb{C}$-ben, ez a komplexifikált a $T_p \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ valós lineáris leképezések halmaza. $T_w^{1,0} = \{\sum a_k dz_k : a_k \in \mathbb{C}\} = \{l : T_p \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} : \mathbb{R} - \text{lineáris}, l(Jv) = il(v) : v \in T_p \mathbb{C}^n\} = \{l : T_p \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C} | \mathbb{C} - \text{lineáris}, l(J_{\mathbb{C}} v) = il(v), v \in T_p \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}\} = \{l : T_p \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \mathbb{C} - \text{lineáris}, l|_{T_w^{0,1}} = 0\}$. Teljesen szimmetrikusan lehet definiálni $(T_w)^{0,1}$-et, legegyszerűbben $\{l : T_p \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \mathbb{C} - \text{lineáris}, l|_{T^{1,0}} = 0\}$.
Ezt átvisszük az érintőtérre. $(V^*)_{\mathbb{C}} = \{l : V \to \mathbb{C} : \mathbb{R} - \text{lineáris}\}$ most is. A legutolsó karakterizációt használjuk definíciónak. $(V^*)^{1,0} = \{l : V \to \mathbb{C} : l|_{V^{0,1}} = 0, \mathbb{R} - \text{lineáris}\}$, és hasonlóan $(V^*)^{0,1}$-re. Kapjuk a $T^{*1,0} M \to M$ holomorf koérintőnyalábot. Ha adott egy holomorf térkép $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$, vehetjük pontonként a $d\phi_j = \partial \phi_j$ formákat, ezek trivializálják a nyalábot az U térképtartomány fölött. A $T^{*0,1} M \to M$ szintén csak egy sima $\mathbb{C}$ vektornyaláb.
Mik lesznek a p, q formák? V, J egy majdnem komplex vektortér, a $V_{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$ felbontás fogja ezt indukálni. $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ legyenek $1, 0$ formák, mint az előbb definiáltuk, és $\beta_1, \ldots, \beta_q$ pedig $0, 1$ formák. Összeékelve $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_q$ generálja a (p, q) formák lineáris alterét, ezt a halmazt nevezzük $(V^*)^{p,q}$-nak. $\alpha : V \times \cdots \times V \to \mathbb{C}$ valós k-lineáris alternáló forma, akkor ő felírható $\sum_{p+q=k} \alpha_{p,q}$ alakban pont mint eddig úgy, hogy $\alpha_{p,q}$ egy p, q forma, és ez a felírás egyértelmű. Megint kapunk egy $T^{p,q} M \to M$ sima $\mathbb{C}$ vektornyalábot. Ennek a szelései érdekelnek minket, jelöljük őket $A^{p,q}$-val. Definiálhatjuk szintén a ∂ és $\bar{\partial}$ operátorokat amik az első, vagy a második indexet emelik egyel. Ennek a konstrukciója a követkző, vesszük az $\alpha \mapsto d\alpha$ operátort, és használjuk a fenti fölbontást és vesszük ez egyik illetve a másik komponenst. Az eddigi számolásaink érvényben maradnak hisz minden lokális, $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$ és antikommutálnak, s megkapjuk a sokaság Dolbeault csoportjait, $H^{p,q} M = \{\bar{\partial} \alpha_{p,q} = 0\} / \{\bar{\partial} \beta_{p,q-1}\}$.

Állítás 9.4. *V, J, b véges dimenziós valós majdnem komplex Herimtikus[*] vektortér. Kiterjesztjük $b_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ szimmetrikus komplex bilineáris formává.*

1. *$b_{\mathbb{C}}(V^{1,0}, V^{1,0}) = 0 = b_{\mathbb{C}}(V^{0,1}, V^{0,1})$*
2. *$\xi, \eta \in V_{\mathbb{C}}$ akkor $h(\xi, \eta) := b(\xi, \bar{\eta})$ definícióval egy $\mathbb{C}$ hermitikus skaláris szorzat.*
3. *Erre a skaláris szorzatra $V^{1,0} \perp_h V^{0,1}$*
4. *$h|_{V^{1,0}}$ egy komplex Herimtikus skaláris szorzat ($h|_{V^{0,1}}$-en úgyszintén)*

V, J mint eddig, $(\Lambda^k V^*)_{\mathbb{C}} = \{V \times \cdots \times V \to \mathbb{C} | \mathbb{R} - \text{multilineáris, alternáló}\}$, ha adott még egy b valós Hermitikus skaláris szorzat is, bevezettünk egy b_k valós skaláris szorzatot a k-formák terén is, ezt komplexifikáljuk $b_{k,\mathbb{C}}$ egy komplex bilineáris szimmetrikus forma $\Lambda^k V_{\mathbb{C}}^* \times \Lambda^k V_{\mathbb{C}}^* \to \mathbb{C}$. Most megint vehetjük a $h_k = b_{k,\mathbb{C}}(\cdot \bar{\cdot})$-t. A konjugálás az értékekre értendő, kapunk egy komplex Hermitikus szorzatot a komplex értékű k-formák terén.

Gyakorlat 9.5. *A $(\Lambda^k V^*) = \bigoplus_{p+q=k} V^{p,q}$ felbontás ortogonális.*

Gyakorlat 9.6. *$\mathbb{C}^n = V$-nél mi lesz $h(dz_j, dz_k) =?$*

Most legyen V^n irányított, b valós skaláris szorzat rajta adott, ez definiálja a $* : \Lambda^k V^* \to \Lambda^{n-k} V^*$ operátort, most ezt is komplexifikáljuk. $*_{\mathbb{C}} : (\Lambda^k V^*)_{\mathbb{C}} \to (\Lambda^{n-k} V^*)_{\mathbb{C}}$, mivel ő egy valós operátorból jön, $*_{\mathbb{C}} = \bar{*}_{\mathbb{C}}$.
V^{2n}, J, b valós Hermitikus. $*_{\mathbb{C}} : \Lambda^k V_{\mathbb{C}}^* \to \Lambda^{2n-k} V_{\mathbb{C}}^*$ és $\alpha, \beta \in \Lambda^k V_{\mathbb{C}}^*$ adott. Vehetjük $\alpha \wedge *_{\mathbb{C}} \beta$-t mint eddig, ez megegyezik $b_{k,\mathbb{C}}(\alpha, \beta) dVol$-lal. Ebből kaphatjuk a Hermitikus skaláris szorzatot, $\alpha \wedge *_{\mathbb{C}} \bar{\beta} = h(\alpha, \beta)\mathrm{dVol}$.

Állítás 9.7.

1. *$*_{\mathbb{C}} : V^{p,q} \to V^{n-q,n-p}$*[†]
2. *$*_{\mathbb{C}}^2 = (-1)^{p+q} id$*

Tekintsük $A^{p,q}(M)$-et, ahol M kompakt valós Hermitikus $\mathbb{C}$-sokaság. Itt is definiáljuk az L_2 skaláris szorzatot, $(\alpha, \beta) = \int_M \alpha \wedge *_{\mathbb{C}} \bar{\beta} = \int_M h(\alpha, \beta) dVol$.

Állítás 9.8. *$\alpha \in A^{p,q-1}, \beta \in A^{p,q}$, akkor létezik egy formális adjungáltja a $\bar{\partial}$ operátornak, személyesen $\bar{\partial}^* = - *_{\mathbb{C}} \partial *_{\mathbb{C}}$.*

Proof. Ugyan az mint a valósban. □

Hasonlóan létezik ∂-nak is formális adjungáltja ∂^*, pontosabban egyenlő $- *_{\mathbb{C}} \bar{\partial} *_{\mathbb{C}}$.

Állítás 9.9. *A formulák miatt $(\bar{\partial}^*)^2 = (\partial^*)^2 = 0$, illetve $\overline{\partial^*} = \bar{\partial}^*$.*

Definíció 9.10. $\bar{\partial}$ Laplace operátor $\bar{\Box} := \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$, és konjugálás nélkül a ∂ Laplace operátort, jele $\Box$.

Definíció 9.11. $\alpha \in A^{p,q}$ forma $\bar{\partial}$-harmonikus, hogyha $\bar{\Box}\alpha = 0$. Ezeknek a halmazát jelöli $\mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q} = ker\ \bar{\Box}$. Teljesen hasonlóan a ∂ harmonikus formák.

Állítás 9.12.

1. *$\bar{\Box}, \Box$ formálisan önadjungált operátorok, szintén mint a múltkor*
2. *$\bar{\Box}\alpha = 0$ pontosan akkor hogyha $\bar{\partial}\alpha = 0 = \bar{\partial}^*\alpha$ és hasonlóan $\Box$-re*

[*] b valós bilineáris szimmetrikus J invariáns
[†] V 2n dimenziós!

Következmény 9.13. *Ha α $\bar\partial$ harmonikus, akkor ő meghatároz egy osztályt $[\alpha] \in H^{p,q}(M)$, hiszen zárt.*

Tétel 9.14 (Hodge felbontás)**.** *$A^{p,q} = \mathcal{H}^{p,q}_{\bar\partial} \oplus \bar\Box A^{p,q}$, a harmonikus formák tere véges dimenziós, és az összeg ortogonális. Ezt tovább is írhatjuk, $= \mathcal{H}^{p,q}_{\bar\partial} \oplus \bar\partial A^{p,q-q} \oplus \bar\partial^* A^{p,q+1}$.*

Proof. Ortogonalitás ugyanúgy mint a valósesetben, az egyenlőség nehéz parcdif. □

Következmény 9.15. *$\alpha \in A^{p,q}$ felírható $\alpha_h + \bar\Box\beta$. Az $\alpha \mapsto \beta$ hozzárendelés (ahol β-ról kikötjük hogy merőleges legyen a harmonikusok alterére hogy egyértelmű legyen) Green operátornak nevezzük.*

Állítás 9.16. *$T : A^{p,q} \to A^{\tilde p,\tilde q}$ komplex lineáris és felcserélhető a $\bar\Box$ operátorral, akkor $T(ker\bar\Box) \subset ker\bar\Box$ és $T(im\bar\Box) \subset im\bar\Box$.*

Ilyenek pl $\bar\partial, \bar\partial^*, \bar\Box$.

Proof. $\bar\Box\alpha = 0$, akkor a $T\bar\Box\alpha = 0$, felcserélhetjük $\bar\Box T\alpha = 0$ és $T\alpha$ is harmonikus.
$T\bar\Box\beta = \bar\Box T\beta$ mutatja a másik irányt. □

10 Tizedik előadás

Következmény 10.1. *$TG = GT$ a fenti T-re.*

Proof. α egy sima p,q forma, bontsuk föl $\alpha_h + \bar\Box\beta$-ra, ahol $\beta = G\alpha$. $TG\alpha = T\beta$ emiatt. Másfelől $T\alpha = T\alpha_h + T\bar\Box\beta = T\alpha_h + \bar\Box T\beta$ és világos hogy$T\alpha_h \in \mathcal{H}^{p,q}_{\bar\partial}$, és így a felbontás egyértelműsége miatt $GT\alpha = T\beta$. □

Következmény 10.2. *$G\bar\partial = \bar\partial G, G\bar\partial^* = \bar\partial^* G$, és hasonlóan $\bar\partial$-al.*

Tétel 10.3. *$\mathcal{H}^{p,q}_{\bar\partial} \xrightarrow{\phi} H^{p,q}_D(M)$, izomorfizmus az $\alpha \mapsto [\alpha]$.*

Megjegyzés 10.4. A baloldal a metrikátólfügg, míg a jobb oldal csak a komplex struktúrától függ.

Proof. A leképezés minden esetre jóldefiniált, hiszen $\bar\Box\alpha = 0$ ekvivalens azzal, hogy $\bar\partial\alpha = 0$ és $\bar\partial^*\alpha = 0$, tehát α-hoz valóban tartozik egy kohomológiaosztály. Először ϕ epimorfizmus: $[\tilde\alpha] \in H^{p,q}_D(M)$, vagyis $\bar\partial\tilde\alpha = 0$ erre a p,q formára. Vegyük a Hodge felbontásnak megfelelő alakját $\tilde\alpha_h + \bar\Box G\tilde\alpha$, kibontjuk a $\bar\Box$ operátort, beláttuk hogy G kommutál $\bar\partial$-lal és $\tilde\alpha = \tilde\alpha_h + \bar\partial\bar\partial^* G\tilde\alpha$.
ϕ mono: Legyen $[\beta_1] = [\beta_2]$. Ez azt jelenti, hogy $\beta_1 - \beta_2 = \bar\partial\gamma$ valami $p,q-1$ formára. Kiszámoljuk $||\bar\partial\gamma||^2_{L^2} = (\bar\partial\gamma, \beta_1 - \beta_2) = (\gamma, \bar\partial^*(\beta_1 - \beta_2)) = (\gamma, 0 - 0) = 0$, vagyis $\bar\partial\gamma \equiv 0$.
Ha $q = 0$, akkor $H^{p,0}(M)$-re nincs $\bar\partial^*$, ekkor α egy $p,0$ forma ami $\bar\partial$ zárt, tehát ez egy holomorf $p,0$ forma. A harmonikus $p,0$ formák $\bar\partial$-ra nézve pedig pontosan ugyanezt a halmazt alkotják. □

Megjegyzés 10.5. Általában $\Delta, \bar\Box$-nek nincs sok köze egymáshoz :(A Δ operátor nem tartja az A^k tér $A^{p,q}$-kra való felbontását. Speciálisan ha $\Delta\alpha = 0$, akkor $\Delta\alpha_{p,q} \neq 0$ általában.
Ha $\bar\partial\beta = 0$, akkor nem feltétlenül lesz $\Delta\beta = 0$, sőt még zárt sem feltétlenül!

Példa 10.6. Ha β egy $p,0$ forma. Ebben az esetben $\bar\partial^* \equiv 0$, és $\bar\Box = \bar\partial^*\bar\partial\beta$. Speciálisan ha β holomorf $p,0$ forma (ergo $bar\Box\beta = 0$, vagyis $qbar\Box\beta = 0$), azért nem lesz harmonikus a Riemann értelemben mert nem feltétlenül zárt. zdw a $\mathbb{C}^2$-ben egy nem zárt forma. Egy holomorf forma zárt például ha a sokaság komplex dimenziója $= 1$.

Tétel 10.7. *M^2 kompakt komplex, Hermitikus és adott egy α holomorf $1,0$ forma, akkor $d\alpha = 0$.*

Proof. $\bar{\partial}\alpha = 0$ mivel holomorf, ezért $d\alpha = \partial\alpha$, indirekt tegyük föl hogy ez nem azonosan nulla. $0 \neq \int_M \partial\alpha \wedge \overline{\bar{\partial}\alpha}$ könnyű házi feladat otthon lokálisan kiintegrálni. Másrészt belátjuk hogy mégiscsak nulla. $\overline{\partial\alpha} = \bar{\partial}\bar{\alpha}$ volt már, továbbá $\partial\bar{\partial}\bar{\alpha} = -\bar{\partial}\partial\bar{\alpha} = -\bar{\partial}\overline{\bar{\partial}\alpha} = 0$. Tekintsük $d(\alpha \wedge \overline{\partial\alpha}) = d\alpha \wedge \overline{\partial\alpha} - \alpha \wedge d\overline{\partial\alpha}$ és a második tag a $d = \partial + \bar{\partial}$ azonosság miatt eltűnik és végül a kifejezés egyenlő $\partial\alpha \wedge \overline{\partial\alpha}$-val, tehát az integráljának nullának kellene lennie hiszen egzakt forma egy zárt sokaságon és Stokes tétel miatt készen vagyunk. □

Így ellenpéldákat csak három dimenzióban várhatunk legalább.

Példa 10.8. Kiindulunk a $\mathbb{C}^3$-ból, amire úgy gondolunk mint a komplex Heisenberg csoport:

$$\begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lemma 10.9. *$\beta = dz - ydx$ egy holomorf jobbinvariáns $1,0$ forma.*

Szeretnénk a Heisenberg csoportot egydiszkrét részcsoporttal faktorizálni, hogy a faktor kompakt legyen.

$$\Gamma = \{ \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}[i] \}$$

Most β indukál egy formát a faktoron mert invariáns, és persze ez nem zárt, mert már fent sem volt az.

Legyen most M, g Hermitikus, ω fundamentális forma, ehhez is tartozik egy leképezés $L : \alpha \mapsto \omega \wedge \alpha$ a Lefschetz operátor. Ez egy valós operátor, hiszen ω valós forma. L-nek is létezik formális adjungáltja Λ, ez kettővel ejti a fokot persze. Azt akarjuk, hogy $(L\alpha, \beta) = (\alpha, \Lambda\beta)$. A $g(L\alpha, \beta)dVol$ formát integráljuk alapvetően, ez megegyezik $L\alpha \wedge *\beta$-val korábbi számolásaink szerint, továbbá megegyezik $\omega \wedge \alpha \wedge *\beta$ definíció szerint, mivel ω valós 2-forma, felcseréljük és $= \alpha \wedge \omega \wedge *\beta = \alpha \wedge * *^{-1} L * \beta = g(\alpha, *^{-1}L * \beta)dVol$, és ezzel látjuk hogy $\Lambda = *^{-1}L* = L^*$.

Tétel 10.10 (Kähler azonosságok)**.** *M kompakt Kähler sokaság, akkor*

1. $[\bar{\partial}^*, L] = i\partial$
2. $[\partial^*, L] = -i\bar{\partial}$
3. $[\Lambda, \bar{\partial}] = -i\partial^*$
4. $[\Lambda, \partial] = i\bar{\partial}^*$

Proof. Nem bizonyítjuk, már $\mathbb{C}^n$-re se könnyű, viszont az elsőből következik a többi. $1 \to 2$ például. $\bar{\partial}^* L - L\bar{\partial}^* = i\partial$, konjugáljuk meg az egyenletet: $\overline{\bar{\partial}^* L} - \overline{L\bar{\partial}^*} = -i\bar{\partial}$, a $*$ operátor valós, ezért $\bar{\partial}^* = - * \partial *$ konjugáltja egyszerűen ∂^*. Használjuk még, hogy L valós opertátor, vagyis $\bar{L} = L$, és készen vagyunk. Az egyenletek adjungálásával kapjuk a 3,4-et. □

Tétel 10.11. *Ha M kompakt Kähler, akkor $\Box = \bar{\Box} = \frac{1}{2}\Delta$!*

Proof. Először is a két Hodge operátor egyenlősége. $\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial$, alkalmazzuk a fenti négyes azonosságot, helyettesítsünk $\bar\partial^*$ helyére $= -i(\bar\partial[\Lambda,\partial]+[\Lambda,\partial]\bar\partial)$, kibontjuk a kommutátorokat, használjuk a $\bar\partial$ és ∂ antikommutálását mindkét tagban ahol megjelennek, majd a hármas azonosságot helyettesítve kiszámoljuk $\Box$-t is, és ugyan azt kapjuk.
Most pedig $\Box + \bar\Box = \Delta$. $\Delta = d\delta + \delta d = (\partial+\bar\partial)(\partial+\bar\partial)^* + (\partial+\bar\partial)^*(\partial+\bar\partial)$, az adjungálás lineáris persze, kibontjuk a szorzatokat

$$\partial\partial^* + \partial\bar\partial^* + \bar\partial\partial^* + \bar\partial\bar\partial^* +$$

$$\partial^*\partial + \partial^*\bar\partial + \bar\partial^*\partial + \bar\partial^*\bar\partial$$

Megjelenik $\Box$ és $\bar\Box$, a maradék tagokról kellene látni hogy nulla. Megint helyettesítünk a hármas és négyes azonosságokkal az adjungáltas tagokba. Kibontjuk a komutátorokat, néhány tagban ∂^2 van, vagy a vonásos verzió, a maradék tagok pedig kiejtik egymást. $\Box$

Következmény 10.12. *M, g kompakt Kähler, akkor Δ kommutál $*, L, \Lambda$-val és megőrzi a p, q formákat.*

Proof. $*$-ra eddig is tudtuk, a másikokhoz az kellene hogy $[L, \Box] = 0$. $L\Box = L(\partial\partial^* + \partial^*\partial)$ definíció szerint, és a kettes azonosságot alkalmazzuk abban az alakban, hogy $\partial^* L + i\partial = L\partial^*$, ezt helyettesíthetjük a második tagban. $L\partial\alpha = \omega\wedge\partial\alpha$, és $\partial(\omega\wedge\alpha) = \partial\omega\wedge\alpha + \omega\wedge\partial\alpha$ ha kibontjuk. Kähler esetben $0 = d\omega = \partial\omega + \bar\partial\omega$, és így mindkét tagnak nullának kell lennie, hiszen egy $2,1$ és egy $1,2$ forma összege csak úgy nulla ha mindketten nullák, és így $L\partial\alpha = \partial L\alpha$. Az első tagban ezt a felcserélést kihasználjuk, megint helyettesítjük a megjelenő $L\partial^*$ helyére a kettes azonosságot, két tag kiesik, ami megmarad az pontosan $\Box L$. $\Box$

11 Tizenegyedik előadás

Volt a Dolbeault csoport, a $\bar\partial$ homológiacsoportjai a p, q formákon, ahol M kompakt Kähler. Szintén ebben az esetben nagyon szoros összefüggéseket láttunk a Riemann-Laplace operátor és a holomorf megfelelői között.

Állítás 11.1. *M kompakt Hermitikus, akkor $\bar\Box * = *\bar\Box$, és a nem vonásos verzióra is.*

Proof. A Kähler esetet tárgyaljuk, az azonosság miatt itt $\Delta = 2\bar\Box$, és a Riemann esetben már láttuk. $\Box$

Tétel 11.2. *M kompakt Kähler, akkor ω harmonikus.*

Proof. $\omega = \omega\cdot 1 = L1$, ahol 1 az azonosan 1 függvény. $\Delta\omega = \Delta L1 = L\Delta 1 = L0 = 0$. $\Box$

Következmény 11.3. *Ha M kompakt Hermitikus sokaság Kähler pontosan akkor, hogyha az asszociált forma ω harmonikus.*

Proof. Egyik irány kész, a másikhoz ha ω harmonikus, akkor speciálisan zárt, ami pont a Kähler feltétel. $\Box$

Tétel 11.4. *Ha M kompakt Kähler, α egy sima k-forma harmonikus, felbontjuk $\sum \alpha_{p,q}$ alakban, akkor minden $\alpha_{p,q}$ komponens is harmonikus.*

Proof. $\frac{1}{2}\Delta = \bar\Box$, a négyzet Laplace megőrzi a felbontásunkat konstrukció miatt, tehát $\bar\Box\alpha = \sum \bar\Box\alpha_{p,q}$, az egyik oldalt nulla van, a másikon pedig egy p, q formákra való felbontás, tehát mindegyik tag külön-külön eltűnik, ergo harmonikusak. $\Box$

Tétel 11.5. *M kompakt Kähler, $\mathcal{H}^k_{\mathbb{C}}(M)$ a komplex értékű harmonikus k-formák tere fölbomlik a komplex struktúra szerint.*

Proof. Az előző számolás. □

Tétel 11.6 (Hodge felbontás)**.** *M kompakt Kähler, akkor $H^k_{dR}(M;\mathbb{C}) = \oplus_{p+q=k} H^{p,q}_{\bar\partial}(M)$ a de-Rahm és Dolbeault csoportokra. Továbbá $H^{p,q}_{\bar\partial}(M) = H^{q,p}_{\bar\partial}(M)$*

Proof. A konjugálás mint $A^{p,q} \to A^{p,q}$ leképezés egy antilineáris izomorfizmus. Ha $\bar\Box\phi = 0$, akkor $\Box\bar\phi = 0$ egy konjugálás után. Kähler esetben $\Box = \bar\Box$, tehát ϕ harmonikus. Következik tehát hogy megszorítva $\mathcal{H}^{p,q}_{\bar\partial}$-ra valós lineáris izomorfizmust kapunk a konjugált $\mathcal{H}^{q,p}_{\bar\partial}$ csoporttal, a múltkor láttuk, hogy ezek izomorfak a Dolbeault csoportokkal. A k. de-Rahm csoportizomorf a valós harmonikus (Δ zárt) formák terével, összetéve a két Hodge felbontást, adódik az állítás. □

Következmény 11.7. $b_k = \sum_{p+q=k} h_{p,q}$

Tétel 11.8 (Dolbeault)**.** *M komplex sokaság, akkor $H^q(M;\Omega^p) = H^{p,q}_{\bar\partial}(M)$.*

Proof. Valóshoz analóg módon, lényeg hogy $\bar\partial$ lokálisan megoldható. □

Tétel 11.9 (Serre dualitás)**.** *M kompakt komplex n dimenziós Kähler sokaság, akkor $H^{p,q}_{\bar\partial}(M) = H^{n-p,n-q}_{\bar\partial}(M)$.*

Proof. $H^{p,q}_{\bar\partial}(M) = \mathcal{H}^{p,q}_{\bar\partial} \xrightarrow{*} \mathcal{H}^{n-q,n-p}_{\bar\partial}$. $\bar\Box\phi = 0$, akkor $\bar\Box * \phi = 0$ mert kommutál a két operátor, és valóban úgy megy a leképezés, továbbá izomorfizmus nyilván, inverze $\pm *$, aztán egy konjugálással kapjuk az állítást. □

Ha M egy Riemann felület, $k = 0, 1, 2$ persze. Az első de Rahm kohomológia rangja $2g$, mivel a $H^{1,0}$ izomorf $H^{0,1}$-el, ezért mindkettő dimenziója g kell legyen, ehát $h^{1,0} = h^{0,1}$ topologikus.
Ha a komplex dimenzió 2, akkor $2,2$ formák lesznek, $2,1$ és $1,2$, ezek összege a harmadik de Rahm, aztán $2,0$ $1,1$ $0,2$ adja ki a második de-Rahm kohomológiát, $1,0$ és $0,1$ adja ki az első de-Rahmot, és $0,0$ a nulladikat.
A Serre dualitásból látunk extra izomorfizmusokat, ami visszaadja a $3-1$ poincaré dualitást.
A projektív síkra ki tudjuk találni hogy hogy néz ki ez a táblázat. $21, 12, 10, 01$ eltűnnek, továbbá $20, 02$ is, hiszen $[\omega] \neq 0 \in H^{1,1}$, és egy rangú az a direkt összeg. Ezeket a táblázatokat szokás Hodge gyémántnak hívni.

Következmény 11.10. *M kompakt Kähler, akkor b_{2k+1} mindig páros.*

Proof. A megfelelő sor

$$H^{2k+1,0}\ H^{2k,1}\ \ldots\ H^{k+1,k}\ H^{k,k+1}\ \ldots\ H^{0,2k+0}$$

alakú, és látjuk hogy mindenki párbaáll konjugálással. □

Példa 11.11. $\mathbb{C}^n, g_{eu}$, vegyünk benne egy Γ rácsot, vele ha faktorizálunk adódik egy kompakt komplex tórusz, milyen lesz a gyémántja? Expliciten felírható, hogy mik a harmonikus formák ebben az esetben. $dz_I \wedge d\bar z_J$ a rácsra nézve invariáns, tehát indukál egy formát a tóruszon is. Ezeknek konstansszorosai generálják a harmonikus formákat. Következésképp $\dim H^{p,q}(T^n)$, tehát $\binom{n}{p}\binom{n}{q}$ dimenziós.

Tétel 11.12. *M kompakt Kähler, $\alpha \in H^0(M,\Omega_p)$, egy holomorf p-forma, akkor $d\alpha = 0$, és $H^0(M,\Omega_p) \hookrightarrow H^p(M;\mathbb{C})$.*

Proof. $\alpha \in A^{p,0}$, amire $\bar\partial\alpha = 0$, ekkor $\bar\partial^*$ is nulla, azért harmonikus, Kählerség miatt valós harmonikus, ezért zárt. Beágyazás mert egyéertlmű harmonikus reprezentáns van. □

Kodaira beágyazás

Tétel 11.13 (Kodaira 1954)**.** *M kompakt komplex sokaság. $\exists\phi : M \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ pontosan akkor, hogyha létezik $L \to M$ pozitív holomorf vonalnyaláb.*

Proof. Egyik irány könnyű, megszorítjuk az $\mathcal{O}(1)$ nyalábot, pozitív volt és az is marad.
Hogy konstruálunk beágyazást egy ilyen vonalnyalábból? Bizonyítás vázlat. Vegyük az L^m tenzorhatvány nyalábot, valami kellően nagy m-re. Tegyük fel hogy $\dim H^0(M, L^m) = N + 1$. Választunk egy bázist $\beta_0, \dots, \beta_N$. Választunk az M-hez egy U nyílt fedést, ami trivializálja L^m-et. L ragasztófüggvényei g_{jk}, akkor L^m-et g_{jk}^m ragasztja persze. A β_s széléshez tartoznak a β_j^s komponensfüggvények, egy holomorf függvény U_j-n, és a metszeteken $\beta_j^s = g_{jk}^m \beta_k^s$. Veszünk egy fix j-t, az U_j-n megadunk egy leképezést $\mathbb{C}^{N+1}$-be egyszerűen a reprezentánsok felsorolásával. Ha $\forall z \in U_j$-re $\phi(z) \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus 0$, és projektivizálhatjuk.
$U_j \cap U_k$-n koordinátánként kihasználhatjuk a ragasztási összefüggéseket. Minden koordináta $g_{jk}^m(z)$-vel szorzódik, tehát projektivizálódik a leképezésünk, átmegy a faktoron.

Megjegyzés 11.14. Ez a $\phi : M \to \mathbb{P}^N$ leképezés nem függ a bázis megválasztásától.

Mit szeretnénk mondani erről a ϕ-ről? Látni kellene, hogy $\forall z \in M \exists s : \beta_j^s(z) \neq 0$ ha $z \in U_j$. Ekvivalensen $\forall z \in M \exists \beta \in H^0(M, L^m) : \beta(z) \neq 0$. Következne ebből, hogy ϕ jól definiált. Kell még hogy ϕ injektív, ez lefordítva azt követeli meg, hogy $\forall p \neq q \in M \exists \beta \in H^0(M, L^m) : \beta(p) = 0, \beta(q) \neq 0$. Immerziónak is kell lennie végül, ergo $\phi_* : T_p^{1,0}M \to$ monomorfizmus.
Most vázoljuk az injektivitási lépést. Vegyük észre, hogy ebből már következik a jóldefiniáltsági feltétel is.
Vegyük az $\mathcal{S} < \mathcal{O}(L^m)$ részkévét, ami a p-ben és q-ban eltűnő holomorf szelésekből áll. Felírjuk az indukált rövid egzakt sorozatot, a faktor p, q-n lesz szupportálva, ezekben a pontokban kapjuk L^m fibrumait p és q felett, hiszen pont a $\mathcal{O}(L^m)_p \to L_p^m$ kiértékelési leképezés magjával faktorizálunk. Felírjuk a hosszú egzaktat.

$$H^0(\mathcal{S}) \to H^0(\mathcal{O}(L^m)) \to H^0(\mathcal{O}(L^m)/\mathcal{S}) \to H^1(\mathcal{S})$$

A második leképezés $\phi \mapsto (\phi(p), \phi(q))$, és látjuk amit szeretnénk, hogyha belátjuk hogy epimorfizmus, ehhez belátjuk hogy $H^1(\mathcal{S}) = 0$. □

12 Tizenkettedik előadás

Emlékeztető, ha M komplex sokaság, L egy Hermitikus holomorf vonalnyaláb, nevezzük a metrikát h-nak. Vegyünk egy U_α trivializáló fedést, és hozzá a $g_{\alpha\beta}$ ragasztófüggvényeket. A h metrika megadása ekvivalens egy $a_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}_+$ függvénycsalád megadásával, melyre $a_\alpha = |g_{\alpha\beta}|^2 a_\beta$ teljesül. $\frac{1}{2\pi i}\partial\bar{\partial} log a_\alpha$ ad egy ω valós $(1, 1)$ formát.

Definíció 12.1. L-et akkor mondjuk pozitívnak, hogyha ez az ω egy Kähler forma, vagyis ha $\omega(X, JY)$ egy Hermitikus metrika.

Szintén volt, hogy $\mathcal{O}(1) \to \mathbb{C}P^n$ egy pozitív nyaláb. Ebből látszik, hogy a tétel egyik iránya valóban triviális, csak megszorítjuk az $\mathcal{O}(1)$-et.

Megjegyzés 12.2. Ha L_1, L_2 két holomorf vonalnyaláb M fölött, $L_1 > 0$ és $L_2 \geq 0$ (pozitív szemidefinit a metrika, nem definit). Ilyenkor könnyen adhatunk definit metrikát $_1 \otimes L_2$-n, a ragasztófüggvények összeszorzódnak, így a logaritmusuk összeadódik, egy definit és egy szemidefinit forma összege definit.

Rövid bevezetés a felfújásból. Választunk egy $p \in M^n$ pontot, kidobjuk és beragasztunk a helyébe egy $\mathbb{C}P^{n-1}$-et. Először $M = \mathbb{C}^n$-et. A tautologikus nyaláb $L = \mathcal{O}(-1) \to \mathbb{C}P^n = \{([z], \xi) : \xi \in \mathbb{C}^{n+1}, \xi \in [z]\}$ része a triviális nyalábnak, egyszerűen az első koordinátára való vetítés π a projekció. Vetítsünk most azonban a második koordinátára, ezt jelölje P, ez nyilván holomorf, szürjektív $\mathbb{C}^{n+1}$-re, sőt az origón kívül bijektív. A nulla őse azonban a teljes $\mathbb{C}P^n$, hiszen minden egyenes tartalmazza az origót (konstrukció szerint). $P|_{L \setminus \mathbb{C}P^n}$ biholomorfizmus $L \setminus \mathbb{C}P^n$ és $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ között, az origót pedig kicseréltük egy teljes projektív térre, ez a felfújás. Ugyanígy lehet egy $0 \in U \subset \mathbb{C}^{n+1}$-et felfújni. Sokaságnál pedig egy térképet veszünk, vigye a felfújandó $p \in U \subset M^n$ pontot az origóba, és a V képet válasszuk policilindernek technikai okokból (egyértelműség, nem diskutáljuk). $M \setminus U$-t vesszük, és $U \setminus \{p\}$ és a térkép képén fújjunk fel, $\tilde{V} \setminus \mathbb{C}P^{n-1}$, ez biholomorf $U \setminus \{p\}$-vel. Ezzel a biholomorfizmussal beragasztjuk a felfújtat.
Back to the tétel. Ha $F \to M$ holomorf vonalnyaláb, $bl(F) = \{p \in M : \forall s \in H^0(M, F) : s(p) = 0\} \subset M$ egy analitikus részhalmaz ("base locus"). Ha M kompakt, vegyünk egy $\beta_0, \ldots, \beta_N \in H^0(M, F)$ egy bázis, akkor kapunk egy holomorf $M \setminus bl(F) \to \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^N$ leképezést.*
Tudniillik ha $p \in M \setminus bl(F)$ pontosan akkor, hogyha valamelyik β_i báziselem nem tűnik el rajta. Az egyik irány világos, a másikban pedig használjuk, hogy bázist alkotnak a β_i-k, találunk egy olyan globális szelést, ami nem tűnik el p-ben, felírva a báziselemekkel kapjuk hogy valamelyik nem tűnik el rajta.
Tehát ha $bl(F) = \emptyset$, akkor létezik $\phi : M \to \mathbb{C}P^N$ holomorf. Bizonyítandó, hogy

1. ha létezik egy pozitív nyaláb, akkor létezik olyan $k_0 \in \mathbb{N}$ hogy minden nagyobb k-ra $bl(L^k)$ üres, hogy megkapjuk a leképezést,

2. utána kellene látni hogy ez a leképezés injektív,

3. és immerzió, vagyis $\phi_* : T_p^{1,0} M \to T_{\phi(p)}^{1,0} \mathbb{C}P^N$ monomorfizmus.

Az elsőt mondhatjuk úgy is, hogy minden $p \in M$-re az $s \mapsto s(p)$ leképezés szürjektív $H^0(M, L^k) \to L_p^k$. A másodikat is át lehet fogalmazni így, minden $p, q \in M$ párra $s \mapsto (s(p), s(q))$ szürjektivitásával ekvivalens.
Alapötlet, hogy szürjektivitásokat akarunk belátni, ezt pedig valami H^1 kohomológiacsoport méri, mint a múltkor is láttuk már. Megcsináljuk az egyest.
Adott $p \in M$-hez szeretnénk megadni egy k_0-t. Megint egy skyscrapert csinálunk, legyen $L^k = F$ Legyen $\mathcal{S}_p = \mathcal{O}(F)$-nek a p-ben eltűnő szelései.

$$0 \to \mathcal{S}_p \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}(F) \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}(F)/\mathcal{S}_p \to 0$$

A faktor pont egy p-beli skyscraper, aminek a rostja pont F_p, minden máshol nulla. β_* pedig pont a p-beli kiértékelés. Kapunk egy hosszú egzakt sorozatot:

$$H^0(S_p) \to H^0(O(F)) \xrightarrow{\beta_*} H^0(O(F)/S_p) \to H^1(S_p)$$

β_* epimorfizmus, ha $H^1(S_p) = 0$, erre hatjunk. Felfújjuk a sokaságot p-ben. $P : \tilde{M} \to M$, $P^{-1}(p) = \mathbb{C}P^{n-1} = C$-t kidobva kapunk egy biholomorfizmust $P : \tilde{M} \setminus C \to M \setminus \{p\}$. Most S_p helyett $P^* S_p$-t nézzük. Ha s egy holomorf szelés, akkor azt is visszahúzhatjuk $H^0(F) \xrightarrow{P^*} H^0(P^* F)$ injektív, sőt izomorfizmus:

*figyelem a közbenső lépés csak lokálisan értelmes, de a projektív téren összeragadnak, hiszen mindegyik szelés ugyanazzal a konstanssal van szorozva fibrumonként

Proof. 1-dienzióban a felfújás nem csinál semmit és készen vagyunk. Ha $\tilde{s} \in H^0(\tilde{F})$, szorítsuk meg a kivételes divizor komplementerére, ez egy holomorf szelést ad $H^0(M \setminus \{p\}, F)$-ben, na de a nyaláb triviális p egy környezetében, és Hartogs tétele miatt beterjed a szelés p-be is a dimenziófeltétel miatt. Ezt a beterjesztett szelést is visszahúzzuk, ez a kivételes divizor komplementumán megegyeznek, tehát mindenhol. □

Felhasználva ezt az izomorfizmust $H^0(M, O(F)) = H^0(\tilde{M}, O(\tilde{F}))$ és $F_p = H^0(C, O(\tilde{F}|_C))$ mert $\tilde{F}|_C$ triviális nyaláb hiszen egy darab fibrumból húzzuk vissza. Tehát mostmár arra hajtunk, hogy $s \mapsto s|_C$ szürjektív.

Megjegyzés 12.3. Ha $s(p) = 0$, akkor $p^* s|_C = 0$, azaz $P^* S_p$ olyan $O(\tilde{F})$ csirákból áll, amik eltűnnek C-n.

Felírjuk megint az egzakt sort

$$0 \to P^* S_p \to O(\tilde{F}) \to O(\tilde{F})/S_p \to 0$$

Hogy néz ki a faktor? A rost nulla a kivételes divizoron kívül, illetve $O(\tilde{F}|_C)$ ha rajta van, a faktorleképezés egyszerű behelyettesítés p-ben. Hosszú egzakt ismét:

$$H^0(O(\tilde{F})) \to H^0(O(\tilde{F})/S_p) \to H^1(P^* S_p)$$

A második tag az eddigiek szerint pont a vizsgálandó $H^0(C, O(\tilde{F}|_C))$.
Belátjuk hogy $H^1(P^* S_p) = 0$. Először is állítjuk, hogy $P^* S_p = O(\tilde{F} \otimes [C]^*)$, ahol $[C]^*$ a C hiperfelülethez tartozó vonalnyaláb duálisát jelöli. Másodszor Kodaira eltűnési tétel: N kompakt komplex, $E \to N$ holomorf vonalnyaláb, hogyha $E \otimes K_N^* > 0$, akkor következik hogy $H^q(N, O(E)) = 0 \forall q \geq 1$. Ehhez kell a Hodge elmélet. Kellene hogy $F \otimes [C]^* \otimes K_{\tilde{M}}^* > 0$ tehát, elég nagy k-ra $(F = L^k)$. A következő lépést meg is nézzük részletesen. Mivel $L > 0$, ezért létezik $m_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $m \geq m_0$-ra $\tilde{L}^m \otimes [C]^* > 0$. Utána kezelni kell, hogy hogy néz ki felfújton a kanonikus nyaláb. $K_{\tilde{M}} = P^* K_M \otimes [C]^{n-1}$, ha M dimenziója n. Dualizálva $K_{\tilde{M}}^* = \tilde{K}_M^* \otimes ([C]^*)^{n-1}$. Most fel tudjuk már írni a keresett nyalábot $\tilde{F} \otimes [C]^* \otimes \tilde{K}_M^* \otimes ([C]^*)^{n-1} = \tilde{F} \otimes ([C]^*)^n \otimes \tilde{K}_M^*$. Ez pozitív? $L > 0$, ennyit tudunk, ebből létezik m_0, hogy $L^m \otimes \ell > 0$ minden ℓ vonalnyalábra és $m > m_0$-ra, speciálisan az antikanonikusra is. Következik, hogy $\tilde{L}^m \otimes \tilde{K}_M^* \geq 0$, C-n kívül semmi nem történik, nullák bejöhetnek a C érintőirányaiban, hiszen az egy ponttá omlik össze. Továbbá a hármas pont miatt minden $j \in \mathbb{N}$-re, speciálisan $n = dim M$-re $(\tilde{L}^{m_0} \otimes [C]^*)^j > 0$, vagyis $\tilde{L}^{j m_0} \otimes ([C]^*)^j > 0$, a másik tag pedig nemnegatív, ezzel $\tilde{L}^m \otimes \tilde{K}_M^* \otimes \tilde{L}^{n m_0} \otimes ([C]^*)^n > 0$. Tehát $k_0 = l + n m_0$ megfelelő választás lesz, hiszen $\tilde{L} \geq 0$, és beálttuk az első részt a Kodaira vanishing miatt.