Komplex sokaságok
kompso1u0um17em

Előadó: Szőke Róbert

2022/23/1

$\mathbb{R}^{2n}$ megfelel $\mathbb{C}^n$-nek a standard módon $(x_1, y_1, ...) \mapsto (x_1 + iy_1, ...)$. $\partial_z := \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$, illetve $\partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2}\partial_x + i\partial_y)$. $n = 1$-re holomorf ekvivalens azzal, hogy valós deriválható és $\partial_{\bar{z}} f = 0$, ha ez igaz akkor $\partial_z f(p) = f'_{\mathbb{C}}(p)$.

1.1. Definíció. $D \subset C^n, F : D \to C^n$ $\mathbb{C}$ deriálható $p \in D$-ben, ha létezik L $\mathbb{C}^n$ lineáris függvény, hogy $F(z) = F(p) + L(z-p) + R_p(z)$, ahol $||R_p(z)|| = o(||z-p||)$.

1.2. Állítás. *$f : D \to C$ $\mathbb{C}$ deriválható $p \in D$-ben ekvivalens azzal, hogy f valós értelemben deriválható, és $\partial_{\bar{z}_j} f(p) = 0$ minden j-re, továbbá $Lh = \sum \partial_{z_j} f(p) h_j$.*

1.3. Állítás. *F komplex deriválható p-ben pontosan akkor, ha minden koordinátafüggvénye komplex deriválható, $L = (\partial_{\bar{z}_j} f_i)$. Ha $n = m$ $\det F'_{\mathbb{R}}(p) = |\det F'_{\mathbb{C}}(p)|^2$. A láncszabály is igaz marad.*

1.4. Tétel (Hartogs)**.** *Ha $n \geq 2$ és $f : D \to \mathbb{C}$ ami parciálisan holomorf*[1]*, akkor holomorf.*

1.5. Definíció. M egy komplex sokaság, ha létezik U_a fedés, melyre
1.$\phi_a : U_a \to \mathbb{C}$ injektív, a kép nyílt $\mathbb{C}^n$-ben, illetve a páronkénti metszetek képei is legyenek nyíltak.
2.$\phi_b \circ \phi_a^{-1}$ holomorf
3.A térképleképezések által indukált topológia T_2.

1.6. Tétel (Radó '25)**.** *Ha $n \geq 1$ és a fenti feltételek teljesülnek és M összefüggő, akkor $M \sim M_2$.*

Létezik ellenpélda az utolsó feltétel elhagyásával 1953 Calebi-Rasenlich, úgyhogy hozzávesszük 4. tulajdonságnak az M_2-séget is. Az 1-3. + öf. $\to$ M_2-ből következik, hogy:
a. M metrizálható
b. σ-kompakt
c. létezik megszámlálható fedése térképekkel
d. parakompakt

1.7. *Megjegyzés.* Ha M komplex sokaság, akkor páros dimenziós, irányítható, M, N komplex sokaság akkor a szorzatuk is. Értelmes továbbá $M \to \mathbb{C}$ holomorf függvényekről beszélni.

$O(M, N)$ jelöli az $M \to N$ holomorf függvények halmazát.

1.8. Tétel. *Ha M kompakt összefüggő sokaság és $f \in O(M)$ akkor $f \equiv c \in \mathbb{C}$.*

[1] Minden koordinátafüggvény holomorf

Bizonyítás. Lokális maximum elv több változóban is igaz, $|f|$ maximális lesz mondjuk p-ben, tehát ennek egy környezetében konstans, összefüggőség miatt készen vagyunk. □

1.9. *Példa.* $\mathbb{C}^n$, és nyílt részhalmazai, S^2.

1.10. Tétel (Hartogs). *$n > 1, D \subset C^n$ nyílt, $K \subset D$ kompakt, összefüggő komplementummal, $f \in O(D \setminus K)$ akkor f kiterjed K-ra*

$S^{2n} \subset C^n$ komplex???

1.11. Tétel (Borel, Serre). *$n \neq 1, 3$ akor nincsen komplex struktúra páros dimenziós gömbön, illetve S^6-ról nem tudjuk biztosan.*

1.12. Definíció. M,N komplex sokaságok biholomorfak, ha létezik $F : M \to N$ holomorf, injektív és F^{-1} létezik és holomorf.

1.13. *Példa.* T^{2n}, minden pont körül az $1/2$ sugarú nyílt multicilinder. S^2-n egy komplex struktúra van, T^2-n egy $\mathbb{C}$ paraméterű családnyi, általában A_p-n $3p - 3$ dimenziónyi komplex struktúra létezik.

1.14. Tétel (Uniformizációs tétel). *M 1-összefüggő, összefüggő 1 komplex dimenziós sokaság, akkor $M = \mathbb{C}, S^2, D^2$.*

1.15. *Példa.* Komplex projektív tér

CP^n $\mathbb{C}^{n+1}$ 1-dimenziós altereinek a halmaza, a térképeket a szokásos homogén koordinátákból kapjuk.

1.16. Állítás. $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} CP^n$ *holomorf leképezés.* $(z_1, ..., z_n) \mapsto [z_1 : ... : z_n]$.

1.17. Következmény. *$\pi|_{S^{2n+1}}$ folytonos, CP összefüggő és kompakt. $CP^1 \sim S^2$, nagyobb dimenziókra azonban nem a gömböket kapjuk! Nehéz nyitott kérdés, hogy $n > 1$-re létezik-e más komplex struktúra a projektív tereken.*

1.18. Tétel (Yau '82, Fields érem). *Ha egy kompakt komplex sokaság homeomorf CP^2-vel, akkor biholomorf vele.*

1.19. Tétel (Kodaira '54, Yau). *M^n kompakt Kähler sokaság diffeomorf CP^n-el, akkor biholomorf is vele.*

1.20. Tétel (Hartogs). *$D \subset C^n$, $f : D \to \mathbb{C}$ parciálisan holomorf, akkor holomorf.*

1.21. *Példa* (T.J. Barth). $f(z, w) = (z + w)^2/(z - w)$, illetve $\infty : z = w \neq 0$ és 0 ha $z = w = 0$ egy $\mathbb{C}^2 \to S^2$ függvény ami holomorf parciálisan, de nem folytonos!

1.22. Tétel (inverz fv tétel). *$D \subset \mathbb{C}^n$ nyílt, $a \in D, F \in O(D, \mathbb{C}^n), \det(F'(a)) \neq 0$ akkor F biholomorf az a egy környezetében. F lokálisan úgy viselkedik, mint $F'(a)$.*

Bizonyítás. Valós esetre redukáljuk. $D_z \xrightarrow{F} \Omega_w \xrightarrow{g} \mathbb{C}$, ezek a függvények valós értelemben deriálhatóak, tehát

$$\partial_{z_j}(g \circ F) = \sum_{j,k}(\partial_{w_k} g \circ F)(\partial_{z_j} F_k) + \sum_{j,k}(\partial_{\bar{w}_k} g \circ F)(\overline{\partial_{z_j} F_k})$$

A második tag a függvények holomorfsága miatt eltűnik, tehát az összetett függvény is holomorf, hiszen a konjugált szerinti deriváltjai eltűnik. A deriváltra vonatkozó feltétel miatt a valós értelemben vett derivált sem nulla, tehát létezik lokális, valós deriválható inverz függvény, jelölje Ψ. $\Psi \circ F = id$, tehát mindenképpen holomorf

$$0 = \partial_{\bar{z}}(\Psi \circ F) = \partial_{\bar{w}}\Psi(F) \circ \overline{F'}$$

$\square$

1.23. Tétel (Implicit függvény tétel). *$D \subset \mathbb{C}^{p+q}$ nyílt, $F \in O(D, \mathbb{C}^p), F(a,b) = 0, \partial_w F(a,b) \neq 0$, akkor $\{F = 0\}$ lokálisan egy holomorf függvény gráfja.*

Bizonyítás. $p = q = 1, a = b = 0$. $\Phi : (z,w) \mapsto (z, F(z)), \Phi'(0,0) = (1, 0; \partial_z F(0,0), \partial_w F(0,0))$ Φ lokális biholomorfizmus, legyen Ψ holomorf inverze.

$$(z,0) \xrightarrow{\Psi} (z', w) \xrightarrow{\Phi} (z', F(z', w)) = (z, 0)$$

$h(z) := w = \Psi_2(0, z)$ megfelelő lesz. $\square$

Adunk egy másik bizonyítást az implicit fv tételre.

Bizonyítás. $f(z, w = 0)$ az implicit egyenletünk. Az origóban mondjuk w szerint nem elfajuló, ergo $\partial_w f(0,0) \neq 0$, szeretnénk látni, hogy a zorigóban az $\{f = 0\}$ halmaz valami $\{(z, h(z))\}$-ként áll elő ahol h holomorf függvény. Megszorítva az $f(0,.)$ függvény nem azonosan nulla, hiszen a deriváltja nem elfajuló. Elég kis körlapot választva csak az origóban lesz 0 a fv (feltettük hogy ott az érték nulla, ez persze megtehető). $|w| < r$-en tehát az origó az egyetlen 0 hely. Ebből következően $f(z,\zeta) \neq 0$ ha $|\zeta = r, |z| \leq \epsilon$ kompaktság miatt. Ha z rögzített, akkor megszámolhatjuk a gyökök számát a logaritmikus derivált vonalintegráljával.

$$N(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \partial_w f(z,\zeta)/f(z,\zeta) d\zeta$$

Világos, hogy $N(0) = 1$, ez egy folytonos egészértékű függvény, tehát konstans az összefüggő tartományunkon, a paraméteres integrál folytonossági tételét használva. Ezzel kapunk egy függvényt, minden z-hez (a $|z| < \epsilon$-ban) a hozzárendelő gyököt vegyük $h(z)$-nek. Egy másik integrált tekinthetünk,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \zeta \partial_w f(z,\zeta)/f(z,\zeta) d\zeta$$

ez pont a nullhelyet adja meg, a reziduumtétel alkalmazásával, tehát ez pontosan h és látványosan holomorfan függ z-től. $\square$

2.1. Definíció. $f \in O(\mathbb{C}^n)$-nek $c \in \mathbb{C}$ reguláris értéke, ha $\forall z \in f^{-1}(c) : f'(z) \neq 0$.

2.2. Következmény (Affin hiperfelületek). *$f \in O(\mathbb{C}^n)$ és c egy reguláris értéke, akkor $X_c := f^{-1}(c)$ egy komplex sokaság, ezzel sok példát kapunk komplex sokaságokra.*

Bizonyítás. $n = 2$ esetet tekintsük, a többi hasonló, technikásabb. Az X_c minden pontjáról tudjuk, hogy valamelyik koordinátában a deriváltja nem nulla, tehát egy holomorf függvény gráfja, ezzel a $(z, h(z))$-t levetítve z-re kapunk térképeket rajta. A ragasztásokat kell leellenőrizni. Egy metszeten $(g(w), w)$ és $(z, h(z))$ is térkép a ragasztás az egyik irányban pontosan a g függvény, a másik irányban a másik. $\square$

2.3. *Példa.* $f(z) = a_1z_1 + ... + a_nz_n$, ahol $a_i \in \mathbb{C}$ konstansok, nem mind nullák. $f = 0$ egy lineáris altér, egy $\mathbb{C}^{n-1}$[1].

Másodfokú függvények, $f(z) = z_1^2 + ... + z_n^2 - 1$. $\partial_j f = 2z_j$, ennek a nullha persze reguláris érték, hiszen a nullvektor nem eleme és csak ott fajul el a derivált. Ezt hívjuk komplex kúpszeletnek.
$({}_{ij})$ 2×2-es mátrixok úgy, hogy a determinánsa 1, egy részhalmaz $\mathbb{C}^4$-ben, meggondolható hogy az 1 reguláris értéke a determinánsnak, és $SL(2,\mathbb{C})$ is komplex sokaság (sőt Lie-csoport).

2.1. projektív hipefelületek

2.4. Definíció. $P \in \mathbb{C}[z_0, ..., z_n]$ homogén d-fokú, hogyha $P(\lambda z) = \lambda^d P(z) \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

2.5. *Megjegyzés.* Ha P d fokú homogén, akkor $\partial_j P$ $d-1$ fokú homogén, hiszen a definiáló egyenlőséget lederiválva

$$\sum_k \partial_j P(\lambda z)\partial(\lambda z_k) = \lambda^d \partial_j(z)$$

.

2.6. Állítás (Euler)**.** *P homogén d fokú polinom, akkor* $\sum_j z_j \partial_j P(z) = dP(z)$

Az állítás minden esetre szintaktikailag igaz, mindkét oldal d fokú homogén.

Bizonyítás. $P(\lambda z) = \lambda^d P(z)$, rögzítjük z-t, és λ szerint deriválunk.

$$\sum \partial_j P(\lambda z) z_j = d\lambda^{d-1} P(z)$$

most $\lambda = 1$ helyettesítéssel készen vagyunk. □

P egy homogén d fokú polinom a nullhalmaza projektíven is jól definiált.

2.7. Definíció. $N(P) = \{l \in CP^n : P(l) = 0\}$ egy jóldefiniált részhalmaza a projektív térnek.

2.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy P homogén d fokú polinom olyan, hogy $P|_{\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}}$-nak a 0 reguláris értéke, akkor $N(P)$ egy komplex sokaság.*

Bizonyítás. Vegyük a projektív tér $U_0, ..., U_n$ térképeit, a metszetek $N(P)$-vel holomorf atlaszt produkál a nullhalmazon. $U_0 = \{[z_0 : ... : z_n] : z_0 \neq 0\}$ azonosul $\mathbb{C}^n$-el a $[z_0 : ... : z_n] \mapsto (z_1/z_0, ..., z_n/z_0)$ ponttal. Az $U_0 \cap N(P)$ halmazon $0 = P(z_0, .., z_n) = z_0^d P(1, z_1/z_0, ..., z_n/z_0)$ és mivel 0. koordináta nem nulla, a polinomnak kell eltűnnie, ergo a metszetet a $P(1, w) = 0$ egyenlet definiálja $\mathbb{C}^n$-ben (ahol $z_i/z_0 = w_i$ a lokális koordinátázásunk). Ellenőriznünk kell, hogy ennek a $g_0 = P(1, w_1, .., w_n)$ polinomnak a 0 reguláris értéke.
Tegyük fel, hogy $a \in \{g = 0\}$-ban $\partial_{w_j} g(a) = 0$ minden j-re. $g_0(w) = P(1, w)$ definíció szerint, tehát a parciális deriváltat felírhatjuk

$$\partial_{w_j} g_0(w) = \partial_{z_j} P(1, w),\ j = 1, ..., n$$

alakban. Alkalmazzuk az Euler-formulát

$$\partial_{z_j} P(z) z_j = dP(z)$$

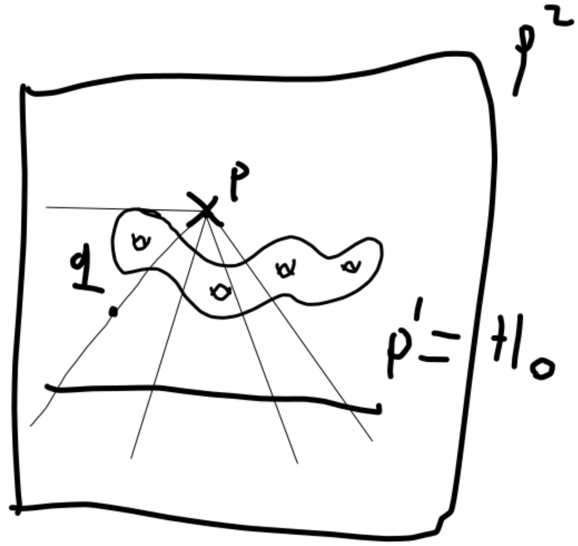
az $a = (1, w)$ pontban, ebből $dP(z) = 0$ hiszen a pont a nullhalmazban van, az indirekt feltevés szerint pedig a nulladiktól eltekintve eltűnik, tehát $0 = \partial_{z_0} P(1)\cdot 1$, vagyis az összes parciális derivált eltűnik, ellentmondásban a feltevésünkkel. □

[1] a tétel persze alkalmazható, hiszen $\partial_i f = a_i \neq 0$ valamelyik koordinátában

3.1. *Példa.* Lineáris polinom: $P(z) = \sum_0^n a_i z_i, 0 \neq a \in \mathbb{C}^n$ konstans vektor. A parciális deriváltak pont az a_i-k, tehát teljesül a regularitási feltétel, a nullhalmaz egy komplex sokaság $\mathbb{C}P^n$-ben, nevesül egy CP^{n-1}. Speciálisan $a = [1 : 0 : ... : 0]$-val a $H = \{z_0 = 0\} \subset \mathbb{C}P^n$ halmaz komplementere pont az U_0 térkép, tehát $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}P^{n-1} \sqcup \mathbb{C}^n = ...$, leérve $\mathbb{C}P^1 = \{\infty\} \sqcup \mathbb{C}$.
Az affin esethez hasonlóan vehetjük P-t kvadratikusnak. $P(z) = z_0^2 + ... + z_n^2$, az origón kívül a nulla reguláris érték, $\partial_{z_j} P = 2z_j$, és kapunk egy újabb komplex sokaságot, komplex projektív kúpszelet.
További példa $z_0^d + ... + z_n^d$-ből kapunk újabb komplex sokaságokat, a parciális deriváltak persze dz_j^{d-1}. Ezt specializálva $n = 2$-re $\{z_0^d + z_1^d + z_2^d = 0\} \subset \mathbb{C}P^2$ egy komplex 1-dimenziós objektum[1], Fermat-görbének hívjuk.

3.2. Tétel (Fields érem G. Faltings '83). *Ha $d \geq 3$, akkor legfeljebb véges sok racionális megoldás van.*

Ez egy irányítható valós felület, mi a neme? Ha $p \neq q \in P^2$ akkor létezik egyértelműen egyenes rajtuk keresztül, és két (különböző) egyenes pontosan egy pontban metszi egymást. Tudunk csinálni egy vetítést valamely p pontból egy rajta nem átmenő egyenesre, $\pi : P^2 \setminus \{p\} \to P^1$, és ez egy holomorf leképezés is lesz.



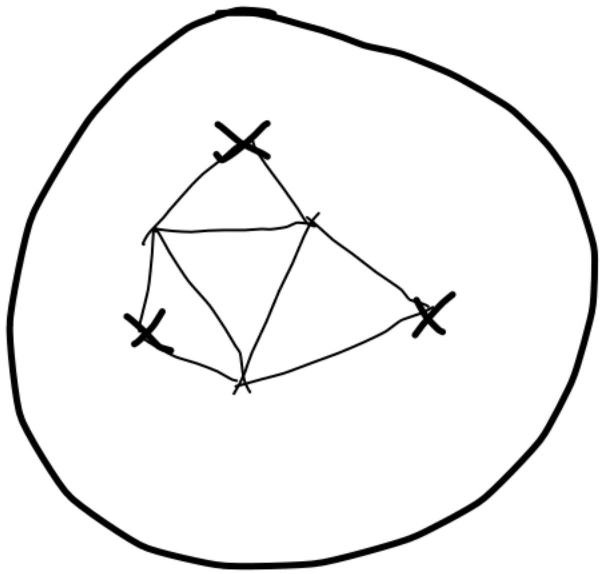
1. ábra.

Ezt megszorítjuk majd a C_d Fermat görbére. H_0-at vegyük $\{[0 : z_1 : z_2]\}$-nek, s $p = [1 : 0 : 0]$. A vetítés ebben az esetben annyit csinál, hogy elfelejti az első koordinátát (illetve kinullázza).

$$\pi : [z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [0 : z_1 : z_2] \leftrightarrow [z_1 : z_2]$$

Világos, hogy $p \notin C_d$ a definiáló egyenlet miatt. Nézzük meg, hogy $\pi|_{C_d}$-nél egy pontnak hány őse van. Például a $[0 : 1]$ pontnak $z_0^d + z_2^d = 0$ egyenlet írja le az ősét, látjuk hogy $z_0, z_2 \neq 0$ például, ergo $(z_2/z_0)^d = -1$ tehát d darab ős van. Ha az első koordináta nem nulla, akkor $[z_1 : z_2] \sim [1, z_1/z_2] = [1 : \zeta]$. Most az őst a $z_0^d + 1 + \zeta^d = 0$ egyenlet írja le, vagyis $z_0^d = -(1 + \zeta^d)$. Ha $1 + \zeta^d = 0$ akkor z_0 egyértelmű, tehát csak egy darab ős van. Ez pontosan akkor történik meg, ha $\zeta^d = -1$, tehát megintcsak d darab ilyen pont van, ellenkező esetben pedig megin csak d darab ős van, nem nulla komplex számnak d darab d. gyöke van.

[1] ezeket Riemann-felületeknek hívjuk



2. ábra. A jó trianguláció az elágazási pontokkal

Mostmár készen állunk az Euler-karakterisztika kiszámolására. $\chi(S^2) = 2$, vegyünk egy triangulációt a gömbön, amiben a speciális pontok ahol 1 db ős van csúcsok, és ne legyen olyan él, ami két speciális pontot összeköt. Megpróbáljuk fölemelni a triangulációt a megszorított vetítésen. A csúcsok felemelkednek az ősképek szerint. Egy élen legfeljebb egy speciális pont van, ha több ős van, akkor minden ősbe felemeljük, ezzel minden lap is felemelődik, kiszámoljuk melyikből mennyi van.

$$\chi(S^2) = c - e + l = 2$$

$(c-d)d + d = c'$ darab csúcs lesz fent, a kivételes pontoknak csak 1 őse van. Az élek, és a lapok száma is d-szeres lesz, tehát

$$\chi(C_d) = d(c-d) + d - de + dl = d(c - e + l) + d^2 + d = 3d - d^2$$

az Euler karakterisztika, ebből $g = \frac{2-\chi}{2} = \binom{d-1}{2}$.

d	1	2	3	4	5
g	0	0	1	3	6
	P^1	P^1	T^2	A_3	

3.3. Tétel (fokszám-génusz formula)**.** *Ha P homogén d-fokú 3-változós polinom aminek a nulla az origón kívül reguláris értéke, akkor $N(P)$ neme $\binom{d-1}{2}$*

3.4. *Megjegyzés.* Minden kompakt Riemann felület realizálható (beágyazható) $\mathbb{C}P^3$-ba, a fenti tétel szerint például a 2-nemű Riemann felületek nem ágyazhatók be $\mathbb{C}P^2$-be![2]

3.5. Definíció. $a \in U \subset \mathbb{C}^n$ nyílt, $H : U \to H(U) \subset \mathbb{C}^n$ biholomorfizmus, akkor $H(z_1, ..., z_n) = (w_1, ..., w_n)$-t koordinátacserének nevezzük, elképzelhető hogy egy $h : U \to \mathbb{C}$ holomorf függvénynek egyszerűbb alakja lesz az új koordinátákban ($h \circ H^{-1}$).

[2] ez jóval többet mond, mint az előbbi okoskodás, vagy az általánosabb fokszám-génusz formula

3.6. *Példa.* Ha $h'(a) \neq 0$, akkor alkalmas holomorf koordinátákban egy vetítés. Legyen $n = 2$, és $h'(a) \neq 0$. $\Phi : (z_1, z_2) \mapsto (z_1, h(z_1, z_2))$ egy lokális biholomorfizmus a egy környezetében az inverz függvény tételéből következően. Jelölje a lokális inverzét Ψ, hogy néz ki $h \circ \Psi(w)$?

$$(\Psi_1(w), \Psi_2(w)) \xrightarrow{\Phi} (\Psi_1(w), h \circ \Psi(w)) = (w_1, w_2)$$

Ez azt jelenti, hogy $h \circ \Psi(w) = w_2$, valóban egy vetítés.

3.7. Definíció. $M \subset \mathbb{C}^n$ egy komplex részsokaság, ha lokálisan $\forall a \in M$-hez $\exists U$ környezet, és $H(z)$ lokális holomorf koordináták rajta, és egy $0 \leq k_a \leq n$ szám, hogy $M \cap U = \{z \in U | H_j(z) = 0, j > k_a\}$.

Ha $k = 0$, akkor izolált pontokból áll M, ha pedig $k = n$, akkor a feltétel üres, csak annyit követelünk meg, hogy $M \cap U = U$. A k_a számot hívjuk a lokális dimenziónak, könnyen láthatóan egy lokálisan konstans érték, továbbá független a H választásától. $\dim M := \max_M \{k_a\}$-nek mondjuk, ha nagyon muszáj valamit mondani. Világos, hogy $H_1, ..., H_k$ lokális koordinátát ad meg M-nek.

3.8. Állítás. *Ha $M \subset \mathbb{C}^n$ komplex részsokaság és k_a állandó, akkor M egy komplex sokaság.*

Bizonyítás. Lokálisan holomorf módon leképezzük $\mathbb{C}^n$ egy koordinátaalterébe, megszorítva látványosan holomorfan kapcsolt térképet kapunk. □

Teljesen hasonlóan definiálható lokálisan, hogy mit jelent $M \subset N$ komplex részsokaságnak lenni.

3.9. Állítás. *$a \in D \subset \mathbb{C}^n$ egy nyílt, $F : D \to \mathbb{C}^n$ holomorf leképezés, legyen $M = F^{-1}(F(a))$. Megköveteljük, hogy $F'(q)$ maximális rangú az ős minden pontjában, akkor M egy komplex részsokaság.*

Bizonyítás. Ugyanúgy mint skalár esetben. Inverz fv tétel. □

3.10. *Példa.* $\mathbb{C}^2$-ben $M = \{(z_1, z_2) : z_2^2 = z_1\}$, vagyis $f = z_2^2 - z_1$ nullhalmaza, a nulla reguláris érték, kapunk egy újabb komplex sokaságot. Ha vetítünk az első koordinátára, minden pont fölött egy vagy két pontot látunk, z_1 négyzetgyökeit. Ez a $\sqrt{z}$ függvény Riemann felülete.

3.2. Komplex sokaságok 2 extrém fajtája

Egyik a kompakt, másik a Stein. Kompakt esetben nincs holomorf függvény egyáltalán, Steinen pedig sok.

3.11. Definíció. X komplex sokaság Stein, ha

1. $O(X)$ szétválasztja X pontjait[3]
2. $O(X)$ minden pontban lokális holomorf koordinátákat ad[4]
3. X holomorfan konvex[5]

3.12. Tétel (Remmert, Bishop, Narasimhon)**.** *X Stein akkor és csak akkor, ha X beágyazható valamely $\mathbb{C}^N$-be zárt komplex részsokaságként.*

3.13. Tétel (Behmke-Stein)**.** *X egy dimenziós, nem kompakt, akkor Stein.*

[3] $p \neq q \in X \exists f \in O(X) : f(p) \neq f(q)$

[4] $\forall p \in X \exists f_1, ..., f_n \in O(X) : (f_1, ..., f_n)$ lokális holomorf koordináta p-ben

[5] ha $K \subset X$ kompakt, akkor a $\hat{K} := \{p \in X | \forall f \in O(X) | f(p) \leq ||f||_K\}$ halmaz is kompakt

4.1. Definíció. G komplex Lie-csoport hogyha

1. G komplex sokaság
2. G csoport
3. A $G \times G \to G : (a, b) \mapsto ab$, $G \to G : a \mapsto a^{-1}$ leképezések holomorfak.

4.2. *Példa.* Jól ismert komplex Lie-csoportok

1. $(\mathbb{C}^n, +)$
2. $(\mathbb{C}^*, .)$, és az exponenciális leképezés holomorf homomorfizmus
3. $(\mathbb{C}^*)^n$ a komplex affin tórusz
4. $GL(n, \mathbb{C})$ a mátrixszorzásra, ez egy nyílt részhalmaza $\mathbb{C}^{n^2}$-nek, ettől lesz komplex
5. $SL(n, \mathbb{C})$ egy részcsoport, és önmagában is egy komplex Lie-csoport, a determináns egy reguláris értékének[1] őse
6. $O(n, \mathbb{C}) = \{AA^T = id\}$ és $SO(n, \mathbb{C})$ az 1 determinánsúak

Ezek mind Stein sokaságok is, nem kompaktak, hiszen azok csak kommutatívak lehetnek.

Volt már, hogy mit jelent komplex részsokaságnak lenni $\mathbb{C}^n$-ben, illetve egy M komplex sokaságban, de ennél még általánosabbak is lehetünk.

4.3. Definíció. X^n komplex sokaság, $A \subset X$ egy (komplex) analitikus részhalmaz[2], hogyha $\forall p \in X$ $\exists U_p$ nyílt környezet és véges sok holomorf függvény $f_1, ..., f_k \in O(U_p)$, amire $A \cap U_p = \{z \in U : f_j(z) = 0, j = 1...k\}$.

Fontos speciális eset a hiperfelület:

4.4. Definíció. A hiperfelület, hogyha a fenti definícióban $k = 1$ választható minden p-re (és $f_1 \not\equiv 0$, és nem is üres a nullhalmaza).

4.5. *Megjegyzés.*

1. Ha $A_1, .., A_m$ analitikus, akkor a metszetük is.
2. $A \subset X$ automatikusan zárt

Alternatív definíció

4.6. Definíció. $A \subset X$ analitikus halmaz, hogyha

1. A zárt
2. minden $p \in A$-ra teljesül a holomorf függvényekkel való kivágási feltétel

4.7. *Példa.*

1. $A = \{(z_1, z_2) : z_1 z_2 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$, ez a koordinátatengelyek uniója. Az origó különleges pont, ott nem sokaság, hogyan tudnánk ezt precízebben belátni? $U \cap A \setminus \{0\}$ nem összefüggő!

[1] konkrétan az 1-nek

[2] semmi köze a valós analízisben használt analitikus halmaz fogalmához

2. $A = \{z_3 = 0\} \cup \{z_1 = 0, z_2 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$, egyenlettel $z_1 z_3 = 0, z_2 z_3 = 0$ vágja ki. Megintcsak az origóban nem sokaság ez a halmaz, mindenhol máshol igen, de a dimenziója sem értelmes már, egy 1 és egy 2 dimenziós komponense van.

3. $A = \{(z_1, z_2) : z_1^2 = z_2^3\} \subset \mathbb{C}^2$, a cusp. Az origótól különböző pontokban reguláris a definiáló egyenlet, ott sokaság, ott azonban nem lehet megadni komplex sokaság struktúrát[3]!

4.8. Definíció. Ha $A \subset X^n$ analitikus részhalmaz, akkor $p \in A$ egy sima(/reguláris) pont, hogyha p egy U környezetében $A \cap U$ egy komplex részsokaság.
Ellenkező esetben p-t szinguláris pontnak nevezzük.

4.9. *Megjegyzés.* A sima pontokat $\subset A$ egy nyílt halmaz, a szingulárisoké pedig emiatt zárt.

4.10. Tétel. *Ha $A \subset X$ egy analitikus részhalmaz, akkor a sima pontok halmaza egy sűrű nyílt része az A-nak, a szinguláris pontok halmaza pedig sehol sem sűrű zárt.*

4.11. Tétel. *$A \subset X$ analitikus halmaz, akkor A^s a szinguláris pontjainak halmaza szintén egy analitikus halmaz X-ben.*

Ezzel egy ilyen hierarchiát kapunk, a szinguláris pontokban megnézhetjük hogy mely pontok simák, melyek szingulárisak, és így tovább, kapván egy sztratifikációját A-nak.
Legyen most $X = \mathbb{C}^n$, adott $p_1, .., p_k \in \mathbb{C}[z_1, .., z_n]$ polinomok. Vehetjük $A = \cap V(p_j)$-t, ezeket affin algebrai halmazoknak nevezzük. $f \in O(\mathbb{C}^n)$, legyen A ennek a grafikonja, szintén egy analitikus halmaz, sőt részsokaság $\mathbb{C}^{n+1}$-ben[4].

4.12. Tétel (Serre)**.** *$f \in O(\mathbb{C}^n)$ és a gráfja egy affin algebrai halmaz, akkor f polinom.*

4.3. Analitikus halmazon P^n-ben

Legyen p_j homogén polinom $z_0, .., z_n$-ben, és vegyük a közös nullhelyüket, $\cap_1^N V(p_j) \subset P^n$.

4.13. Állítás. *A egy analitikus részhalmaz.*

Bizonyítás. Teljesen analóg, mint amikor beláttuk, hogy nemelfajuló homogén polinomok részsokaságot adnak meg. Vegyük az U_j térképeket P^n-ben, az állítás bizonyításához elegendő egy polinom nullhelyeire belátni, hogy analitikus részhalmaz. $p_1(z_0, .., z_n) = 0$ megegyezik $z_j^d p_1(z_0/z_j, .., z_n/z_j)$, ahol kihagytuk az 1-et a j. helyről, tehát a metszet affin algebrai U_j-ben. $\square$

4.14. Tétel (Chow)**.** *Ha $A \subset P^n$ analitikus, akkor létezik $p_1, .., p_k$ homogén polinom, hogy $A = V(p_1, .., p_k)$.*

Analitikus halmazok 1 dimenzióban nem túl érdekesek, diszkrét ponthalmaz. Ebből kifolyólag $A \subset D \subset \mathbb{C}$-nél $D \setminus A$ összefüggő.

5.1. Tétel. *X összefüggő komplex sokaság, $A \subset X$ analitikus részhalmaz, akkor vagy $A = X$, vagy A seholsem sűrű, és a komplementere összefüggő.*

[3] itt már pusztán az origó kitörlése nem elég ennek belátására

[4] házi feladat, hogy az expoenciális függvény gráfja nem affin algebrai

Bizonyítás. Ha $A = X$, akkor készen vagyunk, tegyük tehát fel, hogy valódi részhalmaz. Belátjuk először is, hogy seholsem sűrű indirekt módon. Ekkor valami kis nyíltban sűrű, mivel analitikus halmaz zárt, ezért lesz belső pontja $int\ A \neq \emptyset$. Összefüggőség miatt $int\ A \neq X$, $\exists p \in \partial A$. Ennek a pontnak egy U összefüggő környezetében léteznek $f_1, .., f_k \in O(U)$ holomorf függvények, amik lokálisan kivágják $V(f_1, .., f_k) = A \cap U$. Mivel p határpont, létezik $q \in int\ A \cap U$, és $\exists V \subset U \cap int\ A$ nyílt környezete q-nak. Tehát $f_j|_V \equiv 0$ minden j-re konstrukció szerint. A több változós unicitás tétel szerint tehát $f_j \equiv 0$ az egész U-n, ez ellentmond annak, hogy $p \in \partial A$.

Kell még, hogy $X \setminus A$ összefüggő. Először belátjuk $G = X = B^n \subset \mathbb{C}^n$-re. Vegyünk egy komplex egyenest L-t általános helyzetben, $L \cap G$ vagy üres, vagy pedig egy nyílt halmaz az egyenesben. Lehetséges, hogy a metszet csak A pontjaiból áll, vagy pedig $L \cap G \cap A$ egy analitikus halmaz $L \cap G$-ben. Ekkor ha $p, q \in (L \cap G) \setminus A$, akkor összeköthetőek a metszeten belül egy görbével a fenti megjegyzés szerint. Vegyünk most két pontot $p, q \in G \setminus A$. Rajtuk keresztül vehetünk egy egyenest, ezt a metszetet nem csak az A pontjai adják, tehát a két pontot össze lehet kötni görbével.

Általános esetben tudjuk, hogy X összefüggő. Vegyünk $p, q \in X \setminus A$, vegyünk egy folytonos görbét közöttük X-ben $\alpha : I \to X$. A görbe képe valami kompakt halmaz, minden pontja körül választunk egy golyóval biholomorf környezetet $U_1, .., U_N$ véges sok is lefedi már kompaktság miatt. Továbbá még lejjebb szűkítve feltehetjük azt is, hogy U_j-ben létezik $f_1^j, .., f_m^j \in O(U_j)$, ami kivágja $A \cap U_j$-t. Sorbarakjuk ezeket a halmazokat, legyen $\alpha(0) \in U_1$, $\alpha(1) \in U_N$, és $U_{s-1} \cap U_s \neq \emptyset$. Ezzel a konstrukcióval készen vagyunk, mivel A sehol sem sűrű, speciálisan találunk A-n kívüli pontot $U_{s-1} \cap U_s$-ben, és így a lokális összefüggőség miatt tudunk csinálni egy görbét ami a komplementumban köti össze a két eredeti pontunkat. □

5.2. Tétel. *X komplex sokaság, $\pi : Y \to X$ fedés, ekkor Y-on létezik egyértelműen komplex sokaság struktúra, melyre π holomorf.*

Bizonyítás. $x \in X$ körül léteznek lokális koordináták $\mathbb{C}^n$-be, ezt esetleg szűkítve kapunk diszjunkt nyíltakat Y-ban, a visszahúzás mindegyiken értelmez komplex koordinátákat. □

Most a másik irányban is szeretnénk valami hasonlót. Jelölje $Aut\ X = \{\phi : X \to X : \phi \text{biholomorfizmus}\}$ X automorfizmuscsoportját. X komplex sokaság, $\Gamma \leq Aut\ X$, $p \in X$-re Γ_p jelölje az orbitját, az orbitok halmazát jelölje X/Γ[1].

5.3. *Példa.* Ilyen konstrukció például a projektív tér $X = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, $\Gamma = \mathbb{C}^*$.

Ha vannak fix pontok, abból gondjaink lehetnek.

5.4. *Példa.* $X = \mathbb{C}$ és $\Gamma = \{\pm I\}$, akkor $\mathbb{C}/Z_2 = \mathbb{C}$. Explicit biholomorfizmus $z \mapsto z^2$. Egyel magasabb dimenzióban azonban már baj lesz ebből. $X = \mathbb{C}^2$, $\Gamma = \{\pm I\}$-nél a faktor már nem sokaság az origó környezetében. Az origó környezeteinek a peremei RP^3-at adnak, sokaságnál ilyen nem lehet (?)

Lehet még az is, hogy a faktor nem is Hausdorff. Hasson $\mathbb{C}^*$ a $\mathbb{C}$-n. Két orbit lesz, az origó és mindenki más, tehát a faktor két elemű. $\mathbb{C}/\mathbb{C}^* = \{[0], [1]\}$ és a faktortopológia miatt $\{[0]\}$ zárt, $\{[1]\}$ pedig nyílt.

5.5. Definíció. Legyen $\Gamma \leq Homeo(X)$. Azt mondjuk, hogy Γ teljesen szakadásosan hat X-en, ha $\forall x, y \in X : x \neq y$ léteznek U_x, U_y nyílt környezetek, hogy a $\{g \in \Gamma : gU_x \cap U_y \neq\}$ halmaz üres, vagy véges.

5.6. Definíció. Γ szabadon/fixpont mentesen hat X-en, hogyha $g \in \Gamma, x \in X : gx = x$-ből $g = 1$ következik.

[1] ez ekvivalens azzal, hogy X-et faktorizáljuk az ekvivalenciarelációval, hogy $p \sim q$, ha $\exists \gamma \in \Gamma : \gamma p = q$

5.7. Tétel. *X komplex sokaság, $\Gamma \leq Aut\ X$ teljesen szakadásosan és szabadon hat X-en, akkor X/Γ-n egyértelműen létezik komplex sokasás struktúra, melyre a faktorleképezés egy holomorf fedés.*

A bizonyítás jórészt tiszta topológia, a végén kell kicsit szöszölni a komplex struktúra megadásával. A következő segédállítással kezdünk.

5.8. Tétel. *X egy T_2 tér, $\Gamma \leq Homeo\ X$ teljesen szakadásos szabad csoporthatás és $x_0, y_0 \in X$*[2]

1. *Ha $y_0 = gx_0$, ahol $g_0 \in \Gamma$, akkor léteznek U_{x_0}, V_{y_0} nyílt környezetek, hogy $gU_{x_0} \cap V_{y_0} = \emptyset$ ha $g \neq g_0$.*
2. *ha $y \notin \Gamma x_0$, akkor megint léteznek U_{x_0}, V_{y_0} környezetek, hogy $gU_{x_0} \cap V_{y_0} = \emptyset$ minden $g \in \Gamma$-ra.*

Bizonyítás. x_0, y_0 adott, $U_0(x_0), V_0(y_0)$ környezetek a teljesen szakadásos csoporthatás definíciója szerint. Jelölje H a definícióban üresnek vagy végesnek megkövetelt halmazt, ha üres nyertünk. Ha $H = \{g_0\}$, akkor az első kritériumnak megfeleltünk. Ha több eleme van, felsoroljuk ezeket. Az egyeshez feltehetjük, hogy $H = g_0, g_1, .., g_N$, tekintsük $y_\lambda = g_\lambda x_0$-t, ezek mind különböznek y_0-tól a szabad hatás miatt! W_λ az y_λ egy környezete legyen, ami diszjunkt $V = V(y_0) \subset V_0(y_0)$-tól. Folytonosság miatt találunk $U(x_0) \subset U_0(x_0)$ nyílt környezetet, amire $g_\lambda U \subset W_\lambda$ teljesül. Tehát $g_\lambda U \cap V = \emptyset$ minden λ-ra, és ezt akartuk.
A második rész teljesen hasonlóan vihető végig. $\square$

5.7 bizonyítása. $\pi : X \to X/\Gamma$ nyílt leképezés a faktortopológia definíciója szerint. $U \subset X$ nyílt, $\pi^{-1}\pi U = \cup_\Gamma gU \subset X$ nyílt valóban.
X/Γ T_2-sége az előbbi tételből fog kovetkezni. $x_1, x_2 \in X$ és $\pi x_1 \neq \pi x_2$. Ekkor ők különböző orbitban vannak, és alkalmazhatjuk az előző tétel kettes pontját, léteznek $U = U(x_1), V = V(x_1)$ környezetek, hogy $gU \cap V = \emptyset$ minden g-re, tehát a projekciónál vett képek is diszjunktak és elválasztják a ponokat.
Továbbmenve π lokális homeomorfizmus. $x_0 \in X$, és $g_0 = 1, y_0 = x_0$-ra alkalmazzuk az egyes pontot. Kapunk U, V környezeteket, hogy $g \neq e$-re $gU \cap V = \emptyset$[3]. Ez azt jelenti, hogy $\pi|_{U\cap V}$ injektív, a környezet minden pontja különböző orbiton van. A projekció nyílt, és injektív ide megszorítva, tehát homeomorfizmus.
Mostmár látjuk azt is, hogy π egy fedés. Válasszunk $g_1 \neq g_2 \in \Gamma$ két csoportelemet. $\pi : U \to \pi(U)$ homeomorfizmus, hogy néz ki az őse? $g_1U \cap g_2U = g_1(U \cap g_1^{-1}g_2U)$, de a belső rész üres, tehát $\pi^{-1}\pi U = \sqcup_\Gamma gU$.
Legyen U mint eddig, sőt még leszűkítjuk úgy, hogy legyen rajta lokális holomorf koordináta is, nevezzük ezt $\phi : U \to \mathbb{C}^n$-nek. $f : \pi^{-1}\pi U \to \mathbb{C}^n$-et definiáljuk úgy, hogy $f(gx) = \phi(x)$[4], itt használjuk, hogy Γ biholomorfizmusokkal hat, és látjuk, hogy ez egy holomorf koordinátázás a teljes ősképen. Most definiálhatjuk a koordinátázást lent $\Phi(\pi x) = f(x)$-el. Meggondolandó, hogy ez egy holomorf térképezés a faktoron. $\square$

5.9. *Példa.* $X = \mathbb{C}, 0 \neq \omega \in \mathbb{C}$, hasson eltolással $z \mapsto z + \omega$, generál egy $\mathbb{Z}$-t. A faktor a $\mathbb{C}/\mathbb{Z} = \mathbb{C}^*$ henger, az exponenciális függvény megfelelő megszorítása ad biholomorfizmust.
Továbbra is $X = \mathbb{C}$, veszünk két vektort $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, amik $\mathbb{R}$ felett függetlenek. Legyen Γ az általuk generált rács, $\mathbb{Z}^2$ egy példánya, hasson eltolással $\mathbb{C}$-n. Világos hogy szabad, ellenőrizhető, hogy teljesen szakadásos. A faktor $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2 = T^2$ persze, az eltolásokkal összeragasztjuk a rács alap parallelogrammájának a szemközti oldalait. Továbbá ez csak egy topologikus leírás, a komplex struktúra függ a rácstól.
$X = \mathbb{C}^*$, most hasson $\mathbb{Z}$ $z \mapsto \frac{z}{2}$-ként, ez szintén egy teljesen szakadásos, szabad hatás. $\mathbb{C}^*/\mathbb{Z}$ is egy tórusz[5].

[2] nincs kizárva hogy egybeessenek
[3] a metszetet véve föltehető hogy a két környezet megegyezik
[4] vagyis $f_{gU} = \phi \circ g^{-1}$
[5] Házi feladat: hogyan lehet ezt a konstrukciót a rácsosból megkapni?

$\omega_1, ..., \omega_{2n} \in \mathbb{C}^n$ egy $\mathbb{R}$-bázis, tekintsük a generált rácsot $\Lambda = \mathbb{Z} < \omega_i >$, az ezáltali faktor persze egy $2n$-tórusz lesz, a bázisvektoroktól függően mindenféle komplex struktúrával. $n = 1$-re minden tórusz projektív algebrai, magasabb dimenzióban generikusan nem az[6]!
Hopf felület: $X = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbb{Z} =< \frac{1}{2}I >\leq GL(2)$, mi a faktor? $(z,w) \sim (\frac{z}{2}, \frac{w}{2})$. Az S^3 gömbfelület, és a fele akkora úgy, hogy a peremén a sugarak összeragadnak, amit kapunk az az $S^3 \times S^1$, ezen is van komplex struktúra, viszont nem beágyazható projektív térbe[7]!
Ez általánosodik tovább, ha A egy diagonális mátrix a_1, a_2 nem nulla elemekkel, amiknek az abszolút értéke < 1. Az A^k csoport is teljesen szakadásosan, szabadon hat $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$-n, a faktort általánosított Hopf felületnek hívják. Ezek mind diffeomorfak $S^3 \times S^1$-el persze.
Még általánosabban Hopf sokaságokat gyárthatunk, $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$-n is szépen hat $< \frac{1}{2}I >$. A faktor hasonló kézrázással $S^{2n-1} \times S^1$ diffeomorfizmus erejéig. Még még általánosabban az általános Hopf-sokaságoknál vehetünk egy diagonális mátrixot, az átlóelemek mind $|.| < 1$, és faktorizáljuk $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$-t. Ezek megint $S^{2n-1} \times S^1$.
Továbbá általában is két páratlan dimenziós gömb szorzatán komplex struktúra (Calebi-Eckmann sokaságok).
Ha van egy X komplex sokaságunk, akkor ugyanazon az alaphalmazon csinálhatunk egy másik komplex sokaságot $\overline{X}$ a következő módon: (U_α, ϕ_α) legyen térképek egy atlasza. Ekkor $\overline{X}$-en $(U_\alpha, \psi_\alpha = \overline{\phi_\alpha})$ lesz a térkép, vagyis minden koordinátát konjugáljuk. Ezek vlaóban komplex struktúrát adnak, hiszen $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(\zeta) = \overline{\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(\overline{\zeta})}$, ez pedig világos módon holomorf.

$f : X \to \mathbb{C}^n$ egy függvény megfeleltethető a gráfjának $X \times \mathbb{C}^n$-ben. Úgy általánosítjuk ezt, hogy megengedjük hogy a vektortér, ahol a függvény az értékeit felveszi változzon pontonként, vagyis legyen adott $\forall m \in M$ egy E_m r dimenziós komplex vektortér. $E := \sqcup E_m$, olyan $s : X \to E$ leképezéseket fogunk tekinteni, amire $s(m) \in E_m$[1].

6.1. Definíció. X komplex sokaság, E egy r rangú holomorf vektornyaláb, ha

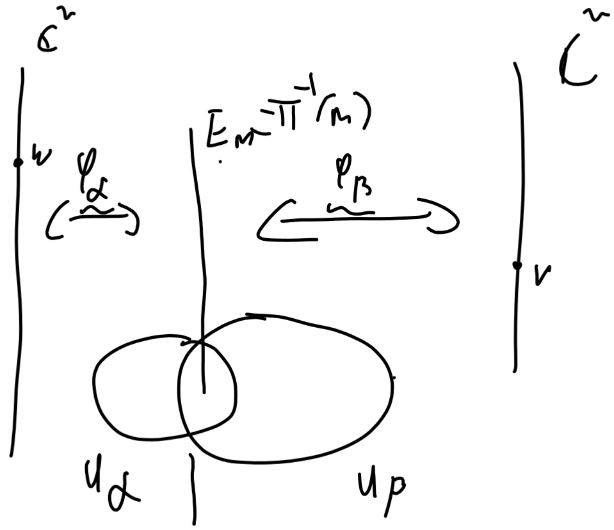
1. E komplex sokaság
2. adott egy $\pi : E \to X$ holomorf ráképezés, és $\pi^{-1}(m) = E_m$-en adott egy r dimenziós komplex vektortér struktúra.
3. létezik $\{U_\alpha\}$ nyílt fedése X-nek és $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) :\to U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ fibrumtartó, a fibrumokon[2] komplex lineáris biholomorfizmus.

Az új objektumok a szelések lesznek. Ha adott egy holomorf vektornyaláb $E \to X$, $H^0(X, E)$ fogja jelölni a szelések halmazát.
Ha E, X, ϕ, ϕ_α-ról csak simaságot követeljük meg, akkor a sima komplex vektornyalábok fogalmát kapjuk, ha nem komplex hanem valós vektortereket követelünk meg, akkor a valós vektornyalábokat kapjuk persze.

6.2. Definíció. Az $r = 1$ esetben azt mondjuk, hogy $E = L \to X$ holomorf vonalnyaláb.

$v \mapsto w = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(m \times v)$ egy vektortér izomorfizmus. A metszetre szorítkozva kapunk $\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n)$ holomorf leképezéseket. Miket tudnak ezek az áttérési leképezések?

[6] a következő példákhoz hasonlóan
[7] ezt persze nem látjuk jelenlegi ismeretekkel
[1] magyarul komplex vektornyalábok szelései
[2] egy pont őse



3. ábra. Az áttérések sematikus ábrája

1. $\phi_{\alpha\alpha} = id$
2. $\phi_{\alpha\beta}\phi_{\beta\alpha} = id$
3. $\phi_{\alpha\beta}\phi_{\beta\gamma}\phi_{\gamma\alpha} = id$

Ezeket hívjuk kociklusfeltételeknek. Az állítás visszafelé is igaz, ha adottak ilyen leképezések, össze lehet velük ragasztani egy holomorf vektornyalábot.

7.1. *Megjegyzés.* Időnként megtörténhet, hogy X és $\overline{X}$ nem biholomorfak!
$A = diag(a_1, a_2)$, ahol $0 < |a_i| < 1$, Γ_A a generált részcsoport, akkor $\mathbb{C}^2 \setminus o/\Gamma_A$ biholomorf azzal, hogyha $< diag(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) >$-vel faktorálnánk, $(z, w) \mapsto (\frac{z}{2a_1}, \frac{w}{2a_2})$ megfelelő lesz. Ugyanakkor $A_{\alpha,t} = \begin{matrix} \alpha & t \\ 0 & \alpha \end{matrix}$ választással (ahol megintcsak $0 < |\alpha| < 1$) a generált részcsoport szerinti faktorát $\mathbb{C}^2 \setminus o$-nak jelölje $X_{\alpha,t}$, akkor $t \neq 0$-ra $X_{\alpha,t} = X_{\alpha,1}$, de nem biholomorf $X_{\alpha,0}$-val!

7.2. Állítás. *M komplex sokaság, U nyílt fedés rajta és adottak $\phi_{\alpha\beta}$ leképezések $GL(r)$-be amik teljesítik a kociklusfeltételeket, akkor létezik egy $E \to M$ r-rangú komplex vonalnyaláb, aminek pontosan ezek a ragasztóleképezései.*

Bizonyítás vázlat. $E = (\sqcup U_\alpha \times \mathbb{C}^r)/\sim$, ahol $(b, w) \in U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ ekvivalens $(b', w') \in U_\beta \times \mathbb{C}^r$, hogyha $b = b'$, és $w = \phi_{\alpha\beta}(b)w'$ □

"Meta tétel", hogy a lineáris algebra kanonikus konstrukciói vektornyalábokra is működnek.

7.3. *Példa.*
1. direkt összeg $(\phi_{\alpha\beta} \oplus \psi_{\alpha\beta})$
2. tenzorszorzat $(\phi_{\alpha\beta} \otimes \psi_{\alpha\beta})$
3. $\Lambda^j E, S^j E$ (talán?)

4. duális nyaláb ($\phi_{\alpha\beta}^{-1}$)

5. determinánsnyaláb ($\det\phi_{\alpha\beta}$), vagy r. külső szorzat nyaláb

6. $Y \subset M$ komplex részskoaság, $E \to M$ holomorf vektornyaláb, akkor $E|_Y \to Y$ is holomorf vektornyaláb.

7.4. Definíció. $E, F \to M$ holomorf vektornyalábok izomorfak, ha $\exists\phi : E \to F$ biholomorf fibrumtartó fibrumonkénti izomorfizmus.

7.5. Definíció. $E \to M$ holomorf vektornyaláb triviális, ha izomorf $M \times \mathbb{C}^r$-el.

7.6. Definíció. $E, F \to M$ holomorf vektornyalábok, $phi : E \to F$ holomorf vektornyalábok homomorfizmusa, hogyha holomorf, fibrumtartó, fibrumonkénti homomorfizmus, a rangja állandó (tehát a kép, és a mag rangja is az). Következik tehát az is, hogy $ker\phi, im\phi, F/im\phi$ is mind holomorf vektornyalábok, és végül

$$0 \to ker\phi \to E \xrightarrow{\phi} im\phi \to 0$$

egzakt.

7.7. Definíció. $F, E \to M$ holomorf vektornyaláb, $F < E$ résznyaláb, hogyha $\forall m \in M : F_m < E_M$ állandó dimenziós lineáris altér és F részsokaság.

7.8. Állítás. *$F < E$ ekvivalens azzal, hogy létezik U nyílt fedés, és ϕ_U trivializáló leképezések $\phi_U : E_U \to U \times \mathbb{C}^r$, hogy $\phi_U|_{F_U} : F_U \to U \times \mathbb{C}^l$, ahol $l = rkF$, és $\mathbb{C}^l = \{(z_1, .., z_l, 0, .., 0)\}$, $E_U = \pi^{-1}U$, $F_U = E_U \cap F$. A ragasztóleképezések egy ilyen trivializációnál blooókk felsőháromszög alakúak, az egyik átlós blokk F, a másik E/F ragasztóleképezéséből áll (plusz még valami piszok az off diagonal részben).*

7.9. Definíció. M^n komplex sokaság, U, Φ térképek egy atlasza. Ezekből legyártjuk a $(\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})'(\Phi_\beta(m)) =: \phi_{\alpha\beta}$ leképezéseket. Az ebből összeálló $T(M)$holomorf vonalnyalábot nevezzük az M holomorf érintőnyalábjának, a rangja persze pont M dimenziója. Alkalmazva a konstrukcióinkat T^*M a koérintőnyaláb, $detT^*M$ pedig a kanonikus vonalnyaláb.

7.10. Állítás. *X komplex sokaság $Y \subset X$ komplex részsokaság, akkor $TY < TX|_Y$.*

Bizonyítás. Világos a részsokaságok koordinátaszeletes definíciójából. □

7.11. Definíció. X komplex sokaság, $Y \subset$ részsokaság akkor $NY := TX/TY$ a normálnyalábja.

7.12. *Megjegyzés.* Komplex esetben nincsen csőszerű környezet, mint ahogy a simában szerettük.

7.13. Tétel (adjunkciós formula)**.** *X komplex sokaság, $Y \subset X$ komplex részsokaság, akkor $K_Y = K_X|_Y \otimes detNY$ kanonikusan.*

Bizonyítás. Megfelelő térképeket választva

$$\phi_{\alpha\beta} = \begin{matrix} \chi_{\alpha\beta} & g_{\alpha\beta} \\ & h_{\alpha\beta} \end{matrix}$$

alakú, ahol χ TY ragasztóleképezése, h pedig a normálnyalábé. Ebből látszik, hogy $\frac{1}{\det\chi} = \frac{1}{\det\phi}\det h$. □

7.14. Állítás. *X komplex sokaság, $Pic(X) := (\{L \to X : L$ holomorf vonalnyaláb$\}, \otimes)$.*

7.15. Definíció. X, Y komplex sokaságok, $E \to X$ holomorf vektornyaláb és $f : Y \to X$ holomorf leképezés, akkor $f^*E \to Y$ is egy holomorf vektornyaláb.

$f^{-1}U$ nyílt fedése Y-nak, $\phi_{\alpha\beta} \circ f$ ragasztóleképezésekkel.
Tekinthetjük ámsképpen is, $\pi : Y \times X \to X$ a vetítés az egyik faktorra, ekkor $f^*E = \pi^*E|_{grf(f)}$.

7.16. *Példa.* Möbius nyaláb...? RP^1-ből két pontot kiválasztunk $p_\infty \neq p_0$, akkor $\exists!$ vektortér struktúra $\mathbb{R}P^1 \setminus \{p_\infty\}$-n, aminek p_0 a nulleleme.
Választunk egy $q \in \mathbb{R}P^2$, és egy egyenest ($\mathbb{R}P^1$-et) rajta kívül. Ha választunk egy p pontot az egyenesen, akkor az $\mathbb{R}P^1 \setminus \{q\}$-n egyértelműen létezik valós vektortér struktúra, aminek a nullása éppen p. Ezzel kapunk egy $\mathbb{R}P^2 \setminus \{q\} \to \mathbb{R}P^1$ vetítést is, ami épp a Möbius-nyaláb lesz megintcsak. Az egyenest választhatjuk $\{[x_0 : x_1 : 0]\}$-nak, $q = [0 : 0 : 1]$-nek pedig a pontot, a vetítés $[x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_0 : x_1 : 0]$ lesz. Ezen konstrukciónak van egy komplex analogonja ezt fogjuk vizsgálni most.

8.1. *Példa.* Hasonlóan a valós esethez $p_\infty, p_0 \in P^1$ létezik pontosan egy $\mathbb{C}$ vektortér struktúra $P^1 \setminus \{p_\infty\}$-n, aminek a nullája p_0-ban van. Egyszer megadni, $p_\infty = [0 : 1], p_0 = [1 : 0]$, é(s a pont komplementumán $[z_0 : z_1] \mapsto \frac{z_1}{z_0}$, általános esetben pedig bármely két pontot elmozgathatunk ebbe a pozícióba projektív automorfizmussal[1].
Vegyük most a P^{n+1}-et, q egy pontja, és vegyünk benne a $\{[z_0 : ... : z_n : 0]\} = P^n$-et, és válasszuk $q = [0 : ... : 0 : 1]$ legyen. Teljesen hasonlóan az előbbihez $\forall p \in P^n \exists! L$ projektív egyenes, hogy $p, q \in L$. Ha kitöröljük q-t megintcsak egyértelműen lesz olyan komplex vektorté struktúra aminek az origója p, és a vetítés is ugyanúgy létezik. A vetítésnél egy pont őse éppen a hozzá tartozó L egyenes.

8.2. Állítás. *$\pi : P^{n+1} \setminus \{q\} \to P^n$ egy holomorf lokálisan triviális vonalnyaláb. A jelölése $\mathcal{O}_{P^n}(1)$.*

Bizonyítás. Válasszunk egy térképét a P^n-nek, $U_j = \{[z_0 : ... : z_n : 0] | z_j \neq 0\}$.[2] $\pi^{-1}(U_j)$-t akarjuk azonosítani $U_j \times \mathbb{C}$-vel. Az őskép világos módon $\{[z_0 : ... : z_{n+1} | z_j \neq 0]\}$, a trivializációt ezért a következő képpen adjuk meg:

$$\Phi_j : [z_0 : ... : z_n : z_{n+1}] \mapsto ([z_0 : ... : z_n], \frac{z_{n+1}}{z_j}).$$

Megadjuk az inverzét is, ezúttal adott $([z_0 : ... : z_n], c)$, és képezzük $[z_0 : ... : z_n : cz_j]$-be, ez pont megfelelő lesz. Hogy néznek ki a ragasztások? A kompozíciót végignézve a következő adódik:

$$\Phi_k \circ \Phi_j^{-1} : ([z_0 : ... z_n], c) \mapsto ([z_0 : ... : z_n], c\frac{z_j}{z_k}).$$

Eszerint $g_{kj}([z_0 : ... : z_n]) = \frac{z_j}{z_k}$. □

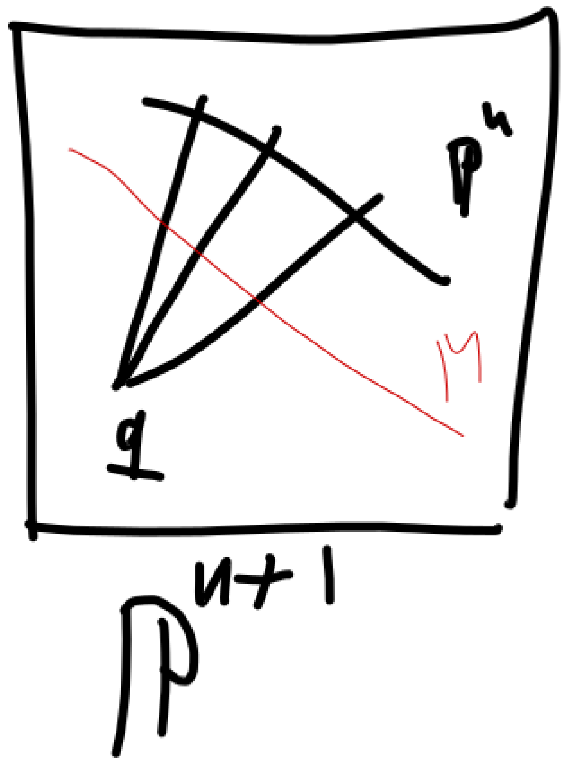
8.3. Definíció. $\mathcal{O}_{P^n}(k) := \mathcal{O}_{P^n}(1)^{\otimes k}$ ha $k \geq 1$, a triviális ha $k = 0$, végül $(\mathcal{O}_{P^n}(k)^*)^{\otimes k}$ ha $k \leq -1$.

Rögtön látjuk a ragasztófüggvényeket is, $g_{lj}([z]) = (\frac{z_j}{z_k})^k$.

8.4. Állítás. *M kompakt komplex sokaság, és $L \to M$ egy holomorf vonalnyaláb fölötte. Tegyük fel, hogy $\exists s \in H^0(M, L)$, ami nem azonosan nulla, de létezik nullhelye. Ekkor L nem a triviális nyaláb.*

Bizonyítás. Triviális, kompakt sokaságon csak konstans függvények vannak. □

8.5. Állítás. *$\mathcal{O}_{P^n}(1)$ holomorfan nem triviális.*



4. ábra. Egyszerű kis ábra a bizonyításhoz

Bizonyítás. $a = (a_0, ..., a_{n+1})$, és $a_{n+1} \neq 0, (a_0, .., a_n) \neq 0$. Vegyük az $M = \{[z_0 : ... : z_{n+1}] | \sum a_j z_j = 0\}$ halmazt, egy példánya P^n-nek. q választásán miatt nem eleme M-nek[3], és a (nyaláb konstrukciójához) kiválasztott P^n-el nem egyezik ugyanezen okok miatt. Emiatt M a nyaláb minden fibrumát pontosan egy pontban metszi egyszerű projektív geometriai okokból. Metszeni fogja a kiválasztott P^n-et is egy pontban mivel nem azonos vele, és így kapunk egy nem azonosan nulla holomorf szelést, minden ponthoz a fibrumának M-el vett metszéspontját rendelve. □

8.6. Állítás. *$L \to B$ holomorf vonalnyaláb holomorfan triviális akkor és csak akkor, ha $\exists s \in H^0(B, L) \forall p \in B : s(p) \neq 0$.*

Bizonyítás. Ha triviális a nyaláb nyilván van ilyen szelése.
Ha adott egy megfelelő s szelés, akkor a $B \times \mathbb{C} \to L$ leképezés, amit a $(p, \lambda) \mapsto \lambda s(p)$ definiál biholomorfizmus. □

8.7. Tétel. *$L \to B$ holomorf vonalnyaláb és B kompakt, összefüggő, L nem triviális, és $H^0(B, L) \neq \{0\}$, akkor $H^0(B, L^*) = \{0\}$.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy a duális nyalábnak is van holomorf szelése. Legyen $s \in H^0(B, L)$, $S \in H^0(B, L^*)$, tekinthetjük az $f(b) = S(s(b)) : B \to \mathbb{C}$ holomorf függvényt, ami kompaktság miatt konstans.

[1]Möbius transzformációk/lineáris törtfüggvények/$PGL(2, \mathbb{C})$ elemei
[2]beágyazva gondolunk rá
[3]ugyanúgy választunk mint eddig, $[0 : .. : 0 : 1] = q$, stb

Egyszer, mivel L holomorfan nemtriviális, létezik s-nek nullhelye b_0, emiatt nyilván $f(b_0) = 0$, és mivel konstans, ezért $f \equiv 0$. Másszor $s \neq 0$-t választottunk, létezik b_1, hogy $s(b_1) \neq 0$, tehát egy kis környezetében sem folytonosság miatt, tehát $S \equiv 0$ ezen a környezeten, hiszen a kompozíciónak nullának kell lennie. Mostmár összefüggőség miatt mivel eltűnik egy nyílt halmazon S, az unicitástétel miatt mindenhol eltűnik. $\square$

Az $H^0(P^n, \mathcal{O}_{P^n}(k))$ a következőképpen alakul:

- $\{0\}$, ha $k < 0$
- $\mathbb{C}$, ha $k = 0$
- k-homogén polinomok $z_0, .., z_n$ változókban

9.1. Tétel. *$L \to B$ holomorf vonalnyaláb, legyen $\mathcal{U}$ egy nyílt fedése B-bek trivializáló környezetekkel. $\Phi_j : \pi^{-1}(U_j) \to U \times \mathbb{C}$ a trivializáló leképezések. Ekkor $\forall s \in H^0(B, L) \exists f_U \in \mathcal{O}(U) \forall U \in \mathcal{U}$, melyekre teljesül, hogy a g_{UV} ragasztóleképezésekre $f_U = g_{UV} f_V$ teljesül az $U \cap V$ metszeten (és vice verza).*

Bizonyítás. $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$, és Φ_α a megfelelő trivializáló leképezés. Egy térképen természetesen vehetjük az $(m, 1) \in U_\alpha \times \mathbb{C}$ szelést, visszahúzhatjuk Φ_α^{-1}-el egy szeléssé az U_α fölött. Ha két különböző térképen is megcsináljuk ezt, látjuk hogy mindkét trivializáció szerint az $(m, 1)$ pont a kép, vagyis valóban $s_\beta(m) = \Phi_\alpha^{-1}(m, g_{\alpha\beta} 1) = g_{\alpha\beta}(m, 1) s_\alpha(m)$. Tegyük fel, hogy $s \in H^0(B, L)$. Ha megszorulunk egy trivializáló nyíltra, $s|_{U_\alpha} = f_\alpha s_\alpha$ alakban írható az eddig tekintett lokális szelésekre. Mi közük van egymáshoz ezeknek az f_α fveknek? $s|_{U_\beta} = f_\beta s_\beta$, a metszeten pedig a kettőnek persze egybe kell esnie, $s|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\beta s_\beta = f_\beta g_{\alpha\beta} s_\alpha = f_\alpha s_\alpha$, és valóban ugyanúgy transzformálódnak.
Fordítva, ha adott egy fedés, és f_α függvények a kompatibilitási feltétellel, akkor az valóban összeragad egy globális szeléssé. $\square$

9.2. Tétel. *$k > 0$-ra a $H^0(P^n, \mathcal{O}_{P^n}(k))$ megfelel a k-homogén polinomoknak.*

Bizonyítás. Vegyük a standrad térképezését P^n-nek U_j. $p(z_0, .., z_n)$ egy k-homogén polinom. A j. térképen $f_j([z]) := \frac{p(z_0, ..., z_n)}{z_j^k}$ jóldefiniált lesz U_j-n. Holomorfitás világos, polinomok hányadosa lokálisan.
Kompatibilitás a kérdéses. A metszeten $f_i([z]) = \frac{p(z_0, .., z_n)}{z_i^k} = (\frac{z_j}{z_i})^k \frac{p(z_0, .., z_n)}{z_j^k}$, pont a ragasztóleképezések jelennek meg, és ezt akartuk, az egyik irány meg is van.
Hogyan kapunk minden széléshez polinomot? $s : P^n \to \mathcal{O}_{P^n}(k)$ legyen egy holomorf szelés. Van nekünk a $\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \to P^n$ fibrálásunk. s-hez tartoznak az $f_j \in \mathcal{O}(U_j)$. Ezt felemeljük valahogy $\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}$-ra, méghozzá úgy, hogy $z \mapsto z_j^k f_j([z])$ ha $z \in U_j$, jól van-e ez definiálva?

$$f(z) = z_i^k f_i([z]) = z_i^k \frac{z_j^k}{z_i^k} f_j([z]) = z_j^k f_j([z]),$$

vagyis igen. Holomorf függvény az origón kívül. Ha $n+1 > 1$, akkor a Hartogs tétel miatt $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{n+1})$. Mivel holomorf, hatványsorba lehet fejteni, $f(z) = \sum a_\alpha z^\alpha$, ahol az összegzés multiindexekre történik. Összegyűjtjük a homogén tagokat, tehát azokat ahol $|\alpha|$ állandó, $\sum_0^\infty (\sum_{|\alpha|=j} a_\alpha z^\alpha)$, a belső összegben véges sok tag van, kapjuk a $p_j(z)$ j-homogén polinomokat.[1] A definíciója miatt a mi f holomorf függvényünk k-homogén, ezért

$$\sum \lambda^j p_j(z) = f(\lambda z) = \lambda^k f(z) = \sum \lambda^k p_j(z), \to 0 = \sum (\lambda^k - \lambda^j) p_j$$

[1] $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{n+1})$, akkor a homogén sorfejtése egyértelmű

Ha a polinom rész nem nulla, akkor az előtte levő együtthatónak kell annak lennie, de ez csak a $j = k$-as tagban teljesülhet minden λ-ra. $\square$

B komplex sokaság, Z egy 1 komplex kodimenziós zárt részsokaság.

9.3. Tétel. *Létezik $L \to B$ holomorf vonalnyaláb, és s_Z holomorf szelése, hogy $\{s_Z = 0\} = Z$.*

Bizonyítás. $U = \{U_\alpha\}$ nyílt fedés, méghozzá olyan, hogy vagy $U_\alpha \cap Z = \emptyset$, vagy $\exists f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha) : \{f_\alpha = 0\} = Z \cap U_\alpha, \nabla f|_{U_\alpha \cap Z} \neq 0$. Még tovább kicsinyítve a környezeteket föltehető az is, hogy a térképezésnél $Z \cap U_\alpha$ $\mathbb{C}^{k-1} \subset \mathbb{C}^k$-be képződik, az iménti f_α lehet a térképezés k. koordinátája. Ha nem metszi U_α Z-t, akkor $f_\alpha := 1$-et definiáljuk. Ha nem üres $U_\alpha \cap U_\beta \cap Z$, akkor definilhatjuk az $g_{\alpha\beta} := \frac{f_\alpha}{f_\beta}$ függvényt, ami Z-n kívül holomorf, nem nulla.

9.4. Állítás. $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$

Bizonyítás. $f_\alpha \circ \Phi_\alpha^{-1} = z_k$ feltevés szerint. Az $f_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}(z)$ leképezés egyenlő$\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}$ k. koordinátájával. A hatványsora ennek a függvénynek úgy néz ki, hogy $z_k h(z)$, ahol h holomorf, hiszen a $(z_1, .., z_{k-1}, 0)$ pontokban azonosan nulla, következik, hogy az egyik hányados értelmes, de ugyanígy a reciprokának is értelmesnek kell lennie, tehát sehol sem nulla függvényeket kaptunk. $\square$

Most megkonstruálhatjuk a nyalábunkat ezekkel a $g_{\alpha\beta}$ ragasztófüggvényekkel. A kociklus feltétel világos módon teljesül, és az f_α függvények definiálják a globális szelést, ami kinullázódik Z-n. $\square$

A most konstruált L-et szokás $L[Z]$-vel is jelölni. $k = 1$-re például hiperfelület az egy diszkrét ponthalmazt jelent, ezekhez tudunk asszociálni egy holomorf vonalnyalábot és egy szelést ami pont kivágja a ponthalmazunkat. Ha egy ponthoz választjuk, egyesével kivághatjuk a pontokat első rendű nullhelyekkel.
Vegyük észre, hogy $L[Z] \to B \setminus Z$ holomorfan triviális[2]. $H \subset P^n$ hipersík, és $(a_0, .., a_n) \neq 0$ vektor adja meg az egyenletét. Ekkor $L[H] = \mathcal{O}(1)$ teljesül! Az U_α térképen $\frac{a_0 z_0 + ... + a_n z_n}{z_\alpha}$ kivágja $U_\alpha \cap Z$-t, és eszerint $g_{ij} = \frac{f_i}{f_j} = \frac{z_j}{z_i}$.
Gyártottunk a múltkor hiperfelülethez vonalnyalábot, ezt lehet kicsit egyszerűbben is. Legyen B egy Riemann felület, itt a hiperfelület néhány pont, legegyszerűbb ha csak egy pontot veszünk. Lefedjük a felületet két nyílt halmazzal, egyik $U = B \setminus \{p\}$, a másik egy p körüli holomorf térképkörnyezet, ahol $\phi : p \mapsto 0$ a (V, ϕ) térképen. A metszet itt a $V \setminus \{p\}$ lesz persze. $f_U \equiv 1$-et választhatunk, V-n pedig maga a ϕ koordinátázás pont olyan, hogy egyszeres nullhelye van p-ben, ez megfelel f_V-nek. Ezért az áttérésünk $g_{UV} = \frac{f_U}{f_V} = \frac{1}{\phi}$ lesz, így adódik az L_p pontnyaláb, a természetes szelésével együtt ami pont a pontban tűnik el.
Általában is, ha $Z \subset B$ zárt komplex hiperfelület, konstruáltunk hozzá egy $L[Z]$ nyalábot, aminek van egy szelése aminek a nullhelye pontosan Z, és első rendben tűnik el rajta. Ez ugye azt jelenti, hogy lokálisan vehetjük egy $p \in Z$ körül a szelést megadó holomorf függvényt, és ennek a gradiense nem fog eltűnni. Lefedjük B-t nyíltakkal, ha egy nyílt nem metszi a Z-t, akkor rajta vehetjük a konstans 1 függvényt, ha belemetsz, akkor vehetünk $Z \cap U$-nek egy definiáló egyenletét (egy holomorf függvény ami elsőrendben tűnik el a metszeten). És akkor az áttéréseket megadhatjuk $\frac{f_\alpha}{f_\beta}$ alakban, mivel mindkettő első rendben tűnik el Z-n, ez a metszeten kiterjed Z-re is holomorfan.
A múltkori kérdésre visszatérve, ha p homogén k-fokú polinom úgy, hogy a nullhelye komplex részsoakságot definiál (ergo a gradiens nem nulla azokban a pontokban ahol $p = 0$), akkor $L[\{p = 0\}] = \mathcal{O}(k)$ lesz.

[2] van nem nulla szelése

Ugyanazon bizonyítás végigmegy, U_α-ban a $\frac{p(z)}{z_\alpha^k}$ egy értelmes leképezés, és látjuk hogy pont a megfelelő ragasztóleképezést kapjuk.

10.1. Tétel. *$E, F \to B$ két holomorf vonalnyaláb, s, t holomorf szelése az egyiknek, illetve a másiknak. Továbbá $Z = \{s = 0\} = \{t = 0\} \subset B$, illetve s, t első rendben tűnik el, akkor a két nyaláb izomorf.*

Bizonyítás. Teljesen hasonló számolás az előzőekhez. $b \in B$, tekintsük az E_b fibrumot, ennek egy eleméhez akarunk F_b-nek egy elemét rendelni. Ha $s(b) \neq 0$, akkor $v = \lambda s(b)$, és $\Phi(b, v) = \lambda t(b)$ egy értelmes lineáris izomorfizmus lesz a fibrumok között. Ez értelmes $E \setminus \pi^{-1}(Z)$-n. Be kellene látni még, hogy Φ holomorfan kiterjed Z fölé is, ez az előzőhöz hasonlóan megy, azon műlik, hogy első rendben tűnnek el. Olyan kis környezetet választunk, hogy térképezni lehessen, itt s, t holomorf függvények lesznek, mindkét nyaláb trivializálódik is, és a hányadosuk valóban értelmes lesz lokálisan mert azonos rendben tűnnek el. $\square$

10.2. Tétel. *M kompakt komplex sokaság $E \to M$ holomorf vektornyaláb. Állítjuk, hogy $H^0(M, E)$ egy véges dimenziós vektortér!*

A bizonyítás gerince a következő. Fogunk tenni a szelések terére egy normát, belátjuk hogy ez egy Banach-tér lesz a normával. Ezután felhasználjuk a következő állítást:

10.3. Tétel (Riesz F.)**.** *X Banach-tér, akkor ha az egységgolyója kompakt, akkor a Banach-tér véges dimenziós.*

A másik fontos alapanyag a következő:

10.4. Tétel (Vitali-Montel)**.** *$D \subset \mathbb{C}^n$ tartomány, $F_k : D \to \mathbb{C}^N$ holomorf leképezések, és tegyük föl, hogy $||F_k(z)|| \leq 1 \forall z \in D, \forall k \in \mathbb{N}$, akkor létezik egy lokálisan egyenletesen konvergens részsorozat.*

Bizonyítás. Megadjuk a normát $H^0(M, E)$-n. Legyen $(U_i)_1^N$ egy véges fedése M-nek [1]trivializáló környezetekkel, sőt válasszunk $V_j \subset \overline{V_j} \subset U_j$-t, és még ezek is alkossanak fedést. Ha van egy szelésünk s, akkor $s|_{U_j}$-hez vehetjük az $s_j : U_J \to \mathbb{C}^r$ holomorf leképezéseket. Ekkor $||s|| := \sum_1^N ||s_j||_{\overline{V_j}}$-ként definiáljuk a normát. Az hogy ez valóban norma teljesen világos, az már kevésbé, hogy a szelések tere Banach-tér lesz.
A nyaláb ragasztóleképezései $g_{ij} : V_j \cap V_j \to GL(n)$. Legyen $s^l \in H^0(M, E)$ az imént definiált normára egy Cauchy sorozat. A definícióból világos, hogy $s^l|_{V_j} = s_j^l$ is Cauchy sorozatot alkotnak minden j-re. Tehát speciálisan minden z pontban Cauchy, pontonként konvergens lesz, $s_j^l(z) \xrightarrow{l \to \infty} s_j(z) \in \mathbb{C}^r$, és egyenletesen is konvergens, $||s||$ globális felső korlát, tehát $s_j \in \mathcal{O}(V_j, \mathbb{C}^r)$. Mivel ezek szelések, világos hogy $s_j^l = g_{jk} s_k^l$ teljesül, és ez a limeszen is átmegy, tehát a lokálisan kapott függvények összeragadnak egy szeléssé, ami pont a szeléssorozatunk limesze lesz, tehát $H^0(M, E)$ valóban Banach tér.
Legyen most $Y = \{s \in H^0(M, E) : ||s|| \leq 1\}$, kellene hogy ez kompakt, a sorozatkompaktságot mutatjuk meg. Veszünk egy $s^l \in Y$ szeléssorozatot tetszőlegesen. Ennek szintén vehetjük a lokális holomorf reprezentáló függvényeit $s_j^l : V_j \to \mathbb{C}^r$. Ezekről a norma definíciójából tudjuk, hogy $||s_j^l|| \leq ||s^l|| \leq 1$. Esetlegesen tovább szűkítve a V_j-ket föltehető hogy térképtartomány is legyen, tehát az értelmezési tartomány áthúzható a térképezésen egy $\mathbb{C}^n$-beli tartományra, és így a Vitali-Montel tétel miatt kapjuk, hogy létezik lokálisan egyenletesen konvergens részsorozata s_1^l-nek, l_1. Most elismételjük ezt $s_2^{l_1}$-re és így tovább, végezetül találunk részsorozatot, ami mindegyik környezetben lokálisan egyenletesen konvergens, a limesz persze megint összeragad szeléssé, és készen vagyunk. $\square$

[1] E-t

Láttuk, hogy az $\mathcal{O}(1)$ nyaláb úgy keletkezik, hogy P^n-ből kidobunk egy pontot, van egy másik természetesen megkapható nyaláb is a projektív terek felett.

11.1. *Példa* (tautologikus nyaláb). $L = \{(l, \zeta) : l \in P^n, \zeta \in l\} \subset P^n \times \mathbb{C}^{n+1}$, az első változóra való vetítéssel ez is egy nyaláb, mint ahogy mindjárt megmutatjuk, és be is azonosítjuk, hogy melyik. Vegyük a szokásos U_j térképeket P^n-en. $\pi^{-1}(U_j) = \{([z], \zeta) : \zeta \in [z]\}$, azonosítani akarjuk $U_j \times \mathbb{C}$-vel. $\phi_h : ([z], \zeta) \mapsto ([z], \zeta_j)$ lesz a megfelelő azonosítás, megadjuk az inverzét is $\phi_j^{-1}([z_0/z_j : .. : 1 : .. : z_n/z_j], \zeta) \mapsto ([z], \lambda(z_0/z_j, .., z_n/z_j))$ pont megfelelő lesz. Hogy néznek ki a ragasztások? $\phi_i \circ \phi_j^{-1}([z], \lambda) = ([z], \frac{z_i}{z_j}\lambda)$, vagyis $g_{ij}(z) = \frac{z_i}{z_j}$ és ebből világos, hogy ez a nyaláb az $\mathcal{O}(-1)$.

11.2. *Megjegyzés.* Nem létezik $F \to P^n$ holomorf vonalnyaláb, amire $L \oplus F = \epsilon^{n+1}$ teljesülne :O

11.3. Tétel. *P^n kanonikus nyalábja $K = \mathcal{O}(-n-1)$.*

Bizonyítás. $n = 1$-et diskutáljuk. $P^1 = U_0 \cup U_1$, a térképezés $[z_0 : z_1] \mapsto \frac{z_0}{z_1} = w \in \mathbb{C}$ az U_1-en, és fordítva a másik térképen. A két térkép között az átmenő leképezés éppen a reciprokvétel. Az érintőnyaláb a koorinátákból kapott áttérések Jacobi mátrixaival ragad össze, eszerint TP^1 pont $\frac{-1}{w^2} = -\frac{z_1}{z_0}$-el ragad. Mi lesz $L = TP^1 \otimes \mathcal{O}(-2)$? Ennek a ragasztófüggvénye a $\xi_{01} = -1$ lesz, megadunk egy explicit trivializációt. Az U_0 trivializáción vehetjük az identitást, a másik térképen pedig a -1 szeresét, ezek pont összeragadnak egy globális trivializációvá, tehát $TP^1 = \mathcal{O}(2)$, és így a duális (a kanonikus nyaláb) pedig az $\mathcal{O}(-2)$. $\square$

11.4. Tétel. *$\forall n$ ha $L \to P^n$ egy holomorf vonalnyaláb, akkor létezik egyértelműen $k \in \mathbb{Z}$, hogy $L = \mathcal{O}(k)$.*

Látjuk, hogy a kanonikus nyalábnak sosincs szelése, hiszen mindig negatív. A kanonikus nyalábbal kapunk egy durva osztályozását a kompakt komplex sokaságoknak:

1. $H^0(M, K) = \{0\}$, például a projektív terek.
2. Lehet triviális a kanonikus nyaláb, ezek a Calabi-Yau sokaságok
3. végül lehet hogy van nemtriviális szelése K_M-nek.

Az 1-dimenziós esetben Riemann gömb maga P^1 lesz az első kategóriában, a tórusz érintőnyalábja, és így a koérintőnyalábja is triviális, a magasabb génuszúakon pedig van szelés.

11.5. Tétel. *M kompakt Riemann felület.* $\dim H^0(M, K) = g$

Ha a dimenzió 2, akkor is létezik valamilyen klasszifikáció Kodairától. Ha pedig nagyobb mint 2, akkor még a klasszifikáció folyamatban van (S. Mori, J. Kollár).

11.6. Definíció. Az előző tétel nyomán $\dim H^0(M, K)$-t $=: p_g$-vel jelöljük, és geometriai génusznak nevezzük. Továbbá a $\dim H^0(M, K^i)$ számokat plurigénusznak nevezzük.

11.7. Tétel (Groethendieck). *$E^r \to P^1$ holomorf vektornyaláb, akkor léteznek $a_1, .., a_r \in \mathbb{Z}$, hogy $E^r = \mathcal{O}(a_1) \oplus ... \oplus \mathcal{O}(a_r)$, és ezek a számok sorrentől eltekintve egyérteműek.*

A magasabb rangú nyalábok magasabb dimenziós terek felett sokkal bonyolultabbak, például TP^2 nem bomlik fel összegként.

Visszatérve az előző megjegyzéshez $L = \mathcal{O}(-1) < P^1 \times \mathbb{C}^2$-nek nincs direkt kiegészítője. Ha lenne, akkor $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(k) = \mathcal{O}(0) \oplus \mathcal{O}(0)$, ellentmondásban a Groethendieck tétellel.

11.8. Tétel. *Y kompakt komplex sokaság, és $L \to Y$ holomorf vonalnyaláb, és adott egy s holomorf szelés, ami első rendben tűnik el X-en. Ekkor $NX = L|_X$, $K_X = K_Y|_X \otimes N_X$.*

Mielőtt bebizonyítjuk, néhány következmény. $L = L[X]$ egy korábbi tételünk szerint. Vegyük észre továbbá, hogy az első állításból következik a második az adjunkciós formulából.

11.9. Következmény. *Ha $X \subset P^n$ sima hiperfelület, amit a $p(z)$ d-fokú homogén polinom vág ki, akkor $K_X = \mathcal{O}(d-n-1)|_X$.*

Bizonyítás. $K_X = K_{P^n}|_X \otimes N_X$ a tétel szerint. Az első tag $\mathcal{O}(-n-1)$ mint láttuk, továbbá X-hez tartozik egy holomorf szelése az $L[X] = \mathcal{O}(d)$ nyalábnak, ami azonosítja a normálnyalábot $\mathcal{O}(d)$-vel. □

Ezzel kapunk egy csomó példát Calabi-Yau sokaságokra.

11.10. Következmény. *p egy homogén $(n+1)$-ed fokú polinom, ami első rendben tűnik el a nullhelyén, akkor $X = \{p = 0\}$-re $K_X = X \times \mathbb{C}$ teljesül.*

11.11. *Példa.* $n = 2$-re egy harmadfokú polinomot kell választanunk, tehát pont az elliptikus görbék (tóruszok) lesznek a Calabi-Yau sokaságok. $n = 3$, $d = 4$, például a $\sum z_i^4 = 0$ $K3$ felület[2]. Hasonlóan ha $n \geq 4$ vehetjük a $\sum z_i^{n+1} = 0$ felületet például.

12.1. Tétel. *Y kompakt komplex sokaság, $L \to Y$ holomorf vonalnyaláb, és s egy szelése. $\{s = 0\} := X \subset Y$ és s elsőrendben tűnik el X-en, akkor $N_X = L|_X$ teljesül a normálnyalábra.*

Bizonyítás. Rendelhetünk egy $L[X] \to Y$ vonalnyalábot az X hiperfelülethez, ez megegyezik L-el a múlt előadás tétele szerint. Célunk belátni, hogy N_X és $L[X]$ ragasztófüggvényei ugyanazok. Veszünk egy X-hez adaptált térképet, lokálisan a definiáló egyenlet $f(z)$ felírható $z_n h(z)$ alakban. $\frac{\partial f}{\partial z_k}(z', 0) = 0$, $k = 1, .., n-1$ illetve $\frac{\partial f}{\partial z_n} = h(z', 0)$.
Ezzel szemben a normálnyaláb konstrukciójához veszünk szintén adaptált térképeket, és a koordinátaáttérés deriváltjának bizonyos részmátrixa[1] lesz a ragasztóleképezés. Észre kell venni, hogy az áttérés utolsó koordinátája egy lokális definiáló egyenlete lesz szintén az X-nek a térképek választása miatt.
$L[X]$ ragasztóleképezéseihez szintén venni kell egy lokális definiáló egyenletetet, az áttérés két ilyennek a hányadosa lesz.

$$g_{ij}(p) = \frac{\phi_i^n}{\phi_j^n}(p) = \frac{(\phi_{ij} \circ \phi_j)^n}{\phi_j^n}(p) = \frac{\phi_{ij}^n}{z_n}(\phi_j(p)) = \frac{\partial}{\partial z_n}\phi_{ij}^n(z', 0).$$

□

És most következzék valami egészen más.

12.4. Analitikus halmazok lokálisan

Igazából csak azokat, amik lokálisan egy függvénnyel definiálhatóak. $p \in \mathbb{C}^n$, $p \in U \cap V$ két nyílt környezet, és $f, g \in \mathcal{O}(U)$. Azt mondjuk, hogy $(f, U) \sim (g, V)$ ha $\exists W \subset V \cap U$ nyílt környezete p-nek, és $f|_W = g|_W$. Ez valóban ekvivalenciareláció persze, az ekvivalenciaosztályokat *holomorf függvénycsírá*knak nevezzük, a halmazukat ${}_n\mathcal{O}_p$-vel jelöljük. Ez megegyezik a p középpontú valamilyen kis halmazon konvergens hatványsorokkal. Különböző pontokban lévő függvénycsírák halmazai természetes módon azonosulnak eltolással. $\mathcal{O}_0$

[2] Kummer-Kähler-Kodaira
[1] jobb alsó 1×1-es blokkja

gyűrű világos módon, megszorítjuk az értelmezési tartományok összegére, és összeadjuk őket, szorzás teljesen hasonló módon.

$n = 1$ esetén könnyű dolgunk van még, $\mathcal{O}_0$ főideálgyűrű. Megfigyelés, $[f](0) = f(0)$ értelmes, nem függ a reprezentáló elem választásától. Egy I ideálban mindenki 0-t vesz fel az origóban, hiszen mindenki akinek nem 0 az értéke az origóban egység, minden ideált a változó valamely hatványa generálja (w^k). Ha $[f] \neq 0$, akkor a függvény valami véges rendben tűnik el az origóban, vagyis $f = w^k \tilde{f}$ alakban írható.

$(z, w) \leq {}_2\mathcal{O}_0$ például nem generálható egy elemmel.

12.2. Definíció (Weierstrass polinom)**.** $(z_1, .., z_{n-1}) = z,\ z_n = w \in \mathbb{C}$, akkor $P(z, w) = w^m + a_{m-1}(z)w^{m-1} + ... + a_0(z)$, ahol $[a_j] \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0$, feltesszük, hogy $a_i(0) = 0$ minden i-re.

Célunk az eddigi egyváltozós esethez analóg konstrukciókat adni. $0 \neq [f] \in_n \mathcal{O}_0,\ f(0) = 0$ és tegyük fel, hogy $f(0, \cdot) \not\equiv 0$, ez mindig elérhető lineáris koordinátacserével.

12.3. Tétel (Weierstrass előkészítési tétele)**.** *Az előbbi setuppal az origó elég kis környezetében* $f(z, w) = u(z, w)P(z, w)$ *alakban írható fel, ahol* P *Weierstrass polinom,* $[u]$ *egység* ${}_n\mathcal{O}_0$*-ban, és* P*-ben* w *foka megegyezik az* $f(0, \cdot)$ *függvény origóbeli multiplicitásával, továbbá ez a felírás egyértelmű. Továbbá, ha* $f \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[w]$, *akkor* u *is!*

Múltkor volt a függvénycsíragyűrű, egy kommutatív egységelemes nullosztómentes gyűrű. Ez utóbbi viszonylag könnyen látszik, ha $[f][g] = 0$, akkor reprezentánsokat választva, egy összefüggő nyílton két holomorf függvény szorzata azonosan nulla, és az unicitástétel miatt készen vagyunk. Ha $f(0) \neq 0$, akkor egy környezetben sem nulla, és így $g \equiv 0$. Távolabbi céljaink:

- $A \subset X$ analitikus hiperfelületek lokális megértése (p körül $\{f = 0\} = A$).
- Általánosítani az $X \subset Y$ 1 kodimenziós részsokasághoz $L[X]$ nyalábot rendelő konstrukciót analitikus hiperfelületekre $L[A]$.
- ehhez kelleni fog többek között, hogy egy ilyen A-nak milyen f a "legjobb" definiáló függvénye.

Tehát ${}_n\mathcal{O}_0$ algebrai tulajdonságai kellenek.

W.E.T. bizonyítása. Emlékeztetés egyváltozós kft-re. Ha adott egy körlap $a \in \mathbb{C}$ körül, és $g \in \mathcal{O}(\bar{D}_r(a))$ függvény, aminek a peremen nincs gyöke $(g|_{C_r(a) \neq 0})$, akkor a gyökök számát a körlap belsejében a logaritmikus integrállal lehet kiszámítani:

$$Z(g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(a)} \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} d\zeta.$$

Ezt alkalmazzuk most az utolsó változóban. $f(0, \cdot) \not\equiv 0$, vagyis létezik $\delta > 0$, hogy $|w| = \delta$-n nem tűnik el ez a függvény, a kör belsejében pedig az egyetlen nullahely az origó. Mivel f folytonos, szintén létezik $\epsilon > 0$, hogy a $||z'|| \leq \epsilon, |w| = \delta$ halmazon sem tűnik el f. Minden z'-re ami az iménti halmazban van az $f(z', \cdot)$ függvény gyökeinek a száma $|w| < \delta$-ban $Z(f(z', \cdot))$ kiszámolható a fenti integrállal: $\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\delta} \frac{\partial_w f(z',t)}{f(z',t)} dt$ A paraméteres integrál tétele miatt $Z(f(z', \cdot))$ folytonos z'-ben, és mivel az értéke valami természetes szám, tehát kontans, méghozzá $\equiv d$, a függvény multiplicitásával. $||z'|| < \epsilon$-ra $\Phi_1(z'), ..., \Phi_d(z')$ jelölje a gyököket, azonban nincs kanonikus indexelés, nem tudjuk sorban választani őket, ugyanakkor tudunk csinálni egy polinomot, aminek pont ezek a gyökei.

$$P(z', w) := \prod_1^d (w - \Phi_j(z')) = w^d + a_{d-1}(z')w^{d-1} + ... + a_0(z')$$

, ez értelmes, hiszen az együtthatók a gyökök elemi szimmetrikus polinomjai, ergo függetlenek a sorrendtől. Látni kellene, hogy P holomorf z'-ben. A Newton-Girard formulákat fogjuk fölhasználni. Jelöljük $\Phi_j(z') =: y_j$-vel, azt mondja a jól ismert algebrai tétel, hogy az y_j-k hatványösszegeinek polinomjaként megkaphatjuk az elemi szimmetrikus polinomokat.

13.1. Állítás. *A $\sum \Phi_j(z')^k$ hatványösszegek holomorfak.*

Bizonyítás. Szintén emlék egyváltozóból, hogy integrálformulával kifejezhetőek ezek a hatványösszegek:

$$\sum \alpha_j^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(a)} \frac{g'}{g}(\zeta)\zeta^k d\ zeta$$

ami szintén könnyen látható reziduumtételből. Ezt alkalmazva a mi konkrét szituációnkra $\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\delta} \frac{\partial_w f(z',t)}{f(z',t)} t^k dt$, és a paraméteres integrál tétele miatt készen vagyunk. □

Mostmár látjuk valóban, hogy P holomorf z'-ben. A konstrukció miatt $P(z,w) \neq 0$ ha $||z|| \leq \epsilon, |w| = \delta$, meg kell még találnunk az állításban szereplő u-t. Egyszerűen elosztjuk a kettőt és a Chauchy integrálformulával megpróbáljuk beterjeszteni:

$$u(z',w) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\delta} \frac{f(z',t)}{p(z',t)} \frac{1}{t-w} dt.$$

Ezzel kapunk egy $|w| < \delta$-ban holomorf függvényt fix z'-re, továbbá hivatkozunk megint a paraméteres integrál tételére, a kifejezés z'-ben is holomorf lesz, és összességében, (z',w)-ben folytonos, ezért a tübbváltozós komplex függvénytani állítás miatt összességében, (z',w)-ben is holomorf. Mivel $P(z',t)$ ugyanakkora rendben túnik el, ugyanott, mint $f(z',t)$ rögzített z'-nél, azért a hányados folytonos, és holomorf $|t| < \delta'$-n, így a Cauchy tétel szerint a fenti integrál valóban előállítja ezt a holomorf függvényt, és nem lesz nulla seholsem, így az előállítást megkapjuk.
Az egyértelműség triviális. f egyértelműen meghatározza P-t, és így u-t is.
Tegyük végül fel, hogy $f \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[w]$, az együtthatófüggvényeket nevezzük $b_j(z')$-nek $0 \leq j \leq N$. $||z'|| \leq \epsilon$-ra $f(z',\cdot)$-nak néhány gyöke esik $|w| \leq \delta'$ körbe, ezek lesznek $P(z',\cdot)$ gyökei. Amikor elosztjuk a két függvényt, akkor konkrétan az utolsó változóból bizonyos gyököket tűntetünk csak el, tehát $\frac{f}{P}$ is polinom lesz w-ben, a foka legfeljebb $N-d$. Ugyanakkor mivel u holomorf, pt hatványsorba lehet fejteni. $u(z',w) = \sum a_s(z')w^s$ alakban, tudjuk ugyanakkor, hogyha $||z'|| < \epsilon$, akkor ez egy polinom, tehát $a_s(z') = 0$ ha $s > N-d$, tehát lokálisan valóban az ${}_{n_1}\mathcal{O}_0[w]$ egye eleme. □

Ez a tétel az implicit függvény tétel egyáltalánosítása! Utóbbinál az $\{f(z',w) = 0\}$, $f(0,0) = 0$ és egy nemelfajulási feltételünk van, $\partial_w f(0,0) \neq 0$, vagyis az utolsó változóra megszorítva ezt a függvényt az origó elsőrendű gyök. Vagyis pont a W.E.T. $d = 1$ szituációjában találjuk magunkat, és $f(z',w) = u(z',w)(w + a_0(z'))$ alakban kapjuk. Következésképp $\{f = 0\} = \{(z,w) : w + a_0(z') = 0\}$, vagyis az implicit felület pont $-a_0$ grafikonja!

13.2. *Megjegyzés.* $f(z',w) = w^4 - zw + z^3 = z^3 - zw + w^4$ attól függően, hogy melyik változóban tekintjük, a Weierstrass polinom foka változhat!

13.3. Definíció. $[f]$ egy n dimenziós függvénycsira az origóban, és válasszunk egy L komplex egyenest. Azt mondjuk, hogy f k-ad rendben L-reguláris, hogyha $f|_L \not\equiv 0$ az origó egy kis környezetében, és k-ad rendben tűnik el az origóban.

13.4. Állítás. *Adott* $[f_1],...,[f_N]$ *véges sok* n *dimenziós origó körüli függvénycsira, mind eltűnik* 0*-ban, de egyik sem a* 0 *csirát reprezentálja, akkor létezik* L *komplex egyenes, hogy minden* j*-re* $[f_j]$ *valami* $k_j \geq 1$ *rendben* L *reguláris.*

Bizonyítás. Trivialitás lol. Tekintsük az $f = \prod_1^N f_j$, és találni kell egy olyan egyenest amin ez a függvény nem azonosan nulla. Könnyű meggondolni[1], hogyha minden egyenesen nulla volna, akkor a szorzat maga a nulla csirát reprezentálja, tehát valamelyik tagja nulla, ellentomndás □

13.5. *Példa.* $f(z,w) = zw + z^6$-hoz a z koordinátasík nem jó, a w viszont igen. Átkoordinátázással lehet könnyen találni ilyen egyeneseket. $u_1 = z,\ u_2 = w - z$ ebben a bázisban $f(u_1,u_2) = u_1(u_2+u_1) + u_1^6$ alakú, mostmár mindkét koordinátaegyenes megfelelő.

13.6. Tétel (Riemann kiterjesztési tétel I.). X *összefüggő komplex sokaság,* $A \subsetneq X$ *analitikus halmaz,* $f \in \mathcal{O}(X \setminus A)$*. Tegyük fel, hogy* $\forall p \in A$*-ra* f *korlátos* p *egy környezetében (ahol értelmes persze). Ekkor* f *egyértelműen, holomorfan kiterjed* X*-re.*

Bizonyítás. Egyértelműség könnyű. Ha $F, G \in \mathcal{O}(X)$ kiterjesztései f-nek, akkor a különbségük azonosan nulla $X \setminus A$-n. Volt tétel, hogy $X \setminus A$-nak van belső pontja, és az unicitástétel miatt készen vagyunk.
Elég a kiterjesztést lokálisan megcsinálni. Feltesszük tehát, hogy $X = D \subset \mathbb{C}^n$ egy policilinder környezete a 0-nak, és $A = \cap Z(f_j)$ ahol $f_j \in \mathcal{O}(D)$m kell hogy f holomorfan kiterjed az origó egy környezetére. Lineáris koordinátacsere után föltehető, hogy az utolsó koordinátaegyenesre nézve f_1 L-reguláris, ergo $f_1(0,\cdot) \not\equiv 0$, és az origó d-ed rendű nullhely. Választunk $\delta', \epsilon > 0$-kat mint a W.E.T.-nél, hogy a $||z'|| \leq \epsilon,\ |w| = \delta'$ halmazon $f_1(z',w) \neq 0$. $||z'|| \leq \epsilon$-on $f_1(z',\cdot)$-nak véges sok gyöke van a $|w| < \delta'$ körlapon. $f(z',\cdot)$ korlátos a $g(z',\cdot)$ minden gyöke környezetében, tehát mint egyváltozós függvény beterjed. Most mindjárt egy Cauchy integrállal kifejezzük ezt a kiterjesztést:

$$F(z',w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\delta'} \frac{f(z',\zeta)}{\zeta - w} d\zeta$$

ez a formula definál egy függvényt $||z'|| < \epsilon,\ |w| < \delta'$-n, jelöljük ezt a halmazt G-vel. $F(Z',\cdot)$ holomorf, mert Cauchy integrál, továbbá $F(\cdot,w)$ holomorf a paraméteres integrál tétele miatt, végül folytonos mint kétváltozós függvény, tehát összességében is holomorf G-n. Mivel egy adott körlapon holomorfan beterjedt f, a Cauchy integrál valóban előállítja, és F kiterjesztés. Mivel $A \subset Z(f_1)$, készen vagyunk. □

13.7. Tétel (Riemann kiterjesztési tétel II.). X *komplex sokaság,* $A \subset X$ *úgy, hogy* $codim A \geq 2$*, adott* f *holomorf* $X \setminus A$*-n, akkor* f *holomorfan kiterjed* X*-re.*

Bizonyítás. N.B. □

Ez egy általánosítása a Hartogs tételnek. hiszen egy pont például analitikus halmaz $n \geq 2$-re a megfelelő kodimenziós feltételek teljesülése mellett visszakapjuk a Hartogs tételt, hogy nincsenek izolált szingularitások $\mathbb{C}^{\geq 2}$-ben.

14.1. Tétel (Weierstrass osztási tétel). $f \in {}_n\mathcal{O}_0$ *és* $P \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[w]$ *egy Weierstrass polinom. Ekkor* $f = qP + r$ *alakban írható, ahol* $r \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[w]$*, amire* $\deg_w r < \deg_w P =: d$*, és* $q \in {}_n\mathcal{O}_0$*. Továbbá* q, r *egyértelmű, és ha* $f \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[w]$*, akkor* q *is.*

[1] unicitástétel+kompaktság

Bizonyítás. Előbb az egyértemüség. Tegyük föl, hogy $Pq_1 + r_1 = Pq_2 + r_2 = f$ a fenti feltételek mellett. Rendezve $g := P(q_1 - q_2) = r_2 - r_1 =: r$. Fixálva az első $n-1$ változót $g(z', \cdot)$ egy legfeljebb $d-1$-ed fokú polinom w-ben a második felírás szerint. Ugyanakkor mivel P foka feltevés szerint d, neki multiplicitással mindig d darab gyöke van, tehát $P(q_1 - q_2) = g(z', \cdot)$-nak pedig végképp. Következik, hogy $g(z', \cdot) \equiv 0$, tehát $r_1 = r_2$. Most pedig a nullosztómentesség miatt $q_1 = q_2$, hiszen $P \neq 0 \in {}_n\mathcal{O}_0$.
Most jön az egzisztencia. Hasonlóan a Weierstrass előkészítési tételhez legyen $0 < \delta, \delta'$ kis pozitív számok, megint egy kis szorzatkörnyezetben fogunk vizsgálódni. A $|w| = \delta$, $||z'|| \leq \delta'$ környezetben konstrukció miatt $P(z', w) \neq 0$. Most megadjuk a hányadost:

$$q(z', w) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\delta} \frac{f(z', \zeta)}{P(z', \zeta)} \frac{1}{\zeta - w} d\zeta.$$

Ez minden esetre egy Cauchy integrál, tehát teljesen hasonló érvelések miatt holomorf lesz a paraméteres integrál tétele miatt külön az első $n-1$ változójában együtt, és az utolsóban, és mivel folytonos holomorf is lesz komplex függvénytani okokból, $q \in \mathcal{O}(D)$.
Legyen $r = f - qP$, ez a függvény persze holomorf a tartományunkon. Mivel f holomorf, őt is előállíthatjuk az utolsó koordinátájában Cauchy integrálként, majd ezt a két integrált összevonhatjuk.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\delta} \frac{f(z', \zeta)}{\zeta - w} - \frac{f(z', \zeta)}{P(z', \zeta)} \frac{P(z', w)}{\zeta - w} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\delta} \frac{f(z', \zeta)}{P(z', \zeta)} \frac{P(z', \zeta) - P(z', w)}{\zeta - w} d\zeta$$

Most vegyük észre, hogy $(P(Z', \zeta) - P(z', w))/(\zeta - w)$ egy polinom, méghozzá legfeljebb $d-1$. fokú w-ben. Az együtthatók pedig z', ζ-ban polinomok. Felcserélhetjük ezt a véges összeget az integrálással (hiszen az integrálás nem w-re, hanem ζ-ra történik). $\sum_0^{d-1} w^j \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\delta} \frac{f(z', \zeta)}{P(z', \zeta)} q_j(z', \zeta) d\zeta$ alakú lesz, ami hasonlóan látható módon holomorf.
Látni kellene még, hogy ha f speciális alakú, akkor q is. Fibrumonként elvégezhetjük a polinomosztást, a holomorfia kis környezetben megmarad. Ezzel kapunk egy előállítást, ami az egyértelműség miatt megegyezik a fent kapottal. □

14.2. Definíció. I integritási tartomány ha kommutatív nullosztómentes és egységelemes (és $1 \neq 0$). $0 \neq a$ és nem egység gyűrűelem irreducibilis, hogyha minden $a = a_1 a_2$ szorzatrabontásnál valamelyik a_i egység. Akkor prím, hogyha abból, hogy oszt egy szorzatot, következik hogy valamelyik tagját osztja.

Az triviális, hogy ha a prím, akkor irreducibilis, de visszafelé nem biztosan, például $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

14.3. Definíció. Egy integritási tartomány UFD, hogyha minden nem nulla, nem egység elem felbontható irreducibilisek szorzatára, és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

14.4. Állítás. *Ha I UFD, és a irreducibilis, akkor a prím.*

Bizonyítás. Triviális □

14.5. Tétel. *${}_n\mathcal{O}_0$ UFD.*

15.1. *Megjegyzés.*
1. Ha $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, akkor $\mathcal{O}(D)$ integritási tartomány, de nem UFD, és nem Noether
2. ${}_n\mathcal{O}_0$ egységei azon függvénycsirák, amik nem nullát vesznek fel az origóban, az ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[\omega]$ Weierstrass polinomok között az $f \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0$ függvények lesznek egységek, amikre $f(0) \neq 0$.

15.2. Lemma. *$h \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[\omega]$ egy Weierstrass polinom. Ekkor h reducibilis ${}_n\mathcal{O}_0$-ban ekvivalens azzal, hogy ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[\omega]$-ban.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy h reducibilis ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[\omega]$-ben, ez azt jelenti, hogy $h = g_1 g_2$, ahol g_i nem egység ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[\omega]$-ban. Tegyük fel indirekt, hogy mondjuk $g_1(0) \neq 0$, ekkor $g_2 = hg_1^{-1} + 0$ teljesül ${}_n\mathcal{O}_0$-ben. h egy Weierstrass osztási tétel szerint eloszthatjuk g_2-t h-val maradékosan, és kapjuk a $g_2 = \tilde{g}h + r$ azonosságot (${}_{n-1}\mathcal{O}_0[\omega]$-ban), az előállítás egyértelműsége miatt kapjuk, hogy g_1 egység, ellentmondás.
A másik irányhoz tegyük fel, hogy h reducibilis ${}_n\mathcal{O}_0$-ben, vagyis van egy nemtriviális felbontása $h = g_1 g_2$, $g_i(0) = 0$. $h(0, \cdot) \not\equiv 0$, ezért $g_j(0, \cdot)$ sem azonosan nulla. Preparáljuk $g_j = u_j h_j$, ahol u_j egység, h_j Weierstrass polinom. $1 * h = u_1 u_2 h_1 h_2$, ahol az első két tag egy egység, a második kettő szorzata pedig Weierstrass polinom. Az előállítási tétel egyérteműségéből $1 \equiv u_1 u_2$, és $h = h_1 h_2$, tehát h reducibilis, mint Weierstrass polinom. □

15.3. Következmény. *P egy Weierstrass polinom, akkor $P = \prod_1^N P_j$, ahol P_j irreducibilis Weierstrass polinom.*

Bizonyítás. A lemma bizonyításában láttuk, hogy ha P reducibilis, akkor felbomlik két kisebb fokú Weierstrass polinom szorzatára, ezt ismételgetve véges sok lépésben megkapjuk a felbontást. □

15.4. Tétel. *${}_n\mathcal{O}_0$ UFD.*

Bizonyítás. $n = 1$-re ${}_1\mathcal{O}_0$ főideálgyűrű. Most n-re vonatkozó indukcióval tegyük fel, hogy $n-1$-re tudjuk, és indirekt létezzen egy $f \in {}_n\mathcal{O}_0$ amire $f(0) = 0$, de nem azonosan nulla, és lineáris koordinátacserével feltesszük, hogy $f(0, \cdot) \not\equiv 0$. Előkszítünk, $f = uP = uP_1 ... P_N$ az előző következmény miatt. Ha f-nek két különböző felbontása is van irreducibilisekre $\prod f_j = \prod g_k$. Ezek a függvények nem azonosan nullák, de az origóban eltűnnek, egy újabb koordinátacserével föltehetjük, hogy az utolsó változóban regulárisak. Preparáljuk az f_j, g_k függvényeket $u_j P_j, v_k H_k$ alakban. Átrendezve $\prod u_j \prod P_j = \prod v_k \prod H_K$ ez két egység-Weierstrass polinom szorzat, tehát a preparációs tétel egyértelműségi állítása miatt a szorzatok megegyeznek. Mivel $P_j, H_k \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[\omega]$ ők sorrend erejéig megegyeznek, hiszen indukció miatt ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$ UFD, és a Gauss lemma megfelelő alakjából ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[\omega]$ is. □

15.5. Tétel. *${}_n\mathcal{O}_0$ Noether*

Bizonyítás. Indukciót alkalmazunk ismét. $n = 1$-re főideálgyűrű, az indukció elindul. Veszünk egy nem nulla I ideált, és be kellene látni, hogy végesen generált. Veszünk egy $f \in I$-t, lineáris koordinátacserével feltesszük, hogy az utolsó változójában reguláris, előkészítjük $f = uP$, az ideáltulajdonság miatt látjuk, hogy $P \in I$. Az indukciós feltétel miatt ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$ Noether, és Hilbert tétele miatt ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[\omega]$ is az. $P \in I \cap {}_{n-1}\mathcal{O}_0[\omega] \triangleleft {}_{n-1}\mathcal{O}_0[\omega]$ és itt végesen generált az eddigiek szerint, generálják $\{g_j\}_1^k$.

15.6. Állítás. *$P, g_1, ..., g_k$ generálják az egész I-t.*

Bizonyítás. Ha $H \in I$, akkor osszuk el maradékosan P-vel $H = hP + r$, ahol r is egy Weierstrass polinom, világos továbbá, hogy $r \in I$. Mivel r egy Weierstrass polinom az ideálban a g_j-k kigenerálják, ezt akartuk. □

□

15.7. *Megjegyzés.* Már a g_j-k is kigenerálják az ideált.

15.8. Definíció. Halmazcsira $0 \in \mathbb{C}^n$-ben $(X, o) \sim (Y, o)$ alakban írjuk, ahol $X, Y \subset \mathbb{C}^n$, $0 \in X \cap Y$ és létezik az origónak egy U környezete, amire $U \cap X = U \cap Y$.
Ha $f \in {}_n\mathcal{O}_0$, akkor értelmes $Z(f) = \{f = 0\}$ mint halmazcsira. Ha f egység, akkor az előbbi zéróhalmaza üres. Világos, hogy $Z(f_1, ..., f_n) = Z(f_1) \cap ... \cap Z(f_n)$.

15.9. Definíció. $0 \in X \subset \mathbb{C}^n$-re halmazcsira analitikus ha léteznek $f_1, ..., f_k$ lokális holomorf függvények, hogy $(X, 0) \sim Z(f_1, ..., f_k)$.

15.10. *Példa.* M komplex sokaság, $A \subset M$ analitikus halmaz, akkor minden $p \in A$-re definiál egy analitikus halmazcsirát p-ben.

15.11. Definíció. Ha $(X, 0)$ halmazcsira $\mathbb{C}^n$-ben, akkor $I(X) := \{f \in {}_n\mathcal{O}_0 : X \subset Z(f)\}$.

15.12. Állítás. *$I \triangleleft {}_n\mathcal{O}_0$, akkor $Z(I) = \cap_I Z(f)$ egy analitikus halmazcsira.*

Bizonyítás. ${}_n\mathcal{O}_0$ Noether, tehát $I = (g_1, ..., g_k)$, és így $Z(I) = \cap_1^k Z(g_j)$. □

15.13. Állítás. *$X_1 \subset X_2$, akkor $I(X_1) \supset I(X_2)$*

Bizonyítás. $I_j \triangleleft {}_n\mathcal{O}_0$, ha $I_1 \subset I_2$, akkor $Z(I_1) \supset Z(I_2)$. Ha X analitikus halmazcsira, akkor $Z(I(X)) = X$, és fordítva, ha $I \triangleleft {}_n\mathcal{O}_0$, akkor $I(Z(I)) \supseteq I$.
???
profit □

15.14. Definíció. $(A, 0) \subset \mathbb{C}^n$ analitikus halmazcsira irreducibilis, hogyha egy $A = A_1 \cup A_2$ analitikus halmazcsirákra való felbontásnál $A_1 = A$ vagy $A_2 = A$.

15.15. Definíció. M egy komplex sokaság, $A \subset M$ analitikus részhalmaz irreducibilis, hogyha egy $A = A_1 \cup A_2$ felbontásra vagy $A = A_1$ vagy $A = A_2$

15.16. *Megjegyzés.* Megtörténhet, hogy egy halmaz globálisan irreducibilis, de valamely pontjában reducibilis $(y^2 - x^3 - x^2)$.

15.17. Tétel. $(A, 0)$ *analitikus halmazcsira irreducibilis pontosan akkor, hogyha $I(A)$ prím.*

Bizonyítás. Ha $f_1 f_2 \in I(A)$, akkor $A = (A \cap Z(f_1)) \cup (A \cap Z(f_2))$, és mivel A irreducibilis, akkor mondjuk $A \cap Z(f_1) = A$, vagyis $A \subset Z(f_1)$, és így $f_1 \in I(A)$.
A másik irányhoz tegyük fel, hogy $I(A)$ prím, és van egy nemtriviális $A = A_1 \cup A_2$ felbontása. Ekkor létezik $f_j \in I(A_j) \setminus I(A)$, de ez ellentmond a prímségnek, hiszen $f_1 f_2 \in I(A)$. □

15.18. Tétel (Gyenge nullstellensatz)**.**

15.19. Tétel. *Ha $f \in {}_n\mathcal{O}_0$ $Z(f)$ pontosan akkor irreducibilis, hogyha létezik egy irreducibilis $g \in {}_n\mathcal{O}_0$, melyre $f = g^k$.*

Bizonyítás. Ha $f = g^k$, ahol g irreducibilis, akkor $Z(f) = Z(g) = A$. Tegyük fel, hogy A-nak van egy nemtriviális $A_1 \cup A_2$ felbontása. Megintcsak létezik $h_j \in I(A_j) \setminus I(A)$. Mivel $h_1 h_2 \in I(A)$ a gyenge nullstellensatz miatt $g | h_1 h_2$. Tudjuk, hogy ${}_n\mathcal{O}_0$ egy UFD, tehát g prím, vagyis g osztja mondjuk h_1-et, vagyis $Z(g) \subset Z(h_1)$ vagyis $h_1|_A \equiv 0$, ami ellentmondás, hiszen $h_1 \notin I(A)$.
Mivel $Z(f)$ irreducibilis, az $f = \prod g_j^{n_j}$ felbontásra $Z(f) = \cup Z(g_j)$ teljesül, irreducibilitás miatt ez csak triviális lhet, vagyis valamelyik indexre $Z(f) = Z(g_j)$, és így valóban $f = g_j^{n_j}$. □

15.20. Következmény. *$f \in {}_n\mathcal{O}_0$, akkor $Z(f) = \cup A_j$ irreducibilis analitikus halmazok uniója.*

Bizonyítás. Mivel ${}_n\mathcal{O}_0$ UFD, $f = \prod g_j^{n_j}$ alakban áll elő különböző irreducibilisek szorzataként. $Z(f) = \cup Z(g_j)$, és az unió minden tagja irreducibilis az előző tétel szerint. □

Múltkor volt, hogy

16.1. Tétel. *$f \in {}_n\mathcal{O}_0$-ra $Z(f)$ irreducibilis pontosan akkor, hogyha $f = g^k$ egy $g \in {}_n\mathcal{O}_0$ irreducibilis elemre.*

16.2. Következmény. *$f \in {}_n\mathcal{O}_0$, akkor $Z(f) = \cup_1^n A_j$ felbomlik irreducibilis hiperfelületekre lokálisan.*

Bizonyítás. f-et felbontjuk irreducibilisek szorzatára $\prod_1^n g_j^{n_j} = f$, ahol $g_j \neq g_k$ ha $j \neq k$, ekkor persze $Z(f) = \cup_1^n Z(g_j)$, és ezek megfelelnek az A_j-knek. □

Azt láttuk a múltkor, hogy ${}_n\mathcal{O}_0$ egy UFD, tehát értelmes arról beszélni, hogy $f, g \in {}_n\mathcal{O}_0$ relatív prímek.

16.3. Tétel. *f, g legyen w-reguláris[1]. Ekkor f, g relatív prímek pontosan akkor, ha $\alpha f + \beta g = r(z')$ alakú összefüggés található, ahol $\alpha, \beta \in {}_n\mathcal{O}_0$, és $r \not\equiv 0 \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0$.*

Bizonyítás. W.E.T.-t használjuk, $f = uP$, $g = vQ$. Mivel f, g relatív prímek, ezért a Weierstrass polinomok is relatív prímek ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[w]$-ben. Mivel $R := {}_{n-1}\mathcal{O}_0$ nullosztómentes kommutatív, van hányadosteste, jelölje K. A Gauss lemma pedig azt mondja nekünk, hogy ezért K felett is relatív prímek. Mivel K test, $K[w]$ euklideszi gyűrű, ezért létezik $A, B \in K[w]$, hogy $AP + BQ = 1$. Felszorozva A, B közös nvezőjével azt kapjuk, hogy $rAP + rBQ = r$, ahol $rA, rB \in R$, ezért az $\alpha = \frac{1}{u} rA, \beta = \frac{1}{v} rB$ megfelelő lesz.
Most tegyük fel, hogy létezik egy az állításnak megfelelő α, β, r, és indirekt okoskodunk. Tegyük fel, hogy létezik valami $h(z', w)$ közös osztó, ami a nullában nulla, de nem azonosan nulla. Mivel $h|f, h|g$, ezért $h|r$ is teljesül, azaz $r(z') = h(z', w)q(z', w)$ valamilyen q-ra. f, g w-reguláris feltevés szerint, ezért a h-nak is[2]. Mivel $h(0) = 0$, az eddigiekhez hasonlóan ha $|w| = \delta$-t veszünk valami kis δ-ra akkor itt h nem tűnik el ha $||z'|| \leq \epsilon$, legyen h multiplicitása a nullában d. Tehát $\forall ||z'|| \leq \delta'$-re létezik ($d$ darab, de ez nem fontos) w, amire $h(z', w) = 0$. Tehát ilyen pontokban f és g is eltűnik, és így a formula miatt $r(z') = 0$, tehát $r \equiv 0$, ellentmondás. □

16.4. Tétel (Gyenge nullstellensatz)**.** *$f \in {}_n\mathcal{O}_0$, $f = \prod f_j$ irreducibilisek és páronként különbözőek[3], és $h \in {}_n\mathcal{O}_0$ nem azonosan nulla függvénycsíra olyan, hogy $h|_{Z(f)} \equiv 0$, akkor $f|h$.*

Bizonyítás. Mivel az f_j-k relatív prímek elegendő arra az esetre szorítkozni, amikor f maga irreducibilis. Koordinátacserével feltehető, hogy h w-reguláris. Ha $f \nmid h$, akkor relatív prímek, alkalmazzuk az előző tételt. Létezik tehát $\alpha f + \beta h = r(z')$ felbontás, és alkalmazzuk megint az előbbi érvelést, kis környezetben minden z'-höz találunk multiplicitásnyi sok gyökét $f(z', \cdot)$-nak, speciálisan legalább egyet. Ugyanezen pontokban feltevés szerint h-nak is el kell tűnnie, és a formulából azt kapjuk, hogy $r \equiv 0$. □

16.5. Tétel (Nullstellensatz)**.** *I egy ideál ${}_n\mathcal{O}_0$-ban, $Z(I)$ egy analitikus halmazcsirát definiál, a tétel azt állítja, hogy*

$$I(Z(I)) = \sqrt{I}.$$

Ez a "valódi" nullhelytétel, nem bizonyítjuk.

[1] az origóban nem azonosan nulla a w koordinátában, lásd fentebb
[2] $h(0, \cdot) \not\equiv 0$
[3] minden multiplicitás 1

16.6. Tétel. *$f, g \in {}_n\mathcal{O}_0$ relatív prím elemek, ekkor létezik $\epsilon > 0$, hogy $\forall c \in \mathbb{C}^n$-re ha $||c|| < \epsilon$, akkor $g_c, f_c \in {}_n\mathcal{O}_c$ is relatív prímek.*

Bizonyítás. Ha valamelyik elem egység, akkor érdektelen eset, tehát tegyük fel hogy f, g eltűnik az origóban. Feltehetjük egy transzformációval, hogy w-regulárisak, és megint kapunk a relatív prímségből $\alpha f + \beta g = r$ felbontást. Indirekt tegyük fel, hogy f_c, g_c-nek van közös osztója, tehát $h_c | r_c$, de nem azonosan nulla $h(c', \cdot)$, legyen k-rendű gyöke a nullában. Erre alkalmazzuk az eddigi módszert, létezik c'-nek egy környezete hogy $h(z', \cdot)$-nak van gyöke, most itt végezzük el az előbbi érvelést, és kapjuk, hogy $r(z') = 0$ a c' egy kis környezetében, és az unicitástétel miatt készen vagyunk. □

16.7. *Megjegyzés.* Nem minden tulajdonság ilyen, attól hogy egy csira irreducibilis az origóban, nem következik hogy egy környezetben is az. $f(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2 z_3$ egy ilyen ellenpélda.

17.5. Analitikus hiperfelület lokális leírása

Feltesszük, hogy $p = 0 \in A$, lineáris koordinátacserével feltehetjük, hogy f ω reguláris. Ekkor létezik $\delta, \delta' > 0$, hogy $W = \{(z', 0) : |z'| < \delta\}$-re és $V = W \times D_f(0)$-re a $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ leképezés $\pi|_{V \cap A} : V \cap A \to W$ egy elágazó fedés, továbbá kihagyva a szinguláris pontokat $\pi : \pi^{-1}(W \setminus \{r = 0\}) \to W \setminus \{r = 0\}$ egy d rétegű becsületes topologikus fedést kapunk.
Weierstrass preparációt alkalmazhatjuk az A-t definiáló függvényre, $f = uP$, ahol u egység a lokális gyűrűben, P Weierstrass polinom. Ha A irreducibilis, akkor f, és így P is az, tehát P és $\partial_\omega P$ relatív prímek a lokális gyűrűben. 16.3 szerint vannak α, β függvénycsirák és $r \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0$ nem azonosan nulla függvénycsira, hogy $\alpha P + \beta \partial_\omega P = r$.

17.1. Tétel. *$0 \neq f \in {}_n\mathcal{O}_0$ egy nem egység, és tegyük fel hogy $h \in {}_n\mathcal{O}_0$ melyre $h|_{Z(f)} \equiv 0$, akkor létezik egy k természetes szám, hogy $h^k = fg$ (vagyis $I(Z(f)) = \sqrt{(f)}$).*

Bizonyítás. f-et bontsuk irreducibilisek szorzatára $\prod f_i^{k_j}$, ahol f_j irreducibilis, páronként különbözőek. $Z(f) = Z(\prod f_j)$ világos, a gyenge nullhelytétel miatt $\prod f_j | h$, tehát $h = Q \prod f_j$, és látjuk, hogy $k := \max\{k_j\}$ megfelel. □

Ha $p \in A \subset D \subset \mathbb{C}^n$ analitikus hiperfelület, $f \in \mathcal{O}(U)$ és $U \cap A = Z(f)$, és lokálisan $f_p = v \prod f_j^{k_j}$ alakban áll elő, ahol v egység, f_j páronként különböző irreducibilis függvénycsirák. $\tilde{f} = \prod f_j$, persze $Z(\tilde{f}) = A \cap U$ teljesül a nullhelyre.

17.2. Definíció. Ezt az $\tilde{f}$ függvényt az A analitikus halmaz p beli minimális definiáló függvényének nevezzük.

17.3. Állítás. *$\tilde{f}$ egység erejéig jól definiált.*

Bizonyítás. Ha g egy másik definiáló függvénye A-nak p egy környezetében, vegyük az irreducibilisekre való felbontását $\prod g_j$, ahol g_j irreducibilisek és páronként különbözőek. Mivel $Z(\tilde{f}) = Z(g)$ a gyenge nullstellensatz miatt $g = h\tilde{f}$, és fordítva $\tilde{f} = Hg$, ahol $h, H \in {}_n\mathcal{O}_0$, így $g = hHg$, vagyis h, H egységek. □

17.4. Definíció. X komplex sokaság, $A \subset X$ komplex hiperfelület. Tegyük fel, hogy $0 \not\equiv f \in \mathcal{O}(X)$, és $Z(f) = A$. f minimális definiáló függvény, ha minden $p \in A$ pontra f_p minimális definiáló függvénye A-nak a p pontban.

17.5. Következmény. *? ? ?*

17.6. Állítás. *X komplex sokaság, $A \subset X$ analitikus hiperfelület, $f, g \in \mathcal{O}(X)$ minimális definiáló függvény, és $g|_A \equiv 0$, akkor $f|g$.*

Bizonyítás. $X \setminus A$-ban g/f egy értelmes holomorf függvény. Lokálisan egy $p \in A$ pontban a gyenge nullstellensatz szerint létezik egy h_p függvénycsira, hogy $g_p = h_p f_p$. Ebből következően g/f holomorfan kiterjed p egy környezetére, és az unicitás tétel miatt a lokális kiterjesztések összeragadnak. □

17.7. Következmény. *X komplex sokaság, A analitikus hiperfelület, $f, g \in \mathcal{O}(X)$ minimális definiáló függvényei A-nak, akkor létezik egy $h \in \mathcal{O}^*(X)$, hogy $g = hf$.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző állítást mindkét irányban. □

Na de van-e mindig minimális definiáló függvény? Ha X kompakt például nincs! Egyéb bajokba is ütközhetünk.

17.8. *Példa.* $X = \mathbb{C}^2 \setminus S^1$ ahol az első koordináta egységkörét töröljük ki. Az $A = \{(z, 0) : |z| > 1\}$ halmaz egy analitikus hiperfelület X-ben, azonban nem létezik globális definiáló függvénye.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy mégis létezik. A Hartogs tétel miatt egy ilyen f holomorfan kiterjed az egész $\mathbb{C}^2$-re. $f(z, 0) = 0$, $|z| > 1$-re, akkor unicitás miatt $f(\cdot, 0) \equiv 0$, és látjuk, hogy $A \subsetneq Z(f)$, ami ellentmondás. □

17.9. Tétel. *$f \in {}_n\mathcal{O}_0$ minimális definiáló függvénye $Z(f)$-nek p-ben pontosan akkor, hogyha létezik k, hogy $\partial_k f$ és f relatív prímek ${}_n\mathcal{O}_0$-ben.*

Bizonyítás. A pontosan részhez tegyük fel, hogy $f = g^2 h$ nemtriviálisan hasad két nem-egységre. Ekkor $g|f$, és $\partial_k f = g^2 \partial_k h + 2hg\partial_k g$, vagyis $g|\partial_k f$, ami ellentmondás.
Az oda irányhoz lineáris koordinátacserével feltesszük, hogy f ω-reguláris, és belátjuk, hogy f és $\partial_\omega f$ relatív prímek.
Weierstrass preparálunk, $f = uP = u \prod P_j$, ahol P_j irreducibilisek, páronként különbözőek. Deriválva

$$\partial_\omega f = \partial_\omega u P + u \sum \partial_\omega P_j \prod_{k \neq j} P_k.$$

Kellene, hogy P_j és $\partial_\omega f$ relatív prímek. $(P_j, \partial_\omega P_j \prod_{k \neq j} P_j) = 1$? P_j irreducibilis, a szorzatot nem oszthatja, tehát a kérdés arra redukálódik, hogy $(P_j, \partial_\omega P_j) = 1$, ez pedig világos mert P_j irreducibilis és mivel ω reguláris nem azonosan nulla. □

17.10. *Megjegyzés.* Nem ω-polinomra megtörténhet, hogy $f|\partial_\omega f$.

17.11. *Példa.* $f(z) = z\omega + z, \partial_\omega f = z$

17.12. Tétel. *X komplex sokaság, A analitikus hiperfelület, ekkor létezik lokális minimális definiáló függvény minden $p \in A$-ra.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $p = 0$, minden lokális. Ha $f \in {}_n\mathcal{O}_0$ minimális definiáló függvény, akkor létezik egy k index, hogy $f, \partial_k f$ relatív prímek 0-ban, ekkor a 0 egy kis környezetében is azok, tehát a környezetben minden pontban minimális definiáló függvény. □

17.13. Tétel. *X komplex sokaság, A analitikus hiperfelület, $f \in \mathcal{O}(X)$, $Z(f) = A$ minimális definiáló függvény, akkor szing $A = \{p \in X : f(p) = 0 = df(p)\} =: \Sigma$.*

Bizonyítás. Ha $p \in A \setminus \Sigma$, akkor az implicit függvény tétel miatt p sima pont. Ha van egy sima pontunk $p \in \Sigma$, akkor létezik hozzá egy U nyílt, és egy g lokális holomorf függvény, hogy $Z(g) = A \cap U$ és $dg(p) \neq 0$. Mivel f minimális definiáló függvény a gyenge nullstellensatz miatt $f|g$, vagyis $g = fh$, és létezik egy k index, hogy $\partial_k g \neq 0$, de deriválva az előző egyenlőséget ebben az irányban és kiértékelve p-ben $0 \neq 0$ adódik, ellentmondás. □

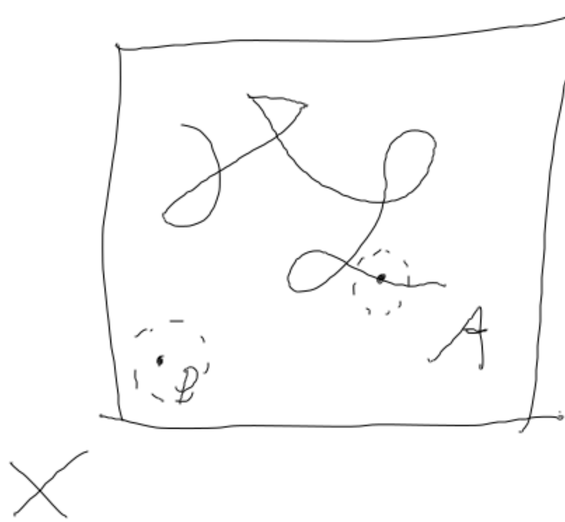
17.14. *Példa.* $A = \{z^3 - w^2 = 0\}$, a cusp. Az egyenlet a minimális definiáló függvénye, tehát csak az origó szinguláris.

18.1. *Megjegyzés.* $L \to X$ egy holomorf vonalnyaláb, $s \in H^0(L)$, aminek van nullahelye (de nem azonosan nulla), akkor $Z(s) \subset X$ egy analitikus hiperfelület, értelmes azt mondani, hogy s egy minimális definiáló függvénye $Z(s)$-nek

18.2. Tétel. *X komplex sokaság, $A \subset X$ analitikus hiperfelület, akkor*

1. *létezik $L \to X$ holomorf vonalnyaláb, és ennek egy s holomorf szelése, amire $Z(s) = A$, és ez minimális definiáló függvénye A-nak*[1]

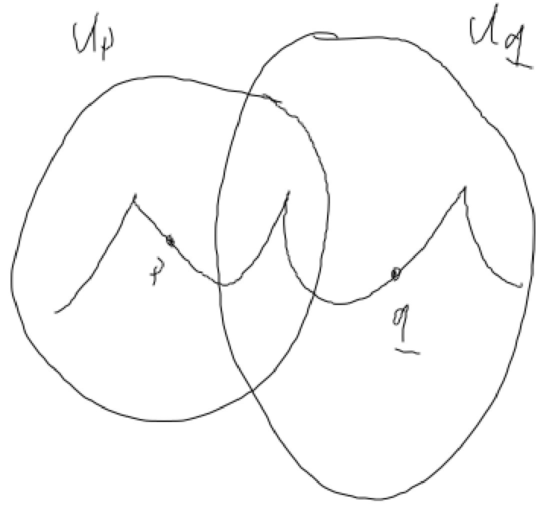
2. *$E[A] \to X$ holomorfan triviális akkor és csak akkor, hogyha létezik $f \in \mathcal{O}(X)$, amire $Z(f) = A$, és f minimális definiáló függvény.*



5. ábra. A setup

Bizonyítás. 1. Veszünk egy $p \in X \setminus A$ pontot először, választunk hozzá egy $U_p \subset X \setminus A$ környezetet, itt legyen $f_p :\equiv 1$.
Ha $p \in A$, akkor tudjuk, hogy egy kellően kis U_p környezetben vehetünk egy $f_p \in \mathcal{O}(U_p)$ minimális definiáló függvényt $A \cap U_p$-hez.
$p, q \in X$, ha $U_p \cap U_q \cap A = \emptyset$, akkor $g_{pq} = \frac{f_p}{f_q} \in \mathcal{O}^*(U_p \cap U_q)$, és ez egy nyaláb áttérési függvénye valóban. Ha $U_p \cap U_q \cap A \neq$, akkor $p, q \in A$, és f_p, f_q minimális definiáló függvények, speciálisan $U_p \cap U_q \cap A$ minden

[1]jelöljük $E[A], L[A], [A]$



6. ábra. A két környezetnél, illetve a metszeteknél

pontjában is. Volt tétel, hogy $\frac{f_p}{f_q}$ kiterjed nem nulla függvényként A ($U_p \cap U_q$-ba eső) pontjaiba. Ezek a ragasztófüggvének teljesítik a kociklusfeltételt látványos módon, és így adódik az $E[A]$ vonalnyalábot, és az f_p függvényekből kapjuk a szükséges szelést, ami látványosan pont A-n túnik el.
2. Tegyük fel, hogy van globális minimális definiáló függvénye A-nak, legyen ez $f : X \to \mathbb{C}$. Ekkor $\forall p \in A$-re választható $U_p = X, f_p = f$, a ragasztófüggvényünk azonosan 1, és így a nyaláb triviális.
Megfordítva, ha $E[A]$ holomorfan triviális, létezik hozzá az s_A szelés, ami kivágja. A trivialitás miatt létezik egy másik szelés, s, ami sehol sem tűnik el. Vegyünk trivializáló környezeteket, reprezentálja itt a $\{h_p\}$ függvényrendszer az s szelést. A kompatibilitási feltételt átrendezve $f_q/h_q = f_p/h_p$ adódik a metszeten, tehát ezek a hányadosok összeragadnak egy globálisan definiált függvénnyé, ami kivágja A-t és minimális, mert az f_p-k azok voltak. □

18.3. Következmény. *Ha X olyan komplex sokaság, hogy fölötte minden holomorf vonalnyaláb holomorfan triviális, akkor minden $A \subset X$ analitikus hiperfelület (globális) minimális függvénnyel van definiálva.*

18.4. *Példa.* $\mathbb{C}^n$ például tudja ezt, vagy a $\mathbb{B}^n$ golyó, illetve a D^n policilinderen is minden vonalnyaláb holomorfan triviális. Továbbá X tetszőleges nyílt Riemann felület is, vagy ha $D_1 \times ... \times D_n$ alakú, ahol $D_j \subset \mathbb{C}$ nyílt, és legfeljebb egy D_j nem egyszeresen összefüggő.

18.5. *Megjegyzés.* Az előfordulhat, hogy van holomorfan nemtriviális vonalnyaláb, és mégis minden analitikus hiperfelület globálisan van definiálva.

18.6. *Példa.* Ilyenekre példa az előbbiekből az első három példa $n \geq 2$-re minusz egy pont, mert a függvénykiterjesztési tulajdonság teljesül holomorf vonalnyalábok szelésire.

18.7. *Megjegyzés.* A sima esethez teljesen hasonlóan látszik, hogy $E[A]$ egyértelmű, ha egy másik nyalábnak van szelése ami A-t kivágja, akkor az holomorfan izomorf $E[A]$-val.

A következőkben a Chow tétel felé kezdünk el tekinteni.

18.8. Definíció. $\hat{X} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ egy kúp, hogyha $z \in \hat{X}$-ből következik, hogy $\lambda x \in \hat{X},\ \lambda \in \mathbb{C}$, ergo komplex egyenesek uniója.

18.9. *Példa.* $X \subset P^n$, és volt a $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to P^n$ vetítésünk, $z \mapsto [z]$, akkor $\pi^{-1}(X) \cup \{0\}$ kúp lesz.

18.10. Lemma. *Legyen $\hat{X}$ egy kúp $\mathbb{C}^{n+1}$-ben, és adott $f \in {}_{n+1}\mathcal{O}_0$, tekintsük a homogén sorfejtését $f = \sum p_\nu$ (p_ν egy ν-homogén polinom). Tegyük fel, hogy létezik $\epsilon > 0$, hogy $f|_{B_\epsilon(0)\cap\hat{X}} \equiv 0$, akkor $\hat{X} \subset Z(p_\nu)$ minden ν-re.*

Bizonyítás. Választunk a $B_\epsilon(0)$ golyóban egy pontot, ami $\hat{X}$-ben is benne van, tekintsük a rajta átmenő komplex egyenest, és vegyük $\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1$, tehát $\lambda z \in \hat{X} \cap B_\epsilon(0)$. A $\lambda \mapsto f(\lambda z)$ leképezés azonosan nulla feltevés szerint, ugyanakkor a sorfejtésbe beírva látjuk, hogy megegyezik $\sum \lambda^\nu p_\nu(z)$-vel, ez egy hatványsor λ-ban, ami az azonosan nulla függvényt állítja elő, ergo az együtthatói mind azonosan nullák, és így $p_\nu(z) = 0$. Mivel $\hat{X}$ egy kúp, p_ν el kell hogy tűnjön nem csak a kis környezetben, hanem az egész egyenesén z-nek, és így az egész $\hat{X}$-en. □

A Chow-tétel két nemtriviális komponenséből az egyik a

19.1. Lemma (Cartan-Remmert-Stein)**.** *$A \subset \mathbb{C}^{n+1}$ egy analitikus kúp, akkor A affin algebrai, sőt véges sok homogén polinom vágja ki.*

Bizonyítás. A az origó egy környezetében is analitikus, tehát léteznek $\{f_j\}_1^k \subset \mathcal{O}(B_\epsilon(0))$ úgy, hogy $A \cap B_\epsilon(0) = \cap_1^k Z(f_j)$. Felírhatjuk az f_j függvények sorfejtését, mint homogén polinomok összege minden fokra $f_j = \sum p_\nu^j$, és a lemma miatt $p_\nu^j|_A \equiv 0$.
Megmutatjuk, hogy nem bővebb a zéróhalmaz. Ha $q \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus A$, vegyünk $r > 0$-t, hogy $rq \in B_\epsilon(0) \setminus A$, ezért létezik f_j amire $f_j(rq) \neq 0$, ezért van p_ν^j ugyanezzel a tulajdonsággal, és mivel a polinom homogén $p_\nu^j(rq) = r^\nu p_\nu^j(q)$, és így $q \notin Z(f_j)$, és A-t előállítottuk végtelen sok homogén polinom nullhalmazaként, és a polinomgyűrű Noetherségét használva véges sok is generálni fogja. □

A másik fontos komponens a következő állítás, amit nem biznyítunk.

19.2. Tétel (Remmert-Stein egy változata)**.** *$A \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ analitikus, izolált pont nélküli, akkor $\tilde{A} = A \cup \{0\}$ analitikus $\mathbb{C}^{n+1}$-ben.*

19.3. Tétel. *$A \subset P^n$ analitikus, akkor projektív algebrai, azaz homogén $n+1$ változós polinomok vágják ki.*

Bizonyítás. Tekintsük a $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} P^n \supset A$ vetítést, legyen $\tilde{A} = \pi^{-1}(A)$, ez egy analitikus halmaz, izolált pontja sincs, tehát hozzávéve az origót is analitikus halmazt, sőt kúpot kapunk az előző tétel fényében.
Most pedig a CRS lemma szerint találunk véges sok homogén polinomot, ami kivágja $\tilde{A} \cup \{0\}$-t, és így a projektivizáltját is. □

And now, for something completely different. Két nagyon érdekes dolog van hátra:

I) A Mittag-Leffler feladat. Ha adott $a_j \in \mathbb{C}$ nem torlódó pontsorozat, és minden pontban elő van írva egy $h_j = \sum_1^N \frac{c_\nu^j}{(z-a_j)^n u}$ szingularitás, a feladat találni egy $m \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ meromorf függvényt, aminek a pontban az előírt szingularitása van, mindenhol máshol pedig holomorf.

Ha véges sok van, akkor könnyen megy, csak összeadjuk a h_j-ket, de végtelen sok pont esetén nem kell, hogy a $\sum h_j$ sor konvergens legyen (ennek ellenére a feladat mindig megoldható, csak több munkát igényel).
Nem világos, hogy több dimenzióban mit is lehetne csinálni, hiszen nincs izolált szingularitás. Átfogalmazzuk a feladatot, lokálisan a feltétel azt mondja, hogy lokálisan $m - h_j$ holomorf kell legyen valami kis $a_j \in U_j$ környezetben (ahol $U_j \cap A = \{a_j\}$), és $h_j - h_k$ holomorf $U_j \cap U_k$-n, hívjuk ezeket h_{jk}-nak.

Ezzel az átfogalmazásunk a következő. Adott m_j meromorf függvény U_j-n, hogy $m_j - m_k$ holomorf $U_j \cap U_k$-n. A feladatunk találni egy globális meromorf m függvényt, hogy $m - m_j \in \mathcal{O}(U_j)$.

19.4. Definíció. X komplex sokaság, $A \subset X$ analitikus hiperfelület, m egy meromorf függvény X-en, hogyha $m : X \setminus A \to \mathbb{C}$ egy becsületes függvény, és

$$\forall p \in X \ \exists p \in U \subset X, \ g, h \in \mathcal{O}(U) : Z(h) \subset A \cap U, m|_{U \setminus A} = g/h$$

19.5. *Megjegyzés.* $m_1, m_2 \in \mathcal{M}(X)$, akkor az összegük, különbségük, szorzatuk is meromorf. Vannak azonban új jelenségek, $\mathbb{C}^2$-n vehetjük a z/w függvényt ami a $\{w = 0\}$ koordinátatengelyen nem értelmes. Ha $0 \neq z_0 \in \mathbb{C}$ és tartunk $(z, w) \to (z_0, 0)$-hoz, akkor a függvény értéke egyszerűen felrobban, ebben nincs semmi meglepő, ugyanakkor ha az origóhoz tartunk, ott nem létezik limesze. Az ilyen pontokat határozatlansági pontnak hívjuk, ilyet nem láttunk egy változóban.

Ha X egy komplex sokaság, m meromorf függvény, és $A \subset X$ analitikus hiperfelület, $p \in A$ akkor vagy

a) létezik egy $X \supset U \ni p$ nyílt hogy m_U korlátos Ebben az esetben a Riemann kiterjesztési tétel beterjeszti p-be is m-et.

b) vagy nem létezik ilyen környezet. Ilyenkor mi történik? Minden $n \in \mathbb{N}$ és minden p-t tartalmazó V környezetre létezik $q \in V$ hogy $|m(q)| > n$. Ha V elég kicsi akkor $V \setminus A$-n $m = g/h$ két holomorf függvény hányadosa. A feltétel miatt tudjuk hogy $h(p) = 0$, egyszerűsítés miatt feltehető, hogy $(g, h) = 1$ a csiragyűrűben. Két dolog történhet:

   - $g(p) \neq 0$. Ebben az esetben kovetkezik hogy $\lim_p |m| \to \infty$, és ekkor p-t pólusnak nevezzük.
   - $g(p) = 0$ esetben pedig azt mondjuk, hogy p határozatlansági pont.

19.6. Állítás. *Ha p határozatlansági pont, akkor $\forall c \in \mathbb{C}$ létezik $x_\nu \to p$ pontsorozat, és $m(x_\nu) \to c$.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy g_p, h_p relatív prímek, ezért $g_p - ch_p$ és h_p is relatív prímek. A gyenge nullstellensatz miatt $C := Z(g - ch) \neq Z(h) =: B$ mint analitikus halmazcsira. Mivel nem egyelőek a különbségük nem üres lokálisan sem, vegyünk $C \cap B_\epsilon(0) \setminus B$-ben egy origóba torlódó pontsorozatot, ott $g - ch = 0$, de $h \neq 0$, tehát m értelmes. Átírva $g(x_\epsilon)/h(x_\epsilon) = c$ és nyertünk. □

19.7. Definíció. Azon pontok $P(m)$ halmazát, ahol m nem korlátos poláris halmaznak nevezzük, ez tehát a póluspontok és a határozatlansági pontok halmazainak uniója.

19.8. Állítás. *A poláris halmaz egy analitikus hiperfelület.*

Bizonyítás. Ha $p \in X \setminus A$, akkor $p \notin P(m)$.
Ha $p \in A$, vegyünk körülötte egy környezetet ahol $m = g/h$ a csiragyűrűben relatív prím lokális holomorf függvények hányadosa. m korlátossága p egy környezetében, ekvivalens egy $\phi \in \mathcal{O}_p$ létezésével, hogy $g = \phi h$, ami azt jelenti, hogy $h_p | g_p$, de mivel relatív prímek, ez azt jelenti hogy h_p egység, azaz $h(p) \neq 0$, vagyis $P(m) \cap U = Z(h)$
$H(m) = Z(g) \cap Z(h)$ □

19.9. Tétel (unicitás meromorf függvényekre)**.** *X összefüggő komplex sokaság, m egy meromorf függvény, és létezik egy nemüres nyílt U hogy $m|_{U \setminus A} \equiv 0$, akkor $P(m) = \emptyset$ és $m \equiv 0$.*

Bizonyítás. $P(m)$ analitikus hiperfelület (vagy üres), minden esetre a komplementere összefüggő. $U \setminus A$ nyílt $X \setminus P(m)$-ben és itt az $m \in \mathcal{O}(X \setminus A)$ függvény azonosan eltűnik, tehát az egész $X \setminus A$-n azonosan eltűnik, tehát mindenhol korlátos, és a poláris halmaza üres. □

19.10. *Példa.* $f, g \in \mathcal{O}(X)$, ahol $g \not\equiv 0$, akkor f/g meromorf.
P, Q homogén d-fokú, $n+1$ változós polinomok akkor P/Q meromorf P^n (sőt minden függvény ilyen alakú). Egy $L \to X$ vektornyalábnak vehetjük két szelését s_1, s_2 ahol s_2 nem azonosan nulla, akkor s_1/s_2 egy becsületes függvény lesz, csak nem minden pontban, meromorf. Sőt nyalábnak lehet meromorf szeléseiről is beszélni.

A Cousin I feladatot az előbb már feldobtuk. Legyen X komplex sokaság, U_α egy nyílt fedése, és legyenek m_α meromorf függvények U_α-n és minden α, β indexre $h_{\alpha\beta} := m_\alpha - m_\beta \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta)$. Keressünk m globális meromorf függvényt, hogy minden α indexre $m - m_\alpha$ holomorf U_α-n.

19.11. Állítás. *C.I. feladat megoldható pontosan akkor, hogyha léteznek $f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ függvények amikre szintén $h_{\alpha\beta} = f_\beta - f_\alpha$.*

Bizonyítás. Ha a feladat megoldható, akkor $f_\alpha = m - m_\alpha$ megfelelő lesz, innen látjuk hogy a különbségvétel sorrendje felcserélődik.
Ha léteznek ilyen holomorf f_α függvények, akkor $h_{\alpha\beta} = m_\alpha - m_\beta = f_\beta - f_\alpha$, és átrendezve $m_\alpha + f_\alpha = m_\beta + f_\beta$ és így az $m_\alpha + f_\alpha$ függvények összeragadnak egy globális meromorf függvénnyé. □

Múltkor elkezdtük a Mittag-Lefler feladatot, $\mathbb{C}$-n mindig lehet csinálni előírt pontban előírt szingularitással rendelkező függvényt (ha apontsorozat nem torlódik, és a szingularitások véges rendűek), majd átfogalmaztuk, és általánosítottuk. $A = \{a_j\} \subset \mathbb{C}$ lényegében egy analitikus halmaz, $\mathbb{C} \setminus A$ és az a_j-k kis környezetei egy nyílt fedést adnak, meromorf függvényeket veszünk a környezeteken úgy, hogy a különbségük holomorf legyen ahol értelmes, így adódott a Cousin I. feladat.
X komplex sokaság, $U = \{U_\alpha\}$ nyílt fedés és $m_\alpha \in \mathcal{M}(U_\alpha)$ meromorf függvények amikre $m_\alpha - m_\beta \in \mathcal{O}(U_\alpha, \cap U_\beta)$, keressünk globális $m \in \mathcal{M}(X)$ függvényt, hogy $m - m_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$. Láttuk múltkor hogy ekvivalens a feladat megoldása azzal, hogy az $m_\alpha - m_\beta$ függvényeket holomorf függvények különbségeként előállítjuk.

20.1. Definíció. X komplex sokaság, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ nyílt fedése. Definiáljuk a 0-kolánc fogalmát, ez egyszerűen egy-egy holomorf függvény a fedő nyíltakon. $\forall \alpha \in I : f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ Ezeknek a halmazát $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O})$, két koláncot nyilvánvalóan össze tudunk adni, így ez egy[1] Abel csoport lesz, sőt vektortér és gyűrű is[2].
Holomorf 1-kolánc:$\forall \alpha\beta \in I : f_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta)$, egy-egy holomorf függvény a kettős metszetein, ezek halmaza meglepő módon $C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$.

Alapvető kérdés, hogy egy 0-kolánc mikor definiál egy globális holomorf függvényt? Látványos, hogy ez ekvivalens azzal, hogy $\forall \alpha\beta \in I : f_\beta - f_\alpha \equiv 0$ a metszeten, nyilván ekkor ragadnak össze. Ezt átfogalmazhatjuk egy kicsit, létezik egy $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \xrightarrow{\delta_0} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ leképezés, $\delta_0 : \{f_\alpha\} \mapsto \{f - \beta - f_\alpha\}$. Láttuk, hogy egy 0-koálnc pontosan akkor definiál globális holomorf függvényt, hogyha $\delta\xi = 0$. Jelöljük $Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{O})$-val $ker\delta_0$-al, ők a holomorf 0-kociklusok.
The ride never ends, holomorf 2-koláncok. $\{\xi_{\alpha\beta\gamma}\}$, ahol $\xi_{\alpha\beta\gamma} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma)$, a halmazuk $C^2(\mathcal{U}, \mathcal{O})$.

[1] "bődületesen nagy"
[2] $\mathbb{C}$-algebra

Újabb átfogalmazás. X komplex sokaság, $\mathcal{U}$ nyílt fedés, $m_\alpha \in \mathcal{M}(U_\alpha)$ meromorf függvények, a külömbségeik $h_{\alpha\beta} = m_\alpha - m_\beta$ egy holomorf 1-kolánc az új nyelvezetben. Ha létezik egy η holomorf 0-kolánc, melyre $\delta_0 \eta = \{h_{\alpha\beta}\}$, akkor a Cousin I. megoldható, mint a múlt órán megbeszéltük.
Ezek nem akármilyen koláncok, $h_{\alpha\alpha} = 0$, illetve $h_{\beta\alpha} = -h_{\alpha\beta}$, és végül ha van három nyíltunk látjuk, hogy $h_{\alpha\beta} + h_{\beta\gamma} + h_{\gamma\alpha} = 0$ teljesül. Ezen három tulajdonságot megfogalmazhatjuk úgy is egyszerűen, hogy

$$\forall \alpha\beta\gamma \in I : h_{\alpha\beta} + h_{\beta\gamma} + h_{\gamma\alpha} = 0$$

Most definiáljuk a $\delta_1 : C^1 \to C^2$ leképezést[3] a következő módon: $\xi = \{\xi_{\alpha\beta}\} \mapsto \{\xi_{\alpha\beta} + \xi_{\beta\gamma} + \xi_{\gamma\alpha}\}$.
Látjuk, hogy a Cousin I.-ből kapott feltételünk elkódolódik $\delta_1 \xi = 0$-vá. Most definiálhatjuk az 1-kociklusokat, mint a $Z^1 = ker\delta_1$. A δ_i-k képeit kohatárnak nevezzük. A képet $Im\delta_i = B^i$-vel jelöljük, illetve $B^0 := 0$-t definiáljuk. Az előbbi megfontolások azt jelentik röviden, hogy $\delta_1 \circ \delta_0 = 0$.

20.2. Definíció. $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) := Z^1/B^1$.

Ezen a nyelve mostmár végleg átfogalmazhatjuk a Cousin I. feladatot, mint láttuk, ez megoldható pontosan akkor, hogyha az $\{m_\alpha - m_\beta\} = \xi$ kociklus a nullát reprezentálja H^1-ben.

20.3. *Példa.* Legyen $X = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$, két elemű fedésünk lesz. $U_j = \{(z_1, z_2) : z_j \neq 0\}$ nyílt fedés. A Cousin I.-hez az inputunk $m_1 = \frac{1}{z_1 z_2}$ és $m_2 = 0$. Ez jó input, a metszeten a $\frac{1}{z_1 z_2}$ függvény valóban holomorf. Állítjuk, hogy ebben az esetben nem lehet megoldani!

Bizonyítás. Indirekten járunk el, legyen $h = m - \frac{1}{z_1 z_2} \in \mathcal{O}(U_1)$, és így U_1-ben $f = z_2 m = z_2 h + \frac{1}{z_1}$, ebből $f(z_1, 0) = 0 + \frac{1}{z_1}$ ami nullához tart, ahogy z_1 nullába megy??? □

21.1. *Megjegyzés.* Mi lenne ha holomorf helyett sima kategóriában próbálkoznánk? X sima sokaság, $\mathcal{U}$ nyílt fedés, tekinthetjük a sima függvények kévéjét, ami valóban kéve lesz. Ugyanez a program végigmegy, definiáljuk a kohatárleképezéseket, a koláncokat és az első kohomológiacsoportot.

21.2. Tétel. $H^1(\mathcal{U}, C^\infty) = 0$

Bizonyítás. Egységosztás. □

21.3. Tétel (H. Cartan)**.** *Ha X Stein, akkor $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = 0$*

21.4. Tétel. $H^1(P^n, \mathcal{U}, \mathcal{O}) = 0$

Ezeket alkalmazzuk most.

21.5. Tétel. *X komplex sokaság, tegyük fel, hogy minden fedésére $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = 0$. Legyen $A \subset X$ analitikus hiperfelület és ϕ minimális definiáló függvénye, továbbá $f : A \to \mathbb{C}$ holomorf leképezés. Ekkor f holomorfan kiterjed X-re.*

Bizonyítás. $p \in X \setminus A, p \in U_p, U_p \cap A \neq \emptyset$, $f_p \equiv 0$, ha $p \in A$, akkor U_p, f_p az feltételből adott. Minden p-re $m_p := \frac{f_p}{\phi} \in \mathcal{M}(U_p)$, ha U_p, U_q nem metszik A-t, akkor nyilván $m_p - m_q$ holomorf, hasonlóan hogyha csak U_p metszi A-t. Végül ha A belelóg a metszetbe, akkor $m_p - m_q = \frac{f_p - f_q}{\phi}$, és ez $A \cap U_p \cap U_q$-ra megszorítva azonosan nulla. Mivel ϕ minimális definiáló függvény volt, így $m_p - m_q$ holomorf $U_p \cap U_q$-n, ezzel kapunk egy ciklust $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$-ban, feltevés szerint az első homológia eltűnik minden fedésre, tehát létezik egy $\{h_p\}$ 0-ciklus, melyre $h_q - h_p = m_p - m_q = \frac{f_p}{\phi} - \frac{f_q}{\phi}$. Átrendezve $f_q + \phi h_q = f_p + \phi h_p$, ezek összeragadnak egy globális holomorf függvénnyé. □

[3] $C^i = C^i(\mathcal{U}, \mathcal{O})$

A Weierstrass feladat $n = 1$-re a következő: adott egy $A = \{a_j\} \subset \mathbb{C}$ nemtorlódó pontsorozat, és $n_j \in \mathbb{N}$ egész számok, keresünk egy holomorf függvényt, aminek n_j rendű nullhelye van a_j-ben. Általánosabb Weierstrass feladat, A mint előbb, $n_j \in \mathbb{Z}$ és keresünk egy meromorf függvényt aminek n_j rendű nullhelye van ha $n_j > 0$, és $-nj$ rendű pólusa ha negatív. Világos, hogy a két feladat ekvivalens, vegyük $A^+ = \{a_j : n_j > 0\}$, és hasonlóan A^--t, ezeken megoldva a Weierstrass feladatot a két megoldás hányadosa megoldja az általánosat. Tovább akarjuk általánosítani ezt, de előbb $n = 1$. Legyen $\{U_\alpha\}$ nyílt fedése $\mathbb{C}$-nek, $U_\alpha \cap A$ véges, $f_\alpha = \prod_{b_j \in U_\alpha \cap A}(z-b)^{n_j}$. Ha $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, akkor $\frac{f_\alpha}{f_\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$. Az általános Weierstrass feladat megoldása olyan $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) : \frac{f}{f_\alpha} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$.
A Cousin II feladat: adott X komplex sokaság, $\mathcal{U}$ nyílt fedés és mindegyik nyílton egy f_α meromorf függvény úgy, hogy a hányadosok nem-nulla holomorf függvényeket adnak meg a metszeteken. Keresünk egy globális meromorf függvényt, amire $\frac{f}{f_\alpha} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$ minden α-ra.

21.6. Tétel. *Cousin II megoldható pontosan akkor, hogyha minden α-ra létezik $g_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$ és $g_{\alpha\beta} = \frac{g_\beta}{g_\alpha}$.*

Bizonyítás. '$\to$' ha létezik f globális meromorf megoldás, akkor $g_\alpha := \frac{f}{f_\alpha}$ megfelelő.
'$\leftarrow$' ha $\frac{f_\alpha}{f_\beta}/g_{\alpha\beta} = \frac{g_\beta}{g_\alpha}$, akkor $f_\alpha g_\alpha = g_\beta f_\alpha$, és összeragadnak. □

Definiálhatunk analóg objektumokat, $C^i(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$, és leképezéseket, $\delta_0 : \{f_\alpha\} \mapsto \frac{f_\beta}{f_\alpha}$ és $\delta_1 : \{f_{\alpha\beta}\} \mapsto \frac{f_{\beta\gamma} f_{\alpha\beta}}{f_{\alpha\gamma}}$. Számolással látszik, hogy $\delta_1 \circ \delta_0 \equiv 1$. Egy $\{f_\alpha\}$ 0-ciklusra $\delta_0\{f_\alpha\} = 1$ pontosan akkor, hogyha összeragad egy globális nem-nulla fügvénnyé. $ker\delta_1$-et is meghatározhatjuk, a szokásos kociklusfeltétel szorzásos verziója adódik $f_{\alpha\beta} f_{\beta\gamma} f_{\gamma\alpha} = 1$ minden indexhármasra. Ebből definiáljuk $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$-t. A Cousin II feladat adatai egy fedéshez egy 1-kociklust ad meg, az előző tétel azt mondja ki, hogy a feladat megoldható ponosan akkor hogyha ennek az 1-kociklusnak a kohomológiaosztálya az 1.
Vegyük észre, hogy egy $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ elemhez konstruálhatunk egy $L \to X$ vonalnyalábot, ha a kociklus elemeit mint ragasztófüggvények értelmezzük (a kociklusfeltétel pont ezt mondja ebben az esetben).

21.7. Definíció. Egy meromorf szelése $L \to X$-nek egy $m_\alpha \in \mathcal{M}(U_\alpha)$ rendszere meromorf függvényeknek, amik összeragadnak szeléssé, vagyis $m_\alpha = g_{\alpha\beta} m_\beta$.

Tehát a Cousin II feladatot megfogalmazhatjuk úgy is, hogy egy X komplex sokaság fölött adott egy L holomorf vonalnyaláb, a feladat megoldható hogyha ez a nyaláb holomorfan triviális. Vissza akarjuk vezetni Cousin I-re, de ez nem elég, szükségünk van egy topologikus feltételre:

21.8. Tétel (Serre)**.** *X komplex sokaság, $\mathcal{U}$ nyílt fedés, a kettes metszetek összefüggőek és egyszeresen összefüggőek, ha nem üresek (az ilyeneket hívjuk egyszerű fedésnek). Ha $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = 0$ és $H^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) = 0$, akkor minden $\mathcal{U}$-hoz tartozó Cousin II feladat megoldható (azaz $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*) = 0$).*

Kis kitérő: a $\mathbb{Z}$ kéve definíciója.

21.9. Lemma. *Minden X sima sokaságon van egyszerű fedés.*

Veszünk egy g Riemann-metrikát, és az U_α-kat konvexnek erre a metrikára nézve megfelelő lesz.
Tény: $H^s(X, \mathbb{Z}) = 0$ akkor $H^s(U, \mathbb{Z}) = 0$.

Tétel bizonyítása. f_α meromorf U_α-n, $h_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$. Adott továbbá $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta)$. $e^{2\pi i g_{\alpha\beta}} = h_{\alpha\beta}$, és feltehetjük, hogy $g_{\beta\alpha} = -g_{\alpha\beta}$.

$$1 = h_{\alpha\beta} h_{\beta\gamma} h_{\gamma\alpha} = e^{2\pi i (g_{\alpha\beta} + g_{\beta\gamma} + g_{\gamma\alpha})}$$

Ezzel kapunk egy elemet $k_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\beta} + g_{\beta\gamma} + g_{\gamma\alpha} \in Z^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$. Mivel $H^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) = 0$, így létezik $\xi \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$, amire $\delta\xi = k$, ergo $k_{\alpha\beta\gamma} = \xi_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha\gamma} + \xi_{\beta\gamma}$. Legyen $\tilde{g}_{\alpha\beta} := g_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta)$. A hármas metszeten ξ konstrukciója miatt $\tilde{g}_{\alpha\beta} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$, de ez a csoport feltevés szerint nulla, tehát létezik $\eta \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ amire $g_{\alpha\beta} = \delta\eta$. Legyen $\sigma_\alpha := e^{2\pi i \eta_\alpha} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$. Ezekre $\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha} = e^{2\pi i \tilde{g}_{\alpha\beta}} = e^{2\pi i g_{\alpha\beta}} = h_{\alpha\beta}$.[1] □

22.1. Definíció. Legyen X egy topologikus tér, $\mathcal{U}$ a nyílt halmazai. Abel csoportok előkévéje egy leképezés, amely minden $U \in \mathcal{U}$ nyílthoz egy $\mathcal{F}(U)$ Abel-csoportot rendel hozzá, és teljesül a következő feltétel.
Ha $U \subset V \in \mathcal{U}$ egy másik nyílt, akkor létezzen egy $r_{UV} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ homomorfizmus, és ezek teljesítsék a következő axiómákat:

1. $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$
2. $r_{UU} = id$
3. $U \subset V \subset W$ nyíltak, akkor $r_{UV} \circ r_{VW} = r_{UW}$

22.2. *Megjegyzés.* Lehetne más algebrai struktúrákkal is előkévét definiálni, test, (kommutatív) gyűrű, algebra, vektortér, modulus...

22.3. *Példa.*

1. X toptér, és $\mathcal{F}(U) = C(U, \mathbb{R})$ a valós értékű folytonos függvények, és a közönséges megszorítással mint leképezéssel
2. X difható sokaság, vehetjük $\mathcal{F}(U) = C^\infty(U, \mathbb{R})$-et szintén a szokásos megszorítással mint homomorfizmussal (vehetnénk akár valamely C^k függvényeket is)
3. X komplex sokaság, $\mathcal{F}(U) = \mathcal{O}(U)$, szintén a sima megszorítással egy újabb előkévét ad
4. X egy sima sokaság, $E \to X$ sima vektornyaláb, akkor $\mathcal{F}(U) = \Gamma(U)$ a sima széleséket rendelve hozzá kapjuk vektorterek egy előkévéjét
5. X komplex sokaság, $E \to X$ holomorf vektornyaláb $\mathcal{F}(U) = H^0(U)$ szintén egy előkéve
6. X komplex sokaság, $A \subset X$ analitikus részhalmaz, $\mathcal{F}(U) = \{f \in \mathcal{O}(U) : f|_{A\cap U} \equiv 0\} \lhd \mathcal{O}(U)$ egy ideál-előkéve
7. X komplex sokaság, $\mathcal{F}(U) = \mathcal{O}^*(U)$ (multiplikatívan persze) Abel-csoportok előkévéje a standrad függvény-megszorítással
8. X komplex sokaság, $\mathcal{F}(U) = \mathcal{M}(U)$ gyűrű (illetve ha U öf, akkor test) előkéve
9. $K \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, X egy toptér és $\mathcal{F}(U) = \{U \to K|$ lokálisan konstans $\}$
10. X komplex sokaság, $\mathcal{F}(U) = \{f \in \mathcal{O}(U) : f$ korlátos $\}$
11. X komplex sokaság, $\mathcal{F}(U) = \{f/g : f, g \in \mathcal{O}(U), g \not\equiv 0\ U$ minden komponensén$\}$

22.4. Definíció. Legyen X topologikus tér, és adott rajta egy $\mathcal{F}$ előkéve. Ekkor $\mathcal{F}$ kéve, hogyha adott $\{U_\alpha\}$ nyíltaknak egy rendszere, $U = \cup\{U_\alpha\}$,

4. $f, g \in \mathcal{F}(U)$-ra teljesül, hogy $\forall\alpha : r_{U_\alpha U}(f) = r_{U_\alpha U}(g)$, akkor $f \equiv g$

[1] ξ egészértékű

5. $\forall \alpha\ f_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ és $\forall \alpha\beta$ teljesül hogy $r_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\alpha}(f_\alpha) = r_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\beta}(f_\beta)$, akkor $\exists f \in \mathcal{F}(U) : r_{U_\alpha U}(f) = f_\alpha$

22.5. *Példa.* Az előbbiekből $1-9$ mind kéve. A tizedikben ha egy függvény kis nyíltakon korlátos, attól még nem lesz az unión is az, tehát ez nem kéve. Végül a tizenegyesnél ha a terünk például P^n, két azonos fokú homogén polinom hányadosaként globálisan nem ragadnak össze, csak konstans polinomjaink vannak. Egy további perverz példa:

12. X topologikus tér, $\mathcal{F}(U) = K$ ha U nemüres, 0 ha üres szintén egy előkéve

Azonban nem lesz kéve, ha U nem összefüggő nem teljesül a kiterjesztési tulajdonság

Emlékezzünk meg a holomorf függvénycsirákról. Ha X megintcsak egy komplex sokaság, $\mathcal{O}_x$ jelölte az $x \in X$ pontban a függvénycsirák halmazát. Jelöljük $qmathcalO := \sqcup_X \mathcal{O}_x$, van egy természetes projekció innen X-be, ami egy csirához a talppontját rendeli.
X toptér, $\mathcal{F}$ egy előkéve rajta, ehhez az információhoz fogunk rendelni egy $\mathcal{F} \xrightarrow{\pi} X$ objektumot.

22.6. Definíció. $x \in X$, $x \in U, V$, $f \in \mathcal{F}(U)$, $g \in \mathcal{F}(V)$-hez azt mondjuk, hogy $(U, f) \sim (V, g)$, hogyha létezik egy $W \subset U \cap V$ nyílt, hogy $r_{WU}(f) = r_{WV}(g)$. Ez látványosan egy ekvivalenciareláció, az osztályokat nevezzük x-beli csiráknak és $\mathcal{F}_X$-el jelöljük, továbbá $\mathcal{F} := \sqcup_X \mathcal{F}_x$, a természetes projekció is átmegy teljesen azonos módon.
Ezen a téren van egy topológia. Ha $U \subset X$ nyílt, és $f \in \mathcal{F}(U)$-hoz rendeljük $\tilde{U}_f = \{f_q \in \mathcal{F}_q : q \in U\}$-t, ezek lesznek a bázisa a topológiának $\mathcal{F}$-en.

Emlék, volt X toptér és definiáltuk az előkéve és a kéve fogalmát. Egy $\mathcal{F}$ (elő)kéve X minden nyíltjához egy Abel csoportot (vagy valami más algebrai struktúrát) rendel, és a tartalmazásokhoz természetes módon tartozik egy-egy homomorfizmus analóg módon a függvények megszorításával. Két ragasztási tulajdonság különbözteti meg a kévéket az előkévéktől, pl a korlátos függvények előkévéje nem kéve. Megkonstruáltuk a lokális gyűrűvel analóg módon a kocsányát egy kévének, illetve a kocsányokból egy topologikus teret is.

23.1. Állítás. *A vetítés $\mathcal{F} \xrightarrow{\pi} X$ lokális homeomorfizmus, és $\mathcal{F}_x$ indukált topológiája diszkrét.*

Bizonyítás. HF □

23.2. *Megjegyzés.* Ne gondoljuk, hogy ez valamiféle lokálisan triviális fibrálás, a rostok össze vissza lehetnek, nem izomorfak semmilyen értelemben.
Továbbá a konstrukció megy visszafelé is, ha adott $\mathcal{F} \xrightarrow{\pi} X$, ahol X toptér, π lokális homeomorfizmus (szürjektív), minden fibrumon adott egy Abel csoportstruktúra, a műveletek folytonosak[1], akkor hozzárendelhetjük az $X, \mathcal{F}$ párhoz az $\hat{\mathcal{F}}(U) := \{s : U \to \mathcal{F} :$ folytonos szelés $\}$ kévét rendeljük a standard megszorítással mint homomorfizmusokkal, látványosan kévét kapunk.
Vegyük észre, hogy a topologikus tér konstrukciójához nem használtuk a kévetulajdonságot, azonban a topteres konstrukcióból visszacsinálva már igen, ezt hívjuk kévésítésnek.
Ezek az $\mathcal{F}$ kévék nagyon furcsa topológiával bírnak, például nem mindig Haussdorfak.

23.3. *Példa.* Vehetjük $X = \mathbb{R}$, és a folytonos függvények kévéjét. Tekintsük az $f = x1_{x>0}$ függvényt, és a $g = 0$ függvényt, ezeket az $\mathcal{F}_0$-ban nem tudjuk szétválasztani.
Azonban ha X komplex sokaság, akkor $\mathcal{O} \to X$ T_2 lesz a holomorf függvények merevsége miatt![2]

[1] $s, t : X \supset U \to \mathcal{F}$ folytonos szelések, akkor legyen $s \pm t$ is folytonos
[2] thank god

Minden $p \in \mathcal{F}_x$ meghatároz egy lokális szelést a lokális homeomorfizmus tulajdonság miatt (ami tudni fogja azt, hogy $f(x) = p$).

23.4. Állítás. *Ha $\pi : \mathcal{F} \to X$ egy kéve, $x_0 \in U \subset X$ nyílt környezet, $s_j : U \to \mathcal{F}$ folytonos szelés $j = 1, 2$-re és $s_1(x_0) = s_2(x_0)$, akkor $s_1 \equiv s_2$ lokálisan.*

Bizonyítás. HF □

23.5. Következmény. *Ha $\mathcal{F} \in T_2$, X összefüggő és s_1, s_2 globális szelések amik egy pontban megegyeznek, akkor egyenlőek.*[3]

Ha X komplex sokaság, $\mathcal{F}(U) = M(U) = \{f/g : f, g \in \mathcal{O}(U), g \not\equiv 0\}$, hozzá a meromorf függvények kévéjét kapjuk, $\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{M}$.

23.6. Definíció. $(\mathcal{F}, \pi, X), (\mathcal{F}', \pi', X)$ két kéve X fölött. Kévék morfizmusa a következő: Egy $A : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ folytonos leképezés, ami

1. tartja a rostokat, $\mathcal{F}_x \to \mathcal{F}'_x$
2. ezek a megszorítások homomorfizmusok

Természetesen definiálható a kéve izomorfizmus fogalma.

23.7. Állítás. *Minden kévemorfizmus lokális homeomorfizmus.*

Bizonyítás. A projekciókkal egy kommutatív négyzetet kapunk, a két függőleges leképezés lok. homeom és kész vagyunk. □

23.8. Következmény. *A nyílt leképezés speciálisan, ezért $A(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}'$ nyílt, és minden x-re $A(\mathcal{F}_x) < \mathcal{F}'_x$, hiszen homomorfizmus.*

Ezeket fogjuk részkévének tekinteni.

23.9. Definíció. $\mathcal{F} \to X$ kéve, $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ nyílt és $\forall x$ $\mathcal{H} \cap \mathcal{F}_x < \mathcal{F}_x$ akkor $\mathcal{H}$-t részkévének nevezzük.

23.10. Állítás. *$A : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ kévemorfizmus, akkor imA részkéve $\mathcal{G}$-ben, a magja pedig részkéve $\mathcal{F}$-ben.*

Bizonyítás. A képre vonatkozó állítás világos, ez motiválta a definíciót.
Ha $y \in kerA$, választunk egy lokális szelést rajta keresztül, legyen ez s. $A \circ s$ egy lokális szelése $\mathcal{G}$-nek, és az értéke x-ben 0. Ezért ez a szelés lokálisan megegyezik a nullszeléssel[4]. Következményképpen $kerA$ is nyílt. □

Hogy néznek ki az előkévemorfizmusok? $(X, \mathcal{F}), (X, \mathcal{G})$ két előkéve, mit jelentene itt egy morfizmus? Minden U nyíltra kell egy $a_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ homomorfizmus, ami kompatibilis a megszorításokkal. Ha kévésítünk így valóban kapunk is egy kévemorfizmust ezekből az információkból, a mag is szépen fog viselkedni, $U \mapsto ker(a_U)$ egy kéve rögtön, azonban $u \mapsto im(a_U)$ csak előkéve lesz, a kévésítése persze pont az imA kéve lesz.
Ha X komplex sokaság vegyük rajta a $\mathbb{Z}$ az $\mathcal{O}$ és az $\mathcal{O}^*$ kévéket.

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathcal{O} \xrightarrow{exp} \mathcal{O}^* \to 0$$

Teljesül minden csirában látványosan, lokálisan tudunk logaritmust venni. Azonban ha ugyanezt a leképezést tekintjük valami U nyílton akkor már nem feltétlenül van logaritmusunk, nem lesz egzakt a sorozat, és így a képe csak előkéve lesz, nem teljesíti az 5. tulajdonságot.

[3] Általánosabban is, ha két szelés megegyezik, akkor ahol egyenlőek az egy nyílt halmaz

[4] a műveletek folytonosságára tett feltétel miatt a nullszelés mindig folytonos

23.11. Definíció. Legyen $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ egy részkéve, a faktorkéve az $U \mapsto \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ kévésítése lesz. A rostok egyszerűen a $\mathcal{G}_x/\mathcal{F}_x$ lesznek.

23.12. *Példa.* X komplex sokaság, $0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}/\mathcal{O} \to 0$, hogy néznek ki a lokális szelések? A faktorban lokálisan olyan ekvivalenciaosztályok vannak, hogy két meromorf függvény, amik különbsége egy holomorf, ez emlékeztet minket a Cousin I feladatra. Az ott kapott adatok pontosan megadnak az $\mathcal{M}/\mathcal{O}$ kévének egy folytonos szelését. A feladat maga azt kereste, hogy ez a globális szelés mikor jön a nagy $\mathcal{M}$ kéve egy globális szeléséből. Kapjuk a

$$0 \to H^0(\mathcal{O}) \xrightarrow{\iota_*} H^0(\mathcal{M}) \xrightarrow{q_*} H^0(\mathcal{M}/\mathcal{O})$$

egzakt sorozatot, a kérdés az, hogy van-e $m \in H^0(\mathcal{M})$, hogy $q_*m = p$?
Egy másik egzakt sorozattal operál a Cousin II: $\mathcal{O}^* < \mathcal{M}^*$, a faktort hívjuk $\mathcal{D}$-nek, a Cousin II adat ennek a kévének egy globális szelése. A kérdés megint csak az, hogy felírva az

$$0 \to \mathcal{O}^* \to \mathcal{M}^* \to \mathcal{D} \to 0$$

kévét ez minden roston egzakt, adott $p \in H^0(\mathcal{D})$, kérdés hogy létezik-e $m \in H^0(\mathcal{M}^*)$, hogy $q_*m = p$? Felírhatjuk ugyan azt a hosszú egzakt sor kezdeményt a globális szelésekre.
Hasonlóan felírhatjuk a globális széléseken indukált egzakt sort az exponenciális SESre is, és persze itt is értelmes kérdés, hogy az utolsó lépésben szürjektív-e vagy sem (ez kb a logaritmusfeladat).
Legyen X komplex sokaság, és $A \subset X$ analitikus részhalmaz. Vegyük az $I_a(U) = \{f \in \mathcal{O}(U) : f|_A \equiv 0\} \lhd \mathcal{O}(U)$ ideálkévét, és tekintsük a szerinte vett faktort. Itt két lokális függvény azonos, hogyha a különbségük nulla az A-n. Ebből kapjuk az $\mathcal{O}_A$

23.13. *Példa.* Ha $X = \mathbb{C}, A = \{0\}$, akkor kapunk egy $\mathbb{C}$ skyscrapert az origóban.

Emlék, egy toptér X és Abel csoportok három kévéje fölötte $\mathcal{F}, \mathcal{E}, \mathcal{G}$ és ezek alkossanak egy rövid egzakt sorozatot ebben a sorrendben, ami azt jelenti, hogy minden roston egzaktak. Az az általános kérdés, hogy egy adott U nyílton mi történik az egzaktsággal? Az injektivitás látványosan megmarad hiszen minden roston az volt, tehát az első helyen egzakt marad, illetve a második helyen, $\mathcal{E}$-ben is, viszont az utolsó pontban nem biztos, ezt szeretnénk vizsgálni, ezt vezettük be múlt órán az exponenciális egzakt sorral. Teljesen analóg setupot kaptunk a Cousin I és II feladatokkal. Előbbi esetben a holomorf és meromorf függvények kévéje, illetve ezek faktora volt a három kéve a természetes leképezésekkel, utóbbiban a nem-nulla holomorf és meromorf függvényekkel[1] csináltuk ugyanezt. Egy holomorf függvény kiterjesztése is példa erre a problémára, $A \subset X$ analitikus részhalmaz, akkor $I_A, \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_A$ szintén egy megfelelő kévehármast ad.[2] $\mathcal{O}_A$ folytonos szelései az $f : A \to \mathbb{C}$ holomorf függvények, emlékeztetünk, hogy $\mathcal{O}_A$ rostjai A-n kívül csak a nullából állnak.
Az általános setup

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E} \xrightarrow{\beta} \mathcal{G} \to 0$$

és ebből globálisan próbálunk kitalálni valamit. Mivel β szürjektív minden s széléshez lokálisan létezik ős, ami persze nem egyértelmű, de választunk egyet. Egy adott pontban választunk egy ilyen őst, neki van egy reprezentánsa egy kis környezetben $T_x \in \mathcal{E}(U_x)$, ezt lökjük előre β-val, azt látjuk, hogy $\beta \circ T_x$ és $s|_{U_x}$ megegyeznek egy pontban, tehát egy (esetleg szűkebb) környezeten megegyeznek. Tehát az s széléshez kaptunk egy nyílt fedést, és mindegyiken egy szelést úgy, hogy a képük β-nál pont s, azonban az nem világos, hogy

[1] Minden rost $\mathcal{O}_p \setminus \{0\}$, a művelet a pontonkénti szorzás, és nem az összeadás.
[2] az A ideálkévéje, a holomorf függvények, és az A struktúrakévéje

össze is ragadnának. Világos azonban hogy a metszeteken vett különbségük $ker\beta$-ban van, hiszen mindketten $s|_{V_x \cap V_y}$-t adják. Egzaktság miatt létezik $f_{xy} \in \mathcal{F}(V_x \cap V_y)$, amire $\alpha(f_{xy}) = T_x - T_y$ teljesül, ez az obrstukció arra, hogy összeragadjanak a T_x-ek egy konkrét szelésre, észrevesszük, hogy ez pont az 1-kolánc definíciója.

24.1. Definíció. Adott $\mathcal{F} \to X$ kéve, $\mathcal{V}$ nyílt fedés. $\mathcal{F}$-beli 0-koláncok egy-egy szelés a fedőrendszer elemein, az 1-kolánok a kettes metszeteken vett szelésekből állnak. Kapjuk megintcsak a δ_0 leképezést,

$$\{\xi_\alpha\} \mapsto \{(\xi_\beta|_{V_\alpha \cap V_\beta} - \xi_\alpha|_{V_\alpha \cap V_\beta})_{\alpha\beta}\}.$$

Az előbbi szituációhoz visszatérve az egzakt sorunk kiegészül a következő alakban:

$$0 \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{E}) \to H^0(X, \mathcal{G}) \to C^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

Itt az új leképezés az s szelésünkhöz az előbb konstruált $\{f_{xy}\}$ 1-koláncot rendeli

24.2. Állítás. *$\exists T \in \mathcal{E}(X) : \beta_* T = S$ pontosan akkor, hogyha létezik $\{f_x\} \in C^0(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, melyre $\delta_0\{f_x\} = \{f_{xy}\}$*

Bizonyítás. '$\to$' Mivel $\beta_* T = \beta \circ T = S$ feltevés szerint, ezért $\beta \circ (T|_{V_x} - T_x) = 0$ hiszen a csirák x-ben megegyeznek, ezért lokálisan is. α injektív, tehát létezik $f_x \in \mathcal{F}(V_x)$, amire $\alpha(f_x) = T|_{V_x} - T_x$, ergo $T|_{V_x} = T_x + \alpha(f_x)$, és így egy $V_x \cap V_y$ metszeten $T_x - T_y = \alpha(f_y) - \alpha(f_x) = \alpha(f_{xy})$, α injektivitásából következik hogy $f_y - f_x = f_{xy}$.
'$\leftarrow$' Ha létezik a feltételnek megfelelő $f_x \in \mathcal{F}(V_x)$, akkor $\alpha(f_{xy}) = \alpha(f_y) - \alpha(f_x)$ a megfelelő metszeten, konstrukció szerint $T_x - T_y = \alpha(f_y) - \alpha(f_x)$, és így $T_x + \alpha(f_x)$ globális szelés. $\square$

A kapott obstrukció nem akármilyen 1-kolánc, ugyanúgy mint a múltkor kapjuk hogy 1-kociklus.

24.3. Következmény. *Létezik T globális szelés amire $\beta_* T = S$ pontosan akkor, hogyha a kohomológiaosztálya $= 0 \in H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, ezzel továbbmegy az egzakt sorozatunk.*

Hogyan lehetne ezt a szelések említése nélkül csinálni ezt? Először definiáljuk az általános p koláncokat. C^0, C^1 már volt, C^2-höz minden hármas metszeten kell választani szeléseket, s így tovább, a $p+1$-es metszeteken C^p-hez, kapunk Abel-csoportokat, és közöttük definiálunk leképezéseket. Ha $\xi \in C^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ akkor

$$(\delta_p \xi)_{\alpha_0, \dots, \alpha_{p+1}} \sum_{j=0}^{p} (-1)^j r \circ \xi_{\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_{p+1}}$$

Ahol r megszorítás a $\cap_0^p V_j$-re, a kalap az adott index kihagyását jelenti.

24.4. Állítás. *$\delta_{p+1} \circ \delta_p = 0$!*

24.5. Definíció. $ker\delta_p =: Z_p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ a p-kociklusok, továbbá a p kohomológiacsoportok a szokásos módon $ker\delta_{p+1}/im\delta_p$ alakban jönnek létre. Ezeket a $\mathcal{V}$ fedéshez tartozó Čech kohomológiacsoportoknak hívjuk.

$H^0(\mathcal{V}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ minden fedésre a globális szeléseket adja meg, mint azt láttuk.
Meg akarunk még szabaulni a $H^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ fedéstől való függésétől, ez egy "lokalizációs eljárással" történik. Egy X toptér nyílt fedésein van egy természetes részbenrendezés:

24.6. Definíció. Azt mondjuk hogy a $\mathcal{V}$ nyílt fedés az $\mathcal{U}$ fedés finomítása ($\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$), ha létezik az indexhalmazaik között egy $\rho : B \to A$ leképezés, melyre $V_\beta \subset U_{\rho(\beta)}$ teljesül.

Ha adott egy $\mathcal{F}$ kéve X fölött, és két nyílt fedés, akkor egy finomítás indukál egy természetes leképezést a Čech komplexusok között

$$\rho^* : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^p(\mathcal{V}, \mathcal{F}) : (\rho^*\xi)_{\beta_0,..,\beta_p} := \xi_{\rho(\beta_0),..,\rho(\beta_p)}|_{V_{\beta_0}\cap\ldots\cap V_{\beta_p}}.$$

Emlék, kéve rövid egzakt sorozatából hosszú egzakt sorozatot kezdtünk el gyártani globálisan. Minden rostban kapunk egy SESt, lokálisan választhatunk egy reprezentánst ami eltalál egy adott szelését a harmadik kévének, láttuk hogy két ilyen lokális visszahúzott a második leképezés magjában van, így az első leképezés injektivitás miatt eltalálja. Kapunk egy 1-kociklust és a $H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ csoporttal bővült az egzakt sorozatunk. Elkezdtünk megszabadulni a fedéstől való függéstől a fedések parciális rendezésével, és az általuk indukált leképezésekkel.

25.1. Állítás. $\delta_p\rho^* = \rho^*\delta_p$

Bizonyítás. Meggondolható. □

Ebből látjuk, hogy a kohomológiacsoportok között is egy $\rho^* : H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, ahol $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$.

25.2. Tétel. *ρ^* független a ρ leképezéstől.*

Bizonyítás. A lényeg, hogy ha van két különböző leképezés, ami mutatja a reláció fennállását, akkor az indukált leképezéseik kolánchomotópok lesznek, vagyis létezik $\sigma : C^{p+1}(\mathcal{U}) \to C^p(\mathcal{V})$ homomorfizmus, hogy $\sigma(\delta h) + \delta(\sigma h) = \tilde{\rho}h - \rho h$ minden $p+1$ koláncra. A leképezés expliciten

$$(\sigma h)_{\beta_0,\ldots,\beta_p} = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i h_{\rho(\beta_0),\ldots,\rho(\beta_i)\tilde{\rho}(\beta_i),\ldots,\tilde{\rho}(\beta_p)}$$

A bizonyítás standard számolás, $p = 0$-ra a jegyzetben megtalálható. □

Ezzel kapunk egy $\rho^*_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ homomorfizmust a durvább fedésből a finomabba, ami csak a fedésektől függ, az indexeléstől nem. Ezek a leképezések a finomításokra szépen viselkednek, $\mathcal{W} < \mathcal{V} < \mathcal{U}$, akkor $\rho^*_{\mathcal{U}\mathcal{W}} = \rho^*_{\mathcal{V}\mathcal{W}} \circ \rho^*_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ teljesül. Észrevesszük, hogy hasonló a helyzet a függvénycsirákhoz.

25.3. Definíció. X toptér, $\mathcal{F} \to X$ kéve $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ nyílt fedései X-nek, és vegyük $f \in H^p(\mathcal{U})$ és $g \in H^p(\mathcal{V})$ ekvivalensek, hogy ha létezik egy közös finomítása $\mathcal{W} \prec \mathcal{U}, \mathcal{V}$ és $\rho^*_{\mathcal{U}\mathcal{W}}(f) = \rho^*_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(g)$. Ez könnyen láthatóan ekvivalencia reláció.

25.4. Definíció. $\check{H}^p(X, \mathcal{F}) := \{$ekvivalencia osztályok a fenti értelemben$\}$ egy Abel-csoport. Ezt hívjuk $\mathcal{F}$ együtthatós Čech kéve kohomológia csoportnak.

Nagyon nehéz kiszámolni!

25.5. Tétel. *Ha X parakompakt T_2 topsokaság, akkor $H^{sing}(X, \mathbb{Z}) = \check{H}^*(X, \mathbb{Z})$. Hasonlóan a lokálisan konstans $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$ kévékkel.*

25.6. Következmény. *Ha X pontrahúzható, akkor $\check{H}^q(X, \mathbb{Z}) = 0 \forall q > 0$.*

25.7. Tétel (Leray)**.** *X parakompakt T_2 toptér, és egy $\mathcal{F}$ kéve fölötte, és egy speciális $\mathcal{U}$ fedés, melyre $\forall p \geq 0, q > 0$-ra ha $\hat{H}^q(\cap_0^p U_{\alpha_i}, \mathcal{F}) = 0$ teljesül, akkor $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \check{H}^p(X, \mathcal{F})$.*

25.8. Definíció. Ilyen fedéseket $\mathcal{F}$-hez tartozó Leray fedésnek hívják.

25.9. *Példa.* Ha X sima sokaság, és a kéve lokálisan konstans függvények kévéje, akkor mindig létezik ilyen fedés. Tudniillik tegyünk egy Riemann metrikát a sokaságunkra, diffgeóból tudjuk, hogy minden pontnak van (metrikus) konvex nyílt környezete, ilyenek metszete is ilyen és így a metszetek pontrahúzhatóak.

25.10. *Megjegyzés.* Ezzel ki tudjuk számolni a gömbök szinguláris kohomológiáját. Nem elég két diszket venni, mert ezek átlógnának az egyelítőn, nem lesz konvex, és a metszet egy gömböv és pontrahúzható. Valódi félgömbbel lefedhetjük (hány kell?), és meghatározhatjuk a kohomológiát ehhez a fedéshez.

25.11. *Következmény. X sima sokaság, nyílt konvex halmazokkal való fedésénél $\check{H}(X,\mathbb{Z}) = H^p(\mathcal{U},\mathbb{Z})$*

25.12. Tétel (Cartan)**.** *X Stein sokaság, akkor $\forall q > 0$-ra $\check{H}^q(X,\mathcal{O}) = 0$.*

25.13. *Példa.* X komplex sokaság, ha tudunk választani nyílt fedését úgy, hogy a fedés minden tagja, és minden véges metszete Stein, akkor Cartan előbbi tétele azt mondja nekünk, hogy ez egy Leray fedés és $H^1(\mathcal{U},\mathcal{O}) = \check{H}^q(X,\mathcal{O})$.
Ezalapján $X = P^n$ a szokásos fedéssel egy $\mathcal{O}$-Leray fedés, hiszen minden fedőelem $\mathbb{C}^n$, a kettős metszetek pedig $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n-1}$ (ellenőrizzük!), a hármas metszetek $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n-2}$ s így tovább, fogadjuk el, hogy ezek mind Steinek.

25.14. Tétel. *$\check{H}^q(P^n,\mathcal{O}) = \mathbb{C}$ ha $q = 0$, 0 különben.*

Bizonyítás. $q = 0$ akkor tudjuk, hogy csak a konstans függvények globális szelései $\mathcal{O}$-nak, és az előzőek alapján elegendő a fedéshez tartozó Cech kohomológiát kiszámolni.
Speciális esetben nézzük $n = 2, q = 2$. Háromelemű fedésünk van, egyetlen hármas metszet van emiatt. Minden kolánc kociklus, hiszen nincs négyes metszet, be kell látni hogy mindenki kohatár. F holomorf $\cap_0^2 U_i$, létezzen $f_{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$, melyre $F = f_{12} - f_{02} + f_{01}$. Konkrét térképek, $U_0 : [z_0 : z_1 : z_2] \mapsto (z_1/z_0, z_2/z_0) = (w_1, w_2)$ azonosítja $\mathbb{C}^2_{w_1,w_2}$-vel. Ha $f \in \mathcal{O}(U_0)$, akkor ha hatánysorba fejtjük ($U_0 = \mathbb{C}$), és behelyettesítjük az előbbi paraméterezést a függvény

$$\sum_{j,k\geq 0} a_{jk} w_1^j w_2^k = \sum a_{jk} z_0^{-j-k} z_1^j z_2^k = \sum_{r_j\in\mathbb{Z}, r_1,r_2\geq 0, \sum r_i = 0} a_{r_0 r_1 r_2} z_0^{r_0} z_1^{r_1} z_2^{r_2} = \sum_{r\in\mathbb{Z}^3, |r|=0, r_1\geq 0, r_2\geq 0} a_r z^r$$

Hasonlóan ha $f \in \mathcal{O}(U_0 \cap U_1)$, akkor őt felírhatjuk egy vegyes Laurent és hatványsorba ($U_0 \cap U_1 = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$) w_1-ben, és

$$f(w_1, w_2) = \sum_{r\in\mathbb{Z}^3, r_2\geq 0, |r|=0} a_r z^r = f([z_0 : z_1 : z_2])$$

A többi kettős metszeten is teljesen hasonlatos sorokat kapunk, homogenitás miatt a multiindex normája mindig nulla, a kimaradó koordináta nemnegatív. A hármasmetszeten bármelyik koordináta lehet negatív kitevőn, csak a homogenitási feltétel marad meg ("dupla Laurent sor", hiszen a hármas metszet egy $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$). A keresett kohatár alak úgy adódik, hogy ezt a sort szétbontjuk

$$\sum_{r\in\mathbb{Z}^3, |r|=0} a_r z^r = \sum_{r\in\mathbb{Z}^3, |r|=0, r_0\geq 0} a_r z^r + \sum_{r\in\mathbb{Z}^3, |r|=0, r_0<0, r_1\geq 0} a_r z^r + \sum_{r\in\mathbb{Z}^3, |r|=0, r_0<0, r_1<1} a_r z^r.$$

Vegyük észre, hogy a három tag holomorf az $U_1 \cap U_2, U_0 \cap U_2, U_0 \cap U_1$ metszeteken. Gondoljuk meg hasonlóan, hogy $H^1(P^2) = 0$. □

Térjünk vissza az egzakt sorokhoz. A $\hat{H}^1(X, F)$ csoport speciális!

25.15. Tétel. *X toptér, $\{V_\beta\}_{\beta\in B} = \mathcal{V} \prec \mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ két nyílt fedés, akkor $\rho^* : H^1(\mathcal{U}) \to H^1(\mathcal{V})$ injektív!*

Bizonyítás. $h \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ és tegyük fel, hogy $\rho^* h = \delta\tilde{h}'$, ahol $h \in C^0(\mathcal{V},\mathcal{F})$. $h_{\rho(\beta_0)\rho(\beta_1)}|_{V_{\beta_0}\cap V_{\beta_1}} = \tilde{h}_{\beta_1} - \tilde{h}_{\beta_0}$, ahol $h_{\beta_j} \in \mathcal{F}(V_{\beta_j})$. Kellene, hogy h kohatár, azaz $h = \delta\xi$, $\xi \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$, amire $h_{\alpha_0\alpha_1} = \xi_{\alpha_1} - \xi_{\alpha_0}$. Legyen α, β_0, β_1 tetszőleges. Ekkor $U_\alpha \cap V_{\beta_0} \subset V_{\beta_0}$ és itt a $\tilde{h}_{\beta_0}$ szelés adott. Ezek nem feltétlenül ragadnak össze egy U_α feletti szeléssé, ahogy β_0 végigfut a B indexhalmazon, de $U_\alpha \cap V_{\beta_0} \cap V_{\beta_1} \subset U_\alpha \cap U_{\rho(\beta_0)} \cap U_{\rho(\beta_1)}$, és tudjuk, hogy h kociklus. Következik, hogy $U_\alpha \cap U_{\rho(\beta_0)} \cap U_{\rho(\beta_1)}$-ban $h_{\alpha\rho(\beta_0)} + h_{\rho(\beta_0\rho)(\beta_1)} = h_{\alpha\rho(\beta_1)}$ teljesül[1], tehát $U_\alpha \cap V_{\beta_0} \cap V_{\beta_1}$-ben $h_{\alpha\rho(\beta_1)} = h_{\alpha\rho(\beta_0)} + \tilde{h}_{\beta_1} - \tilde{h}_{\beta_0}$. Átrendezve $\tilde{h}_{\beta_0} + h_{\rho(\beta_0)\alpha} = h_{\rho(\beta_1)\alpha} + \tilde{h}_{\beta_1}$ összeragadnak egy globális $\mathcal{F}(U_\alpha)$ szeléssé, ez lesz a keresett ξ_α.
Ha most $\alpha_0, \alpha_1 \in A$ és $\beta \in B$ tetszőleges akkor $U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap V_\beta$-ban

$$\xi_{\alpha_1} - \xi_{\alpha_0} = \tilde{h}_\beta + h_{\rho(\beta)\alpha_1} - (\tilde{h}_\beta + h_{\rho(\beta)\alpha_0}) = h_{\rho(\beta)\alpha_1} + h_{\alpha_0\rho(\beta)} = h_{\alpha_0\alpha_1}.$$

Az utolsó egyenlőségnél használtuk, hogy h kociklus, és pont ezt akartuk megmutatni. □

25.16. Következmény. *A természetes leképezés $H^1(\mathcal{U}) \to \check{H}^1(X)$ is monomorfizmus minden $\mathcal{U}$ nyílt fedésre, vagyis $\check{H}^1(X) = 0$ pontosan akkor ha minden fedésre $H^1(\mathcal{U}) = 0$.*[2]

Ezzel a természtes leképezéssel az eddigi egzakt sorozatunk kiegészíthető $\check{H}^1(X,\mathcal{F})$-el, így eltűnik a fedéstől való függés, és δ már egy jóldefiniált leképezés lesz. Ennek ellenőrzéséhez tekintsük $\{f_{\alpha\beta}\}$ definícióját, és két lokális reprezentáns $s_1, \mathcal{V}_1$ és $s_2, \mathcal{V}_2$-nek egy közös fiomítását.
Tehát mostmár $\mathcal{G}(X)$-nél is egzakt a sorozatunk. Ez persze nem áll itt meg, azonos dimenziókban α_*, β_* létezni fog minden rangban, a dimenzióugrásnál akadunk el, ott kapunk egy újabb δ leképezést.

25.17. Tétel. *Egy $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to \mathcal{G} \to 0$ rövid egzakt sorozat indukál egy hosszú egzakt sorozatot*

$$0 \to \check{H}^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_*} \check{H}^0(\mathcal{E}) \xrightarrow{\beta_*} \check{H}^0(\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta} \check{H}^1(\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_*} \check{H}^1(\mathcal{E}) \xrightarrow{\beta_*} \check{H}^1(\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta} \check{H}^2(\mathcal{F}) \to \dots$$

25.18. *Példa.* Ha X sima sokaság, $\mathcal{E}$ a sima függvények kévéje, $\mathcal{E}^*$ a nemeltűnő sima függvények kévéje, ezekre is felírhatjuk az exponenciális egzakt sorozatot. A részkéve megint a lok konstans $\mathbb{Z}$ lesz, és gyakon volt, hogy az egységosztás tétele miatt $H^{\geq 0}(\mathcal{U},\mathcal{E}) = 0$, és látjuk hogy $\hat{H}^i(\mathcal{E}^*) = H^{i+1}(X,\mathbb{Z})$. Megfigyeljük, hogy $\check{H}^1(\mathcal{E}^*)$ nem más, mint a sima komplex vektornyalábok csoportja a tenzorszorzásra, és ezeket azonosítottuk a második szinguláris kohomológiával.
Ha X komplex sokaság, akkor nincs egységosztás, de ha van olyan szerencsénk, hogy $H^{1,2}\mathcal{O} = 0$ ugyanezt az izomorfizmust kapjuk.

25.19. Következmény. *$\check{H}^1(\mathcal{O}^*) = Pic(X)$, illetve még mindig a fenti feltételek mellett ez azt mondja, hogy minden sima komplex vonalnyalábon egyértemű komplex struktóra van.*

25.20. Tétel (Cartan). *Ha X Stein, akkor ez a feltétel teljesül és $\check{H}^1(X,\mathcal{O}^*) = Pic(X) = H^2(X,\mathbb{Z})$.*

25.21. Következmény. *A projektív terekre vonatkozó számolások miatt látjuk, hogy itt is teljesül ez a feltétel, és így $Pic(P^n) = H^2(P^n,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.*

25.22. *Példa.* X komplex sokaság, megint felírjuk az exponenciális egzakt sort. Ha $H^1(X,\mathbb{Z}) = 0$, akkor látjuk, hogy minden $f \in \mathcal{O}^*$ függvénynek létezik holomorf logaritmusa. Például a kilyukasztott komplex sík homotopikusan egy S^1, próbáljuk meg meggondolni hogy mi lesz δid.

[1] ez pontosan a kociklusfeltétel
[2] illetve $H^1(\mathcal{U}) \leq \check{H}^1(X)$

25.23. *Példa.* Cousin I-hez felírjuk a $0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}/\mathcal{O}$ SESt. A kohomologikus hosszú egzakt sorozatból látjuk, hogy mivel a Cousin I inputja egy $\check{H}^0(\mathcal{M}/\mathcal{O})$ elem, így ha $\check{H}^1(\mathcal{O}) = 0$, akkor a Cousin I megoldható. Ez történik például ha X Stein, vagy egy projektív tér, mint már láttuk.

25.24. *Példa.* Cousin II-nél felírjuk ugyanazt a sort mint az egyesnél csillagokkal, az input itt is egy $\xi \in \check{H}^0(\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$ elem, azaz pontosan akkor lesz megoldható a feladat, ha $\delta\xi = 0$.

Emlékezzünk a Cousin II feladat eredeti megfogalmazására, egy $m_\alpha \in \mathcal{M}^*(U_\alpha)$ függvényrendszer úgy, hogy a hányadosok nem nulla holomorf függvényt adnak a metszeten. A kociklusfeltétel világosan teljesül, és $g_{\alpha\beta} = m_\alpha/m_\beta$ egy holomorf L vonalnyaláb ragasztófüggvényrendszere, vagyis $\xi \underset{\delta}{\mapsto} L \in Pic(X)$, és ez utóbbi azonosul $\check{H}^1(\mathcal{O}^*)$-el.
Emlékezzünk a Serre tételre, átofgalmazhatjuk a mostani eszközeinkkel: X komplex sokaság melyre $\check{H}^1(\mathcal{O}) = 0 = \check{H}^2(\mathbb{Z})$, akkor minden Cousin II feladat megoldható, ez könnyen látszik az exponenciális egzakt sorozatból.

25.25. Következmény. *Ugyanezen feltételek mellett következik, hogy minden $L \to X$ nyaláb holomorfan triviális.*

25.26. Tétel. *X Stein és $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$, $A \subset X$ analitikus hiperfelület, akkor létezik globális minimális definiáló függvénye.*

Bizonyítás. Exponenciális egzakt sorból kapjuk hogy $\check{H}^1(\mathcal{O}^*) = 0$ Cartan tételét felhasználva, következik hogy minden vonalnyaláb holomorfan triviális, speciálisan az $L[A]$ nyalábnak is van globális szelése, ez megfelelő minimális definiáló függvénynek. □

25.27. Következmény. *X Stein és $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$ és $A \subset X$ analitikus hiperfelület, $f \in \mathcal{O}(A)$, akkor f holomorfan kiterjed X-re.*

Bizonyítás. $H^1(\mathcal{O}) = 0$ Cartan tétele szerint, akkor minden fedésre $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$, az előző tétel szerint van globális minimális definiáló függvény, és korábban láttuk, hogy ebből következik hogy f kiterjed X-re. □

25.28. Definíció. $H^0(\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$ elemeit Cartier divizoroknak hívjuk.

25.29. Definíció. X komplex sokaság, $D := \sum N_\alpha A_\alpha$ egy Weil divizor, ha $A_\alpha \subset X$ irreducibilis analitikus hiperfelületek, $n_\alpha \in \mathbb{Z}$ és az összeg lokálisan véges. $Div(X) := \{\text{Weil divizorok}\} = \mathcal{D}(X)$ egy Abel csoport.

Emlékezzünk a módszerre, ahogyan analitikus hiperfelületekhez vonalnyalábokat rendeltünk.

25.30. Állítás. *Létezik egy $div : \mathcal{M}^* \to \mathcal{D}$ leképezés.*

Bizonyítás. Vázolunk csak. Legyen $m \in \mathcal{M}^*$, $P(m) = \cup P_i$ m poláris halmaza, lokálisan véges, a P_i-k irreducibilis analitikus hiperfelületek, és hasonlóan $N(m) = \cup N_\lambda$ a nullhalmaza. Ha $Z \subset X$ tetszőleges analitikus hiperfelület, $x \in Z$, U egy nyílt körülötte és $h \in \mathcal{O}(U)$, melyre $h|_{Z \cap U} = 0$. Tegyük fel, hogy U olyan kicsi, hogy f minimális definiáló függvénye Z-nek x-ben, ekkor $ord_{Z,x}(h) := \max\{m \in \mathbb{N} : \exists g \in \mathcal{O}_x, h = f^m g\}$.

25.31. Tétel. *Z irreducibilis, h holomorf Z egy környezetében, akkor $ord_{Z,x}(h)$ nem függ x-től.*

Ha most $m \in \mathcal{M}^*$ és $x \in Z$ kis környezetben $m = g/h, g, h \in \mathcal{O}_x$ relatív prím függvénycsirák.

25.32. Definíció. $ord_{Z,x}(h) := ordf_{Z,x}(g) - ord_{Z,x}(f)$

Ezzel legyenek $m_\infty := \sum(-ord_{P_i}(m))P_i$, $m_0 := \sum ord_{N_\lambda}(m)N_\lambda$ m pólus- és nulldivizorai. Végül legyen $div(m) = m_0 - m_\infty$, ezzel kapjuk az állított homomorfizmust. $\square$

Most általánosítani szeretnénk az $L[A]$ konstrukciót. Legyen $D \in \mathcal{D}(X)$. $\forall p \in X \exists U_p \subset X$ nyílt környezet hogy $D|_{U_p}$-re egy véges összeg $\sum_1^N m_\beta \tilde{Z}_\beta$, ahol Z_β irreducibilis hiperfelület U_p-ban. Létezik egy esetleg szűkebb $V_b \subset U_p$, ahol létezik f_β minimális definiáló függvénye $\tilde{Z}_\beta$-nak. Ekkor $div(\prod_1^N f_i^{m_i}) = \sum_1^N m_i(z_i \cap V_p) = D|_V$, azaz $D|_V$ egy meromorf függvény divizora m_p. Így kapunk egy V_p nyílt fedést és m_p meromorf függvényeket a nyíltakon, ez egy Cartier divizor lesz, a hányadosok holomorfak a metszeteken! Az asszociált nyalábot így kapjuk az m_p függvényeken keresztül, ezt hívjuk $L[D]$-nek.
Ezzel kaptunk egy

$$\mathcal{M}^* \to \mathcal{D}(X) \to Pic(X)$$

leképezést. Psyche, ez ugyan az, mint amit már korábban láttunk

$$\mathcal{M}^*(X) \to H^0(\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \to H^1(\mathcal{O}^*)$$

Az első tagok megegyeznek, $H^1(\mathcal{O}^*) = Pic(X)$, mint amint már tárgyaltuk, végül $D \mapsto \{m_p\}$ a leképezés ami Weil divizorhoz Cartier divizort rendel.[3]

[3]ez izo?