Leszámlálás - az algebrai geometria találkozik a topológiával
mm1n9a46

Előadó: Fehér László

2022/23/1

$[\sigma_I] = s_I(c_1, ..., c_k)$ Schur polinom. $s_I s_J = \sum c_{IJ}^K s_K$, az együthatókat Littlewood-Richardson együtthatóknak nevezzük.

2. Második előadás

Schubert varietások σ_I. $\mathbb{C}^n =< e_1, .., e_n >$

2.1. Definíció. Alterek egy $0 < V^1 < V^2 < ... < V^n = \mathbb{C}^n$ sorozatát zászlónak nevezzük. Az összes zászlók halmaza $Fl(\mathbb{C}^n)$-el jelöljük, és majd később látjuk hogy sima sokaság, szintén hat rajta a $GL(n)$, méghozzá tranzitívan.

Világos, hogy $Fl(\mathbb{C}^n) = Gl(n)/Stab$, kérdés hogy mi is ez a stabilizátor? Vegyük a standard zászlót, $F_. = (< e_1 >, < e_1, e_2 >, ...)$-t, neki szeretnénk a stabilizátorát. Ez a stabilizátor látványosan a felsőháromszögmátrixok részcsoportja lesz, jelöljük ezt $B^+(n)$-el. Ezzel látjuk már, hogy ez egy sokaság, hiszen zárt részcsoport által vett faktor, a dimenziója $\binom{n}{2}$, ahány szabad paraméterünk marad. $\Omega_I := \{V \in Gr_k\mathbb{C}^n | \forall I : \dim(V \cap F_i) = \dim(V_I \cap F_i)\}$, ahol $V_I =< e_{i1}, ..., e_{ik} >$ az I indexhalmazhoz tartozó altér. A standard flag tagjaival vett metszeteket fogjuk a V dimenzióvektorának nevezni, $di_V(i)$. Ezt a halmazt hívjuk Schubert-cellának, azon alterek, amiknek a dimenzióvektora megegyezik az I-hez tartozó alterével. $\sigma_I = \overline{Omega_I}$ lesz, ezt hívjuk Schubert-varietásnak.

2.2. Állítás. *$Gr_k\mathbb{C}^n = \sqcup_{\binom{I \in n}{k}} \Omega_I$ teljesül, továbbá $\Omega_I = \mathbb{C}^?$ (homeo,diffeo,stb).*

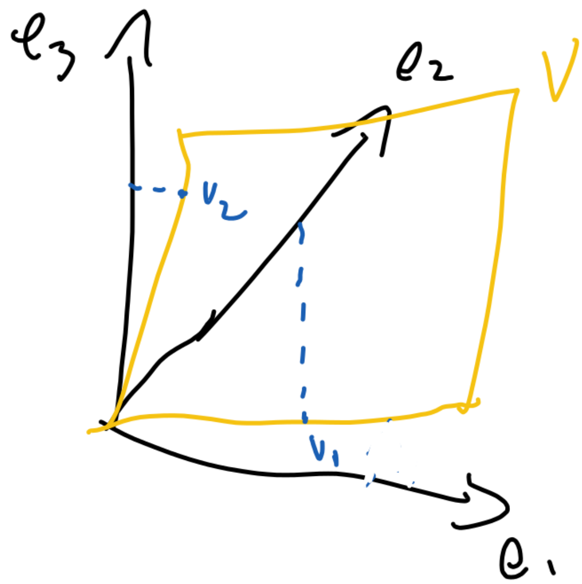
2.3. *Példa.* $Gr_1\mathbb{C}^n = P^{n-1}$. 1-ds altereket tekintünk, a dimenzióvektor csak annyit mond, hogy az első hány bázisvektor spanjében van benne az egyenesünk. Azt látjuk, hogy $\sigma_i = P < e_1, ..., e_i >$, vegyük észre, hogy $\Omega_i = \sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$ és pont a standard felbontását kapjuk a projektív térnek.

2.4. *Házi.* A $di_{V_I}(i)$ függvény monoton nő, és minden lépésnél legfeljebb egyet ugorhat az értéke, a definícióból ez more or less nyilvánvaló. Feladat, hogy az ugrások helye megegyezik az I indexhalmazzal.

2.5. Állítás (folytatva)**.** *$\Omega_I = B^+V_I$, továbbá $\dim \Omega_I = \sum(i_j - j)$, ahol $I = i_1 < i_2 < ... < i_k$.*

2.6. *Megjegyzés.* $\chi Gr_k\mathbb{C}^n = \binom{n}{k}$

Bizonyítás. $V \in \Omega_I$ ekvivalens azzal, hogy I a dimenziófüggvényének az ugráshalmaza. Szeretnénk gyártani egy bijekciót $\phi : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n$ úgy, hogy $im\phi = V+$ extra tulajdonságok, hogy elég merev legyen és valóban létezzen ez. $V \cap F_{i_1-1} = 0$ persze, és $\dim(V \cap F_{i_1}) = 1$. Tehát létezik egyértelmű $v_1 \in V$, ami $\sum_{l=1}^{i_1-1} \alpha_{l_1} e_l + e_{i1}$ alakban írható. Ezt folytatva, létezik egyértelműen olyan v_j, ami $\sum_1^{i_j-1} \alpha_{l_j} e_l + e_{i_j}$ alakban írható, ahol továbbá $\alpha_{l_j} = 0$, ha $l = i_a : a = 1, ..., j-i$. Ezen a módon előállítottunk egy bázisát a V-nek. Egymás mellé téve



1. ábra.

a v_i vektorokat kapunk egy $n \times k$-as mátrixot, aminek a képe valóban a V, és nem választottunk semmit a konstrukció közben. Ezzel kvázi a Gauss eliminált alakját kapjuk egy ilyen mátrixnak, ebből látjuk a dimenzióforumlát is. Az ugrásoknak megfelelő sorokban van egy 1-es, mellette csak nullák, fölöttük (ha csak egy másik 1es nem öli eg őket) szabad paraméterek, alattuk is nullák. Ebből látjuk azt is, hogy valóban mindenki benne van a megfelelő indexhalmazhoz tartozó standard altér orbitjában, a mátrixban e_i ha $i \notin I$, és v_i ha igen. $\square$

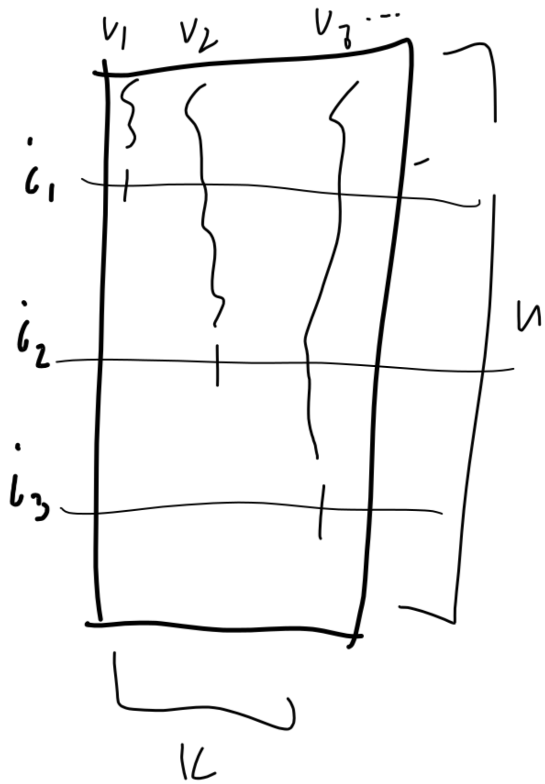
Állítás, hogy $T(Gr_k(\mathbb{C}^n)) = Hom(S^k, \mathbb{C}^n/S^k)$, hom nyaláb a tautologikusból a triviálisnak a tautologikussal vett faktorába. Az n,k Grassmann $GL(n)/Stab$, egy homogén tér, általában is kiszámolható. Az egységelemben a lie-algebrákat faktorizáljuk.

$$H \to G \to G/H$$

egy principális H nyaláb. $T(G/H) = G \times_H T_1$, ahol a H balról hat és a kitüntetett pontot $[H]$-t fixálja. Ezzel hat az érintőtereken, és a lenti derivált fogja megadni az érintőnyalábot. Házi feladat a számolást befejezni I guess?

3. Harmadik előadás

$\Omega_I = B^+ V_I$-hez térünk vissza picit. Állítjuk, hogy $v \in \Omega_I$ ekvivalens azzal, hogy létezik egy olyan bázisa V-nek, amiben a vektorok olyan alakúak mint az előző előadáson, az i. bázisvektorban az első $i_i - 1$ elem bármi, és egy 1-es az i_i. helyen, aztán még a sorokat eliminálhatjuk ezekkel az egyesekkel. Ebből látjuk a dimenziót



2. ábra.

is, $\sum_1^k i_j - j$, de a kodimenzió jobban érdekel minket, $\lambda_j = n - k + j - i_j$, $|\lambda| := \sum \lambda_j$, ahol $\lambda = (\lambda_1, .., \lambda_k)$. Partíciónak nevezzük, mert $|\lambda|$-t k elemű partícióra bontja. Young diagramokat is rajzolhatunk ezeknek, ha olyan kedvünk van éppen. Kapunk egy $k \times n - k$-as dobozt, és mindegyik Schubert cellánk bele van ebbe rajzolva, $I \in \binom{n}{k} \leftrightarrow \lambda \subset [0, n-k]^k \cap \mathbb{Z}$. Konverzióformula $\lambda_j = n-k+j-i_j$, és hasonlóan visszafelé, használni fogjuk az Ω_λ kifejezést, ami a megfelelő indexhalmazhoz tartozó Schubert cellát értjük, hasonlóan σ_λ-val.

3.1. Állítás. $\sigma_I = \cup_{J \leq I} \Omega_J$.

3.2. Definíció. $J \leq I$ pontosan akkor, hogyha $J_s \leq I_s$ minden koordinátában.

Nézzük meg konkrétan $Gr_2(4)$ esetét. $\sigma_{12} = \{F_2\}$ egy pont, a Young diagram egy 2×2 négyzet. A legnagyobb cella σ_{34}, ehhez egy nulla területű Young diagram tartozik, és hozzá a teljes $Gr_2(4)$ tartozik. Megindokoljuk az állítást egy kicsit. Legyen $V_t = < e_1, e_2 + te_3 > \in \Omega_{13} \subset Gr_2(4)$. Ahogy $t \to 0$, $V_t \to < e_1, e_2 >$, ez valahogy a rang félig folytonossága miatt van, csak csökkenni tud ergo egy vektor bezuhanhat egy kisebb altérbe.
Most a teljes lista. $\sigma_{34} = Gr_2(4)$, 1-területű diagram tartozik $\sigma_{24} = \{V : V \cap F_2 \neq 0\}$-hez. 2 területű diagramból van a magas és a széles. Előbbi az F_3-ban lévő projektív egyenesekből áll, σ_{23}[1]. σ_{14}, az utóbbi az F_1-et tartalmazó egyenesekből fog állni. Továbbmenve elforgatott L alakú a σ_{13}, azon V-kből áll, amikre $F_1 < V < F_3$ teljesül. Végül σ_{12}-ben csak F_2 van.

[1] Heads up, 90 fokkal elforgatjuk a Young diagramokat a bázisvektoros felíráshoz képest!

Szemmel láthatóan például $\sigma_{23} = PF_3$ projektivizált, illetve $\sigma_{14} = P(C^4/F_1)$ egy másik projektivizált tér, majd $\sigma_{13} = P(F_3/F_1)$. A kohomológia generátorait sematikusan így vizualizálhatjuk: $\begin{array}{r|ccccc} P^4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ Gr_2(4) & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}$

Hogy megy a szorzás? $\sigma_{23}^2 = ?$ meg kellene számolni a metszéspontokat, ha egy kicsit kimozgatjuk. Ezt úgy visszük végbe, hogy a flaget, ami definiálta a celláinkat kicsit megváltoztatjuk, ergo F_3-at kicseréljük F_3'-re. Két általános helyzető 3-ds altér két dimenzióban metszi egymást, tehát a pont osztályát kapjuk, σ_{12}-t. Hasonlóan σ_{14}^2 is a pont osztályát adja vissza. Keresztben $\sigma_{23}\sigma_{14}$ mi lesz? Azon V-ket keresünk, amikre $F_3 > V > F_1'$, ilyen pedig általában nincs, tehát a szorzat nulla. Ezért a $Gr_2(4)$ metszetformája standard diagonális 2 generátoron. Végül $\sigma_{24}^2 = a\sigma_{23} + b\sigma_{14}$, érdekelne minket hogy pontosan hányszor az egyik, és hányszor a másik generátor. Egyfelől $\sigma_{24}^2\sigma_{23} = a[*]$, ugyanakkor geometriailag azon V-ket keressük, amikre $V \cap F_2 \neq 0$, és $V \cap F_2' \neq 0$ végül pedig hogy $V \leq F_3''$, ilyenből pedig pontosan egy van, a pont osztályát kapjuk, vagyis $a = 1$. Teljesen hasonlóan $b = 1$, és így $\sigma_{24}^4 = 2[*]$. A szorzótábla beejezését végiggondolhatjuk otthon.

Vegyük észre, hogy $Gr_2(4) \subset P(\Lambda^2\mathbb{C}^4)$, ez egy $GL(4)$ ekvivariáns beágyazás. Mik $GL(4)$ orbitjai $\Lambda^2\mathbb{C}^4$-en? Ez utóbbira gondolhatunk úgy, hogy a 4×4-es ferdén szimmetrikus mátrixok, ezeknek a standard alakja a $\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$-ból álló blokkdiagonális mátrix. $GL(2n)$ orbitjai a $\lambda^2\mathbb{C}^{2n}$-nek a ranggal van bijekcióban (ami ezesetben mindig páros). Tehát $\lambda^2\mathbb{C}^4$-nél 3 orbitunk van, a 0, egy szimplektikus blokk, vagy kettő. Projektivizálás után tehát két orbitunk lesz, mi csak a kisebiket választhatjuk, ennek az orbitja lesz a $Gr_2(4)$ a projektív térbe beágyazva.

Általában is igaz valami olyasmi, hogy egy reprezentáció projektivizáltjának a minimális dimenziós orbitja zárt (ha nem lenne az a pereme egy kisebb dimenziós invariáns halmaz stb), és így minden kompakt algebrai izé bigyót meg lehet kapni.

$Gr_2(4)$ egy hiperfelület ebben a projektív térben, kérdés hogy milyen egyenlet vágja ki? $f : \Lambda^2\mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ polinom ami $GL(4)$ invariáns. Ilyet nem sokat ismer az ember, det jó tipp. Állítás, a determináns egy polinomnak a négyzete, mégpedig annak, hogy $m_{12}m_{34} - m_{13}m_{24} + m_{14}m_{23}$-nak. A leképezés maga amit tekintünk az alteret reprezentáló mátrix minorjait képezi le, és az már könnyebben látható, hogy egy mátrix minorjai között fennáll ez az összefüggés. $\sigma_\lambda \subset Gr_2(4) \subset P^5$, hogy néznek ki ezek a cellák beágyazva? $V =< v_1, v_2 >\in \sigma_{34}$ pontosan akkor, hogyha $\begin{matrix} v_1 & v_2 & e_1 & e_2 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & 0 & 1 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \end{matrix}$ determinánsa nulla, vagyis ha $m_{34} = 0$, az előző egyenlettel gyütt kapjuk, hogy P^4-ben $-m_{13}m_{24} + m_{14}m_{23} = 0$. Vegyük észre, hogy az egyenletben nincs m_{12}, még egy dimenzióval lejjebb tudunk menni, ez a cella egy kúp egy P^3-beli kvadratikus felület felett, méghozzá sima, tehát $P^1 \times P^1$.

$Gr_k \hookrightarrow P(\Lambda^k\mathbb{C}^n)$, és $Gr_{n-k} \hookrightarrow P(\Lambda^{n-k}\mathbb{C}^n)$ beágyazódnak, na de ők izomorfak is, hogy néz ki a kettőnek a képe egymáshoz képest? Van egy $\Lambda^k\mathbb{C}^n \otimes \Lambda^{n-k}\mathbb{C}^n \to \Lambda^n\mathbb{C}^n = \mathbb{C}$ párosításunk is. Ez ad egy $\Lambda^k\mathbb{C}^n = (\Lambda^{n-k}\mathbb{C}^n)^v$ izomorfizmust[2].

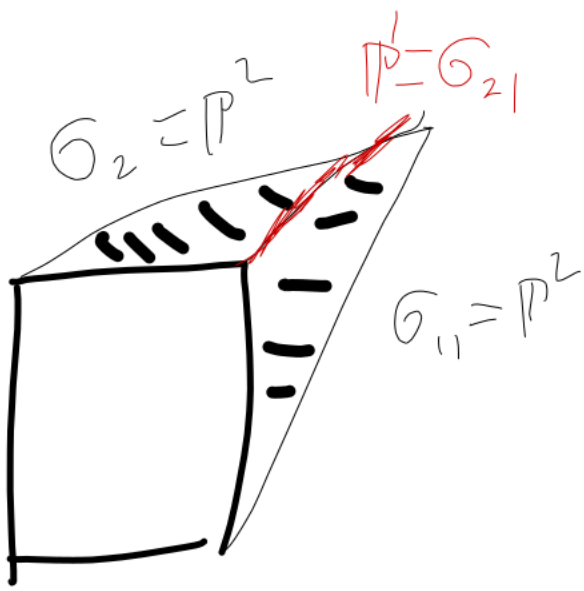
[2] de ez sem kanonikus!

4. Negyedik előadás

A projektív dualitásból kapunk valami hiperfelületet, ami a Grasmann képének a duálisa. $P(V^v) = \{V \text{ hipersíkjai}\}$, és akkor $Gr_k(V^v) = Gr_{n-k}(V)$. Vesszük az összes hipersíkot ami érinti az Y varietásunkat, ebből kapjuk a DY duálist $P(V^v)$-ben, állítás, hogy egy tipikus varietás duálisa hiperfelület, és hogy ez valóban egy dualitás, ergo $DDY = Y$.

4.1. *Házi.* $V = Hom(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p)$, legyen $\mathbb{P}Y \subset \mathbb{P}(V)$, ahol $Y = \{\text{legfeljebb 1 rangú leképezések}\} = \overline{\Sigma^{n-1}}$. $GL(n) \times GL(p)$ hat V-n, az orbitok persze a rang által lesznek megadva, Σ^i jelöli az i korangú leképezéseket. Micsoda is valójában $\mathbb{P}Y$, és mi a duálisa[3].

Komplex bilineáris $\neq$ Hermitikus :'(. És egyik sem felel meg nekünk teljes mértékben.
A múlt órán láttuk hogy σ_{doboz} egy kúp $P^1 \times P^1$ felett.



3. ábra.

$B^+V_I = \cup_{J \leq I} B^+J$, ha a szám k-asokról áttérünk partíciókra. $\Omega_I = \{V : \dim(V \cap F_{I_j}) = j, j = 1,,,k\}$, és $\overline{\Omega_I} = \sigma_I = \{V : \dim(V \cap F_{I_j}) \geq j, j = 1,,,k\}$
$\phi : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n$ leképezés úgy, hogy $im\phi = V$, és $V \in \sigma_I$ pontosan akkor ha bizonyos minorjai eltűnnek.

4.2. *Példa.* $V \in Gr_k(\mathbb{C}^n)$, és azt szeretnénk például, hogy $\dim(V \cap F_3) \geq 2$, ez pontosan akkor teljesül hogyha $\dim([V] < \mathbb{C}^n/F_3) \leq k-2$. Vagyis az kell, hogy az első három sort kidobva a mátrixból minden $k-1 \times k-1$-es minor determinánsa eltűnik, vagyis a mátrix néhány minora eltűnik.

4.3. *Házi.* Ezt végiggondolni.

4.4. Következmény. *$\sigma_I = Gr \cap$ koordinátaaltér a Plücker-térben. Tehát a metszetek nem transzverzálisak, nagyon speciális helyzetben vannak a Grasmannok beágyazva a projektív alterekhez viszonyítva. Tehát nem csak a Grasmann, hanem a Schubert varietások is valóban projektív algebrai varietások.*

[3] ezt könnyebb látni, mert a csoporthatásnak át kell mennie a projektivizáláson és a duálison

$$\det\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ -* & 0 & * & * \\ -* & -* & 0 & * \\ -* & -* & -* & 0 \end{pmatrix}$$ ferdén szimmetrikus mátrix determinánsa a négyzete egy polinomnak, ezt hívják "Pfaffian"-nak.

4.5. Következmény. *$sigma_\lambda \supset \sigma_\mu$ pontosan akkor, hogyha $\lambda \subset \mu$, tehát a Young diagramok között tartalmazás áll fenn, vagyis $\lambda_i \leq \mu_i$.*

4.6. *Házi.* Mennyi $rkH^{2i}(Gr_k(\mathbb{C}^n)) =?$. Ugye pontosan azon Young diagramok számával, amik területe éppen i, de még jobb ha a Poincaré polinomot meg tudnánk határozni.

4.7. Lemma (Kleinman-Bertini moving lemma). *$\exists F_0, F_0'$ és $\sigma_\lambda(F_0)$ transzverz $\sigma_\mu(F_0')$, G tranzitív csoporthatás M-en, $A, B \subset M$ akkor létezik olyan $g \in G$, hogy A transzverz gB-re. Sőt az ilyen g-k Zariski nyíltat alkotnak G-ben.*

Vizsgáljuk $sing(\sigma_\lambda)$-t. Lakshnibai-Seshadri tétele a következő. A szinguláris helyek úgy jönnek létre, hogy a mátrixban egyel lejjebb lép az ember, és balra, mindkét irányba letoljuk az egyik sarokpontot. A kodimenzió ilyen módon mindig legalább 3-al nő.
Tehát a sima Schubert cellák úgy néznek ki, hogy a Young diagramból egy téglalapot kitörlünk a jobb alsó sarokból. Ezeket könnyedén be is azonosíthatjuk. $\{F_a < V < F_b\}$, ez pedig személyesen egy $Gr_{k-a}(F_b/F_a) = \sigma_\lambda$. Ebben az esetben a téglalap amit kitöröltünk $b-k \times k-a$-as.
A célunk megérteni a Schubert varietások által reprezentált kohomológiaelemek szorzatait meghatározni.

4.8. Állítás. *$c_i(S)$ generálják H^*-ot, ahol. $S^k \to Gr_k\mathbb{C}^n$ a tautologikus rész[4]nyaláb, Q^{n-k} a tautologikus nyaláb szerinti faktor.*

Tehát $H^*(Gr) = \mathbb{Z}[c_1(S), ..., c_k(S)]/\sim$. Könnyű találni relációkat a Grasmannok kohomológiagyűrűjében, például $c(S)c(Q) = 1$, a virtuális normálnyalábra. Kifejezve kapjuk, hogy $c_{n-k+1}(Q) = 0, ..., c_n(Q) = 0$, és ez már elég is!

4.9. Tétel (Gianbelli formula). *$[\sigma_\lambda] = det(\begin{matrix} \bar{c}_{\mu_1} & \bar{c}_{\mu_1}+1 & ... & \\ \bar{c}_{\mu_2}-1 & \bar{c}_{\mu_2} & \bar{c}_{\mu_1}+1 & ... \\ ... & ... & ... & \\ ... & ... & ... & \bar{c}_{\mu_{n-k}} \end{matrix})$ Ahol $\mu = \lambda^T$, hogyha a Young diagramját a főátlóra vett tükrözéssel kapjuk. Továbbá jelölje $\bar{c}_i = c_i(S^v)$-t.*

4.10. Definíció. Ha $c_1, ..., c_k, ...$ változók, definiálhatjuk az $s_\lambda(c)$ függvényt a fenti determinánssal, ezeket hívják Schur polinomoknak.

4.11. Tétel. *$\{s_\lambda(c_1, ..., c_k) : \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k), |\lambda| = d\}$ egy bázisa a d. fokú homogén polinomok $\mathbb{Z}[c_1, ..., c_k]_d$ terének (deg $c_i = i$).*

Ha $c_i = E_i(x_1, ..., x_k)$[5] ahol E_i az i. elemi szimmetrikus polinom és $deg\ x_i = 1$, akkor világos, hogy a gradálásokat mért így követeljük meg. Az x_i-k persze a vektornyalábunk vonalnyalábok összegére való visszahúzásának az első Chern osztályai.

[4] a triviális nyalábnak része
[5] formális változók i. elemi szimmetrikus polinomja

Komponálva kifejezhetjük elsőfokú változókka is a Schur polinomokat. $\frac{|x_j^{\lambda_i+k-i}|}{|x_j^{k-i}|} = s_\lambda(x)$ ez az alak két determináns hányadosaként felírva.

4.12. *Házi.* Megpróbálhatjuk meggondolni, hogy ez mért polinom, és mért szimmetrikus.

5. Ötödik előadás

Szimmetrikusság világos, változócsere megcserél két oszlopot a számlálóban és a nevezőben is, ergo $\frac{-1}{-1}$-el változik az értéke (ergo nem). A nevező egy Vandermonde determináns, $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$ alakú, a számláló is eltűnik, hogyha $x_i = x_j$ helyettesítést alkalmazunk, tehát a nevező osztja a számlálót és valóban polinomot kapunk. Ez elvezet az alternáló polinomok fogalmához ($x_i \leftrightarrow x_j$ cserére előjelet vált), és ez az érvelés belátja a struktúratételt, hogy egy polinom alternál pontosan akkor, hogyha qV alakú ahol q szimmetrikus, V pedig egy Vandermonde determináns. $s_\lambda = |E_{\overline{\lambda}_i+i-j}|$ Mért szeretjük a Schur polinomokat?

5.1. Tétel.

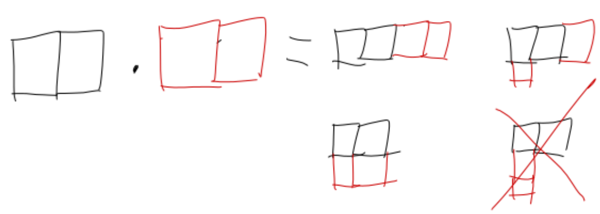
$$H^*(Gr_k) = H^*(BGL(k)) = \mathbb{Z}[c_1, ..., c_k] \xrightarrow{r} H^*(Gr_k(n)) \to 0$$

Bizonyítás. $r : c_i \mapsto c_i(S^k)$, ahol S^k a $Gr_k(n)$ tautologikus nyalábja. Valójában S^v jobb választás, ennek a nyalábnak vannak szelései, pozitív, stb. $r(s_\lambda) = [\sigma_\lambda]$, vagy 0. Az első eset akkor, hogyha λ Young diagramja benne van a $k \times n - k$-as téglalapban, 0 különben. □

5.1. Szorzás

5.2. Definíció. $s_\lambda s_\mu = \sum_{|\nu|=|\lambda|+|\mu|} c^n u_{\lambda\mu} s_\nu$, ezeket hívjuk Littlewod-Richardson együtthatóknak.

5.3. Tétel (Pieri formula). $s_\lambda s_l = \sum_{\text{nem lehet két új kocka egy oszlopban}} s_\mu$ *ahol* s_l *az egy elemű* (l) *partíció.*



4. ábra. példa az $s_2 s_2$ szorzattal

5.4. *Példa.* Tehát a szumma úgy megy, hogy hozzácsapjuk az l hosszú 1 magas téglalapot, és mozgatjuk úgy az új négyzeteket, hogy ne legyen két "új" négyzet egy oszlopban. Tehát $s_2 s_2 = s_3 + s_{31} + s_{22}$, hasonlóan $s_2 s_{11} = s_{31} + s_{211}$. Példa $[\sigma_1]^2 = s_1 s_1 = s_2 + s_{11}$. A negyedik hatványhoz kibontjuk a tagokat, csak $2s_{22}$ marad.

5.5. *Házi.*

- $\sigma_1^6 \in H^*(Gr_2(5))$ hányszorosa a pont osztályának?
- $\sigma_1 \subset Gr_k(n)$ úgy néz ki, hogy $\{V : V \cap F_{n-k} \neq 0\}$. Ez a hatvány azt számolja meg, hogy 6 egyenesen P^4-ben hány egyenes megy át?

$s_1^{k(n-k)} = \sum a_\lambda s_\lambda$, ha elküldjük a véges Grassmannba, majdnem mindenki meghal, csak $a_{(n-k)^k}$ marad, ő az adott leszámlálási feladatra a válasz. Ez a szám továbbá egyenlő $deg(Gr_k(n) \subset P(\Lambda^k\mathbb{C}^n))$, hiszen pont egy komplementer dimenziós altérrel vett metszést számol.
A Pieri formula + a Giembelli formula (a determinánsos dolog) együtt azt mondja, hogy elviekben tudunk szorozni.

5.2. Szép kis alkalmazás

5.6. Állítás. *Általános harmadfokú felületen P^3-ban 27 egyenes van.*

Bizonyítás. A következő jól ismert lemmát fogjuk felhasználni:

5.7. Lemma. *$E^d \to M$ vektornyaláb, $s : M \to E$ szelés, transzverz a nullszelésre, akkor $[s^{-1}(0)] = e(E) = c_d(E)$.*

$f(y_1, ..., y_4) \in Pol^3(\mathbb{C}^4)$ a harmadfokú polinomunk, $Z_f \subset P^3$. s_f szelése lesz $Pol^3(S^2 \to Gr_2(4))$ a tautologikus nyalábnak, egyszerűen $s_f(V) = f|_V$, hiszen harmadfokú polinom megszorítása is az. $s_f^{-1}(0)$ pont a Z_f-en levő egyenesekből fog állni.
Állítjuk, hogy egy (Zariski) nyílt halmazon ez a szelés transzverz a nullszelésre (bizonyítás majd lesz). A másik állításunkhoz ki kéne számolni $e(Pol^3S^2)$. A tautologikus nyaláb felbomlik vonalnyalábok összegére (igazából visszahúzható bele) $(S^2)^v$" = "$L_1 \oplus L_2,\ c_1(L_1) := \alpha,\ c_1(L_2) := \beta$. $Pol^3S^2 = Sym^3(S^v)$ teljesül, és ezt alkalmazva a vonalnyalábos felbontásra

$$Sym^3(L_1 \oplus L_2) = L_1^{\otimes 3} \oplus L_1^{\otimes 2} \otimes L_2 \oplus ...$$

Tenzorszorzásra az Euler osztályok összeadódnak, és adódik

$$e(Pol^3S^2) = 3\alpha(2\alpha + \beta)(\alpha + 2\beta)3\beta.$$

$c_1 = \alpha + \beta$ és $c_2 = \alpha\beta$ világos, ezzel kifejezhetjük a fenti egyenlőséget $9c_2(2c_1^2 + c_2)$ alakban. $c_1 = s_1,\ c_2 = s_{11}$, átírunk mindenkit Schur polinomokba. $s_1^2 = s_2 + s_{11},\ s_2^2 = s_{22} + ...,\ s_2 s_{11} = 0 + ...$, tovább írva $9s_{11}(2(s_2 + 2_{11}) + s_{11}) = 27s_{22}$. Dirr. □

Hogy általánosodik ez? d fokú hiperfelület P^n-ben, mikor lesz rajta véges sok egyenes? Az előbbi dologhoz hogy végigmenjen $d + 1 = dim(Gr_2(n)) = 2(n-2)$, vagyis $d = 2n - 5$. $n = 4$-re most kaptuk meg hogy a válasz 27, $n = 5$-re kb 2825. Ezt még meg lehet próbálni esetleg kézzel.

5.8. Állítás. $\sigma_{1^l} = c_l(S^v)$.

Bizonyítás. Topológia: $c_d(E^d) = 0$ ha $E^d = E' \oplus \mathbb{C}$.
Geometria: s szelése E-nek, transzverz a nullára, akkor a 0 őse reprezentálja $c_d(E)$-t.
Általánosabban $c_{l+1} = 0$ ha $E^d = E' \oplus \mathbb{C}^{d-l}$. És a geometrie hozzá, hogy léteznek s_i szelések $i = 1, ..., d-l$ amik minden pontban lin ftlenek. Ekvivalensen létezik az $M \to Inj(\mathbb{C}^{d-l}, E) \subset Hom(C^{d-l}, E)$ nyalábnak egy szelése. $Hom \setminus Inj = \overline{\Sigma_1}$. Ha s egy olyan szelése a Hom-nak, ami transzverzális $\overline{\Sigma_1}$-re, akkor a $\overline{\Sigma_1}$ őse pont c_{l+1}-et reprezentálja. □

Olivér házija lol. $\int_{Gr_2(\mathbb{C}^5)}[\sigma^6] = 4$. *Ez more or less a Grassmann projektív foka*

5.9. *Házi.* $\int_{Gr_2}[\sigma_1]^{2n-4} = ?$

$codim\ Gr_2(\mathbb{C}^n) \subset P(\Lambda^2\mathbb{C}^n) = ...$, nem világos hogyan lesz ebből becslés, perturbálva felsőt vagy alsót kapunk a fokra.
$Gr_k(\mathbb{C}^n)$ mint sokaság izomorf $Gr_{n-k}(\mathbb{C}^n)$-el világos módon. Megadunk konkrét izomorfizmusokat, és megnézzük mi történik a kedvenc objektumainkkal. $Gr_k(W) = Gr_{n-k}(W^v)$ választással lesz természetes minden.

$$\delta : W \supset V \mapsto Ann(V) = \{f : W \to \mathbb{C} : f|_V \equiv 0\}$$

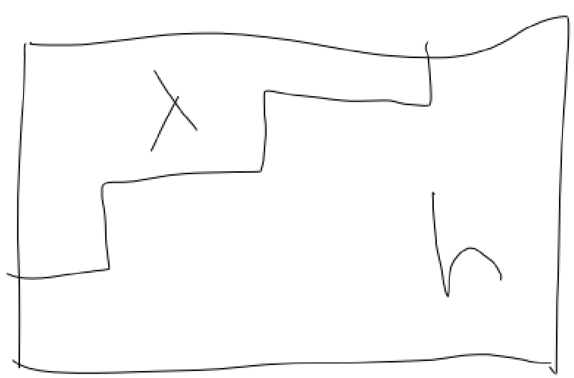
Hogy néz ki $\delta^*(S^{n-k})$? ez pont Q^v lesz, a tautologikus nyaláb merőleges kiegészítője. $\delta(\sigma_\lambda(F.))$ az $F.$ zászlóhoz tartozó Schubert cella képe mi lesz? Pont $\sigma_{\lambda^T}(F^T)$, a leképezés a választott zászlóhoz rendel egy másikat a képben az annullációval, de a tartalmazás megfordul.

5.10. Állítás (Emlékeztető)**.** $[\sigma_\lambda] = s_\lambda(c(S^v))$ *az eddigiek szerint ez továbbá egyenlő* $= s_{\lambda^T}(c(Q))$

Definiáljuk $s_{\lambda^T} := \Delta_\lambda$-t.

5.11. Állítás. $c_j(Q) = (-1)^j s_{1^j}(c(S))$

Ebből következik, hogy $c_j(Q) = s_{1^j}(c(S^v))$. Az egyiket elégséges megérteni, mivel: $[\sigma_{\lambda^T]} = \delta^*[\sigma_\lambda] = \delta^* s_{\lambda^T}(c(S^v)) = s_{\lambda^T}(c(Q))$ $x_1, .., x_k$ a Chern gyökei S^v-nak azt jelenti, hogy $c(S^v) = \Pi(1 + x_i)$, ergo $c_j(S^v) = E_j(x_1, .., x_k)$ a j. szimmetrikus polinommal. Most állítjuk hogy $c_j(Q) = H_j$, ahol H_j a j. teljes szimmetrikus polinom[6][7]. Ugyanakkor mivel a két osztály egymás inverze $c(Q) = \Pi\frac{1}{1-x_i}$.[8] Másként írva $s_\lambda(E) = \Delta_\lambda(H)$.
Ha $|\lambda| + |\mu| = k(n-k)$, akkor szeretnénk kiszámolni a $[\sigma_\lambda][\sigma_\mu]$ szorzatot. Állítjuk, hogy ez $[*]$ vagy pedig 0 attól függően, hogy a következő eset áll-e fenn a partícióikkal.



5. ábra. Komplementer partíciók, amikor $[*]$ a szorzat.

Bizonyítás. Vegyük a duális zászlót $\overline{F.}$, ahol $\overline{F_i} =< e_n, .., e_{n-i+1} >$.

5.12. Állítás. $\Omega_{\overline{\lambda}}(\overline{F.}) = B^- V_{I(\lambda)}$[9]

Bizonyítás. hf □

5.13. Tétel. $\Omega_\lambda \pitchfork \Omega_\mu(\overline{F.})$

[6] nem csak azok a tagok, amik minden monomban első fokon szerepelnek, hanem az összes j fokú homogén monom összege
[7] $H_1 = E_1 = \sum x_i,\ H_2 = \sum x_i^2 + \sum_{i<j} x_i x_j, ...$
[8] az x_i-k vitruális vonalnyalábok c_1-ei tehát a dualizálásnál mind előjelet váltanak, $c(S) = \Pi(1 - x_i)$
[9] $\overline{\lambda}$ a duális partíció

Bizonyítás. Legyen V tetszőleges. Világos, hogy $\mathfrak{b}^+ + \mathfrak{b}^- = \mathfrak{gl}(n)$. Mivel $\varphi : GL(n) \to Gr : g \mapsto gV$ tranzitívan hat, $d\varphi : \mathfrak{gl} \to T_V Gr$ szürjektív, és készen vagyunk. $\square$

Ebből következik, hogy a Schubert cellák erős értelemben transzverzálisak, sztrátumpáronként.
Ha λ és μ komplementer méretűek, akkor $\dim \Omega_\lambda \pitchfork \Omega_\mu(\overline{F.}) = 0$, vagyis a metszet véges sok pont. Ezek a pontok $B^+ \cap B^- = \mathcal{T}$ invariánsak. Mivel a tórusz összefüggő, ezért ez a halmaz pontonként invariáns. A diagonális mátrixokra invariáns alterek pontosan a V_I koordinátaalterek. Ezzel készen vagyunk, hiszen minden Schubert cella pontosan egy ilyen alteret tartalmaz, és megkapjuk amit állítottunk, és a két partícióhoz rendelt altérnek egybe kell esnie, máskülönben a metszet egész egyszerűen üres. $\square$

5.14. *Házi.* $[\sigma_\lambda][\sigma_\mu] = 0$ ha $\overline{\mu}$ belelóg λ-ba (elforgatjuk, és kapunk pont mint az előbb a komplementáris esetben).

5.15. Következmény. *$X \subset Gr$, és vegyük a kohomológia osztályát $[X] = \sum a_\lambda[\sigma_\lambda]$, akkor következik a dualitás miatt, hogy $a_\lambda = [X][\sigma_{\overline{\lambda}}] \geq 0$ hiszen komplex dolgok pozitívan metszik egymást.*

6. Reprezentálhatóság

6.1. Chow-csoport

Legyen X sima varietás. Definiáljuk $A_i(X) :=<$ i dimenziós részvarietások $>$ / $\sim$-t, egy hatalmas szabad Abel csoport, mod egy ekvivalenciareláció. $\sim$ a racionális ekvivalencia, $Y_1 \sim Y_2$ pontosan akkor, ha létezik $V \subset P^1 \times X$ varietás, és két pont P^1-ben, hogy a szeletek Y_1 és Y_2.[10] Ez azt mondja nagyjából, hogy nemcsak hogy átdeformálható egymásba a két varietás, hanem ez az egyenleteik szintjén is megtehető. Nem ekvivalens pl egy pont és két pont P^2-ben. Definiáljuk végül $A^i(X^n) := A_{n-i}(X^n)$.
Ha $Y \subset X$, akkor hozzá vehetjük a $[Y] \in H^*(X)$ reprezentált kohomológiaosztályt

6.1. Állítás. *Ez a kohomológiaosztály vétel indukál egy gyűrűhomomorfizmust $cl : A^i \to H^i$.*

Tipikusan nagyon buta, senem mono senem epi.

6.2. Állítás. *Ha X-nek van affin[11] sztratifikációja, akkor cl egy izomorfizmus.*

6.3. *Példa.* Triviális példa a tórusz, van páratlan kohomológiája, tehát nem lehet izo a *cl* cikluslelképezés.

Találjunk negatív önmetszésű fele dimenziós varietást. $E^n \to X^n$ egy vektornyaláb, vegyük a projektív lezártját, $\bar{E} := P(E \oplus \mathbb{C})$-t. Azt állítjuk hogy itt a nullszelés képe pont megfelel. $e(E) = k[* \subset X]$ persze, és látványosan teljesül hogy $[Z]^2 = k[* \subset \bar{E}]$. Legkisebb példa $\tau \to P^1$. Ezzel kapunk egy $X = P(\tau \oplus \mathbb{C}) \to P^1$ nyalábot. Ezt állítjuk, hogy meg lehet kapni a következő módon is: Vegyünk egy $L \subset \mathbb{C}^3$ egyenest, $x = [L] \in P^2$ fixálva, ekkor $X = \{(l,p) : x \in l, p \in l, l \subset P^2 \text{ egyenes}\}$. Vegyük észre, hogy ez pont P^2 felfújása az x pontban. Ennél is egyszerűbb a $\mathbb{C}^2$-t felfújni.

$$\mathbb{C}^2 \leftarrow \tau \to P^1$$

[10] totál nem trivi, hogy ez ekvivalencia
[11] $\mathbb{C}^k$-kkal van kimerítve

A fenti diagramot projektivizáltuk az imént, és ebből látszik az iménti felírás. $X \subset P(\mathbb{C}^3/L) \times P^2$-be beképezhetjük a blowup nyalábos felírását, a második komponensre való vetítés pont a blow-down[12]. Az első faktorra való vetítés visszaadja a fibrálást amiből kiindultunk.
Tekintsük egy egyenes ősét:$\Gamma = \beta^{-1}(l_1)$ úgy, hogy $l_1 = [V_1] \not\ni x$. Ezzel kapunk egyértelműen egy "egyenest" fent, ha egy más egyenest emelünk fel, ami átmegy x-en, akkor megkapjuk a visszahúzásnál a kivételes divizort Z-t, és a strict transzformot, jelöljük Λ-val.[13] Állítjuk, hogy $[Z] + [\Lambda] = [\Gamma]$. Basically lineáris kombinációit vehetjük a két egyenest megadó vektoroknak, és ezt felemeljük. A szorzótáblát is megkapjuk, $[\Gamma]^2 = 0,\ [Z]^2 = -1,\ \Lambda Z = 1,\ \Gamma Z = 0$.
Legáltalánosabban kérdezhetjük valamilyen vektornyaláb egy grassmannizáltjának a kohomológiáját. $H^*(Gr_k(E^n \to X)) = H^*(X)[c_1, ..., c_k, \bar{c}_1, ..., \bar{c}_{n-k}]/(c\bar{c} = c(p^*E))$, ahol $Gr_k(E) \xrightarrow{p} X$ a vetítés. Világos hogy az adott relációnak teljesülnie kell, az hogy nincs több, a Leray-Hirsch tételből következik, egy nehéz számolás.

6.4. Tétel. *$F \to T \to X$ fibrált nyaláb, és léteznek $\bar{f}_1, ..., \bar{f}_k \in H^*(T)$ osztályok úgy, hogy $< f_i = \bar{f}_i|_F >= H^*(F)$ szabadon generál, plusz még valami feltétel amire nem emlékszünk, akkor $H^*(T) = H^*(X) \otimes H^*(F)$ mint $H^*(X)$ modulus.*

Ergo minden elem $\alpha = \sum p^* a_i \bar{f}_i$ alakban fog előállni egyértelműen.
Visszatérve az eredeti példához, mi lesz $H^*(Gr_1(\tau \oplus \mathbb{C})) = H^*(P^1)[c_1, \bar{c}_1]/((1 + c_1)(1 + \bar{c}_1) = 1 - [*])$. Ebből kapjuk, hogy $c_1 + \bar{c}_1 = -[*]$, és $c_1\bar{c}_1 = -c_1(c_1 + [*]) = 0$. A gyűrű végső soron $\mathbb{Z}[H, c_1]/(H^2, c_1^2 + c_1 H)$. $A^1 =< H, c_1 >$, és látjuk a szorzótáblát, $H^2 = 0,\ c_1 H = Hc_1 = 1,\ c_1^2 = -1$.

6.5. *Házi.* Mi történik akkor, ha P^2 helyett P^n-et fújjuk föl?

X sima algebrsi var. $Y \subset X$ részvar, múltkor volt $[Y \subset X]$-et, az ő kohomológiaosztályát. Y-t sztratifikáljuk, $Y \setminus singY := Y_0$, csupa páros dimenziós sztrátumokkal. $Y_0 \subset X \setminus singY$ ez egy sima részsokaság, neki van egy valódi kohomológiaosztálya $H^{2d}(X \setminus YingY)$-ban, és mivel $codimSingY \geq 2d + 2$, ezért $H^{2d}(X)$-ből a megszorító leképezés vlaójában izomorfizmus. Az $[Y]$ osztály az Y-ra támaszkodik, ergo $[Y]|_{X \setminus Y} \equiv 0$. Tekintsük a $ker(|_{X \setminus Y}) = A_Y$ "elkerülő" ideált. Ha Y sima, akkor $A_Y \cap H^i(X) = 0$, hogyha $i < 2d$, és $< [Y] >$ ha $i = 2d$. Ez a Thom-izomorfizmusból, és egy kivágásból látszik. $H^i(X, X \setminus Y) \to H^i(X)$ képe kell a pár egzakt sora miatt, és a source kivágás és a Thom-izo miatt pont $H^i(\nu(Y \subset X), \nu(Y \subset X) \setminus 0) = H^{i-2d}(Y)$. Magasabb grádicsokon nem tudni mi lesz, mindenféle izgalmas geometria. Ha $f : Y \to X$, akkor létezik $f : H^i(Y) \to H^{i+2d}(X)$ ha f proper.

6.6. Állítás. $[\sigma_l] = c_l(Q)$

$Gr_k(\mathbb{C}^n)$-ben vagyunk.

Bizonyítás. Kulcslépés, szeretnénk σ_l-et előállítani elfajulási helyként. s legyen egy szelése $hom(\mathbb{C}, Q) = Q$-nak, ha $s \pitchfork 0$, akkor $[s^{-1}(0)] = e(Q)$. Az Euler osztály obstrukció arra, hogy van-e triviális összeadandója a nyalábunknak, és hasonlóan a többi Chern osztály is azt obstruálja, hogy van-e $d - l + 1$ darab minden pontban lineárisan független szelésünk, ami ekvivalens azzal, hogy $Hom(\mathbb{C}^{d-l+1}, E)$-nek van egy minden pontban injektív. Ha $s \in \Gamma(Hom(\mathbb{C}^{d-l+1}, E))$-nek és $s \pitchfork \bar{\Sigma}^1(\mathbb{C}^{d-l+1}, E)$.[14][15]

[12] $\pi_2 =: \beta$

[13] ha egy terünk sztratifikálva van affin módon, akkor egy fölötte levő vektornyaláb projektivizáltja is, tehát izomorfizmus lesz a cl ciklusleképezés

[14] $\Sigma^i(\mathbb{C}^a, \mathbb{C}^b) \subset Hom(\mathbb{C}^a, \mathbb{C}^b) : corank\phi = i$

[15] Σ^1-ben tehát a nem-injektív függvények vannak

Mindezek után állíthatjuk, hogy $[s^{-1}(\Sigma^1)] = c_l$, illetve momentarily elhisszük, mindenki látta már úgy is. Le kellene gyártani egy szelést ami pont σ_l-et adja. $Hom(\mathbb{C}^n, Q)$-nak van egy tautologikus szelése, hiszen Q-t a triviális nyalábból kaptuk faktorizációval. Megszorítva egy megfelelő dimenziós altérre kapjuk egy szelését $Hom(\mathbb{C}^{n-k-l+1}, Q)$-nak.
Két állítás, ez az $s \pitchfork \bar{\Sigma}^1$, és hogy az ős pont megfelelő. Egy V vektortér pontosan akkor van az ősben, hogyha $\{dim V \cap F_{n-k+l-1} \geq 1\}$ teljesül, ez pedig pontosan σ_l-et adja. $\square$

6.7. *Házi.* Σ^i-k sokaságok, mi a dimenziójuk?

6.8. *Házi.* Lássuk be hogy a fenti s valóban transzverz $\bar{\Sigma}^1$-re.

6.9. Állítás. $codim \Sigma^1 \subset Hom(\mathbb{C}^a, \mathbb{C}^b) = a - b + 1$

Szorítsuk meg c_l-t $M \setminus s^{-1}(\bar{\Sigma}^1)$-re, itt látványosan nulla lesz hiszen van $d - l + 1$ független szelés, pont ezt adja az s. Mivel ezek karakterisztikus osztályok $c_l(E)|_{M \setminus s^{-1}\bar{\Sigma}^1} = c_l(E|_{M \setminus s^{-1}\bar{\Sigma}^1})$, ezért látjuk, hogy $u[...] = c_l(E)$. Az elv, és amiről az ekvivariáns kohomológia szól, hogy ez az u nem függ az E nyalábtól.

6.10. *Házi.* Keresni egy nyalábot, amin ez az u kiszámolható.

Transzverzalitás diszkusszió. $f : M \to N$ sima, $Y \subset N$ részsokaság.

6.11. Állítás. *$f \pitchfork Y$ pontosan akkor, hogyha $f^{-1}Y = X$ sokaság és $\nu X \subset M = f^*\nu Y \subset N$.*
Ha $X \pitchfork Y$ részsokaságok M-ben, akkor $\nu X \cap Y = \nu X|_\cap \oplus \nu Y|_\cap$.

6.12. Következmény. *$f : M \to N$, stb mellett azt kapjuk, hogy $[f^{-1}(Y)] = f^*[Y]$.*
A másik szituációban pedig azt látjuk, hogy $[X][Y] = [X \cap Y]$.

6.13. *Házi.* A Thom osztályok szorzódnak, ha nyalábokat összeadunk, feladat ebből egy legalább formálisan értelmes állítást kibütykölni.

X, Y legyenek részvarietások, mi történik velük ugyanebben a setupban?

6.14. Definíció. $f \pitchfork Y$ ha minden sztrátumra transzverzális.

Sokszor elég, hogy az a halmaz ahol f transzverz Y sima részére nyílt Y-ban és $f^{-1}(Y \setminus Y_\pitchfork)$ kodimenziója nagyobb mint Y-e.

7. Transzverzalitás

Transzverzalitást tisztázzuk ma. Egyszer a Kleinman-Bertini, ha G tranzitívan hat M-en, $A, B \subset M$ részvarietások, akkor létezik $g \in G$ hogy $A \pitchfork gB$, sőt létezik egy $U \subset G$ Zariski nyílt, aminek minden eleme tudja ezt.
Másszor az általánosított Bertini, $E \to M$ vektornyaláb, B vektortér és $\phi : B \to \Gamma(E)$ lineáris leképezés, és $\Phi : B \times M \to E$ szürjektív, ahol $\Phi : (b, m) \mapsto \phi(b)(m)$. Ekkor ha $W \subset E$ részvarietás, akkor létezik $\emptyset \neq \Omega \subset B$ nyílt, hogy $\phi(b) \pitchfork W : \forall b \in \Omega$.

7.1. Lemma. *$\Phi : B \times X \to Y$ sima sokaságok közötti sima leképezés és $W \subset Y$ részsokaság, $\Phi \pitchfork W$, akkor létezik $U \subset B$ nemüres nyílt, hogy $\forall b \in U : \Phi(b, \cdot) \pitchfork W$.*

Bizonyítás. Legyen $\Omega = \{b \in B : \phi(b, \cdot) \pitchfork W\}$, és definiáljuk $W_\phi := \Phi^{-1}(W)$. Észrevétel: feltehetjük, hogy ez az őshalmaz legalább $\dim B$ dimenziós, ellenkező esetben a B-re való vetítésnél egy tipikus pont őse üres lesz a szorzatban, és az üres metszés transzverzális.
$B \times X \xrightarrow{\pi}_B B$, ezt megszoríthatjuk W_Φ-re (ezt π-vel jelöljük simán), és azt állítjuk, hogy $reg_{\pi|_{W_\Phi}} \subset \Omega$.
A Saard lemma miatt tudjuk, hogy $B \setminus Reg_\pi$ nullmértékű, és a kritikus pontok halmaza egy részvarietás, hiszen a Jacobi elfajulása pont ilyen algebrai feltételeket jelent, és emiatt készen vagyunk, valóban Zariski nyílt Ω.
Most azért az állítást még belátjuk. $\Phi \pitchfork W$ azt jelenti, hogy

$$T_{\Phi(b,x)}Y = T_{\Phi(b,x)}W + T\Phi(T_{(b,x)}(B \times X)).$$

Van egy másik egyenlőségünk is mivel $b \in reg_\pi$, névleg

$$T_{(b,x)}W_\Phi + T_{(b,x)}(\{b\} \times X) = T_{(b,x)}(B \times X).$$

Most alkalmazzuk $T\Phi$-t erre a második egyenletre.

$$T\Phi(T_{(b,x)}W_\Phi) = T_{\Phi(b,x)}W \cap T\Phi(T_{(b,x)}(B \times X))$$
$$T\Phi(T_{(b,x)})(\{b\} \times X) = T\Phi_b(T_x X)$$

és ebből

$$T_{\Phi(b,x)}W + T\Phi_b((T_x X)) \supset T\Phi(T_{(b,x)}(B \times X))$$

Alkalmazva a transzverzalitási azonosságot

$$T_{\Phi(b,x)}Y = T_{\Phi_b(x)}Y = T_{\Phi(b,x)}W + T\Phi_{(b,x)}T_{(b,x)}(B \times X) = T_{\Phi_b(x)}W + T\Phi(T_x X)$$

és megkaptuk a kívánt transzverzalitást. □

Most alkalmazzuk a dolgot hogy belássuk Kleinman-Bertini tételét. $\Phi : G \times A \to M \supset B$, ahol A, B simák elöljáróban.

7.2. Állítás. *A mostani setupban $\Phi \pitchfork M$ is teljesül.*

Bizonyítás. Ez azért igaz, mert a hatás tranzitív. □

Tehát $\Phi \pitchfork B$ speciálisan, és az előbbi lemmából készen vagyunk. Ha nem sima részvarietások, akkor a megfelelő nyíltakat minden párra össze kell metszeni a sima sztratifikációjánál A, B-nek.
Az általános esetben $\Phi : B \times M \to E$, ki kéne csiholni hogy a függvény szürjektivitásából következik ez a deriváltjára is.
Először is, ez egy lokális kérdés.

8. Inflexiós egyenesek száma

$f \in Pol^d(\mathbb{C}^n)$, kapjuk $Z_f \subset P\mathbb{C}^n$, és végig feltesszük, hogy $n = 3$ Az egyenesek halmaza $Gr_2(\mathbb{C}^3) = P{\mathbb{C}^3}^v$

8.1. Definíció. Egy $V \in Gr_2^3$ egyenes inflexiós egyenes, hogyha $f|_V = f_1^3 q$, ahol $f_1 \in Pol1^1$.

Meg akarjuk érteni a $Pol^d(\mathbb{C}^2)$. Észrevétel, hogy ezek a kétváltozós polinomok lineárisak szorzataiként állnak elő. A projektivizáltja a P^1 beli pont $d-$-esek, ez egy különleges jelenség, a szimmetrikus szorzat általában nagyon csúnya tér.

$$Y_3(d) := \{p \in Pol^d : \exists l \in Pol^1 : p = l^3 q \& l \not| q \& \text{q minden gyöke különböző}\}$$

A lezártja ennek a térnek elfelejti az utolsó két feltételt. Ennek a halmaznak a kodimenziója 2.

8.2. *Házi.* $Y_2(d)$ egy hiperfelület, mi az egyenlete?

Észrevétel, ez az $Y_3(d)$ halmaz, meg a lezártja is $GL(2)$ invariáns[16]. A $Pol^d(S^2) \to Gr_2\mathbb{C}^3$ nyalábot vizsgáljuk[17], az invariancia miatt lesz értelmes ez a nyaláb, minden fibrumban értelmes a d-fokú polinomok tere, mivel ez $GL(2)$ invariáns ezért ez összeragad értelmesen. $S^2 = P \times_{GL(2)} \mathbb{C}^2$, és ezzel analóg módon csináljuk most is. Ebben csücsül az $\bar{Y}(d)(S^2)$. Van egy szelése, $\sigma_g(V) = F|_V$. Az inflexiós egyenesek ennél a szelésnél a részvarietás öse lesz, jelöljük ezt $\bar{\mathcal{T}}_3 Z_f$. Az általános Bertiniből kapjuk, hogy az f-hez tartozó szelés transzverzális az $\bar{Y}_3$-ra, vagy akármilyen más fix részvarietására a polinom nyalábnak.

$$[\bar{\mathcal{T}}_3 Z_f \subset Gr_2\mathbb{C}^3] = \sigma_f^*[\bar{Y}_3(d)(S^2) \subset Pol^d(S^2)]$$

Egy általános síkgörbének véges sok inflexiós egyenese lesz ezért, hiszen a diszkrimináns halmaz 2 kodimenziós, $Gr_2\mathbb{C}^3$ pedig 2 dimenziós.
Fel kell oldani ezt a szinguláris részt, nincs nyaláb aminek ez lenne a transzverz szelésének a nullása. Megpróbáljuk a fibrumot feloldani először, majd ezt elvégezzük minden fibrumban. Megcsináljuk több módon is. Elékszítjük a $\tilde{Y} := \{(p, [l]) : p = ql^3\} \subset Pol^d(\mathbb{C}^2) \times P(Pol^1(\mathbb{C}^2))$.[18] Az első koordinátára való projekció lesz a keresett feloldás, az látványos, hogy $Y_3(d)$ felett bijekció, hiszen ott csak egy háromszoros gyök van. Látni kellene még, hogy ez valóban sima, ehhez tekintjük a második koordinátára vetítés fibrumát. Ez látványosan egy $Pol^{d-3}(\mathbb{C}^2)$, ebből szeretnénk konkludálni a simaságot, illetve azt hogy ez egy vektornyaláb P^1 felett. Vegyük a $Pol^{d-3}(\mathbb{C}^2) \otimes Pol^3(\mathbb{C}^2/\gamma) =: E$ nyalábot, ahol γ a tautologikus nyalábja $P^1(\mathbb{C}^2)$-nek (eddig S^1-el jelöltük volna), máshogy jelölve ez $((\mathbb{C}^2/\gamma)^v)^{\otimes 3}$. Megadunk egy $E \to \tilde{Y}$ leképezést. $E \to \tilde{Y}$ $q \otimes \phi^{\otimes 3} \mapsto (\tilde{\phi}^3 q, [\tilde{\phi}])$ egy függvény.

8.3. *Házi.* Megkonstruálni ennek az inverzét $\tilde{Y} \to E$.

8.4. Következmény. *E izomorf $\tilde{Y}$-al $GL(2)$ ekvivariáns módon.*

Most akarjuk ezt globálisan. Mi lesz a totális tér? Kicseréljük a konstrukcióban $\mathbb{C}^2$-t S^2-re, tehát a bázis $P(S^2)$, ami egy flagsokaság. Efölött már két tautologikus nyaláb is van, ezeket is S^2, S^2-vel jelöljük.

$$\mathbb{E} \to P(S^2) = Fl(\mathbb{C}^3)$$

A totális tér tehát $Pol^{d-3}(S^2) \otimes Pol^3(S^2/S^1)$, megszorulva $\bar{Y}_3(d)(S^2)$ fölé látjuk, hogy ez globális feloldás. Eisenbach Harris 32-64.
A $Pol^d(S^2) \to Fl$ nyalábnak van egy szelése $\bar{\sigma}_f$, ami gyakorlatilag a visszahútása σ_f-nek. Ugyanannyi inflexiós egyenest látunk a Flagben is ha meggondoljuk. Végső soron így $[\mathbb{E} \subset Pol^d(S^2)]$-t akarjuk kiszámolni. Ez úgy tud menni, hogy $e(Pol^d S^2/\mathbb{E})$.

[16] a hatás a prekompozíció
[17] S^2 a tautologikus nyalábja
[18] a második tag egy P^1

8.5. *Házi.* $F \le E$ résznyaláb, akkor $[F \subset E] = e(E/F)(= e(E)/e(F))$.

Kiszámoljuk az Euler osztályt most. $\zeta = c_1({s^1}^v)$ és $\eta = c_1((s^2/s^1)^v)$. Következik, hogy $c_1({S^2}^v) = \zeta + \eta$ és $c_2({S^2}^v) = \zeta\eta$. A $Pol^d(S^2)$ nyaláb Chern gyökei a két "vonalnyaláb komponensének" az összes lehetséges d fokú tenzorszorzatának az összegei generálják

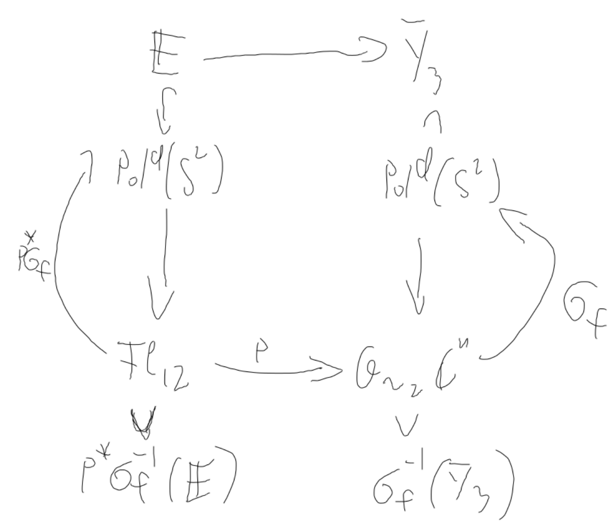
$$Pol^d(S^2) = \bigoplus (L^{\otimes i} \otimes L'^{\otimes d-i})$$

8.6. *Házi.* kiszámolni

Emlék, $\bar{Y}_3(d) \subset Pol^d(S^2) \to Gr_2(\mathbb{C}^n)$ *egy függvényhez tartoik egy* σ_f *szelése ennek a nyalábnak, az* $\bar{Y}_3(d)$ *őse ennél a szelésnél pont a flex egyenesek.* $P = GL(S^2) \to Gr_2\mathbb{C}^n$ *az asszociált keretnyaláb, és ezzel legyárthatjuk* $P \times_{GL(2)} \bar{Y}_3(d) = \bar{Y}_3(d)(S^2)$*, és ezt rezolváljuk, hiszen a háromszoros gyökkel bíró d fokú polinomok tere* $\bar{Y}_3(d)$ *szinguláris. A rezolúciója egy fibrumnak a* $E = Pol^{d-3}(\mathbb{C}^2) \otimes Pol^3(\mathbb{C}^2/\gamma) \to P(\mathbb{C}^2)$ *nyaláb*[19]*. Észrevéve, hogy E-n hat* $GL(2)$*, és legyárthatjuk az* $\mathbb{E} = P \times_{GL(2)} E \to P \times_{GL(2)} P\mathbb{C}^2 = PS^2$ *nyalábot, mint a fibrumonkénti rezolúció. Észrevettük, hogy ez egy (magasabb dimenzióban részleges,* $n = 3$*-ra teljes) zászlósokaság,*

$$PS^2 = Fl_{12}(n) = \{(L, V) : L^1 < V^2 < \mathbb{C}^n\}$$

Emiatt $\mathbb{E} = Pol^{d-3}(S^2 \otimes Pol^3(S^2/S^1))$*-t írunk. Továbbá* $Fl_{12}(n) \to Gr_2(\mathbb{C}^n)$*, és minden fibrum fölé vehetünk tautologikus nyalábokat, minden pont fölé odatehetjük a* V *síkot egészen, vagy az egyenest egészen* ($L, V, x \in V$ *vagy* $L, V, x \in L$)*, ez az* S^2*, illetve az* S^1*. Az* f*-et általános helyzetűnek választva minden flexen csak egy*



6. ábra. Jobb oldalon a flexek, a bal oldalon a flexek, és egy inflexiós pont rajtuk ("tanúfeloldás").

inflexiós pont van, és p egy bijekciót létesít a flex egyenesek halmaza, és az inflexiós pontok halmaza között. Ki kellene számolnunk $[\mathbb{E} \subset Pol^d(S^2)] = e(Pol^d(S^2)/\mathbb{E})$ *osztályát, itt hagytuk abba.* A flagsokaságban vesszük $\zeta = c_1((S^1)^v)$, és $\eta = c_1((S^2/S^1)^v)$, és világos hogy $c_1((S^2)^v) = \zeta + \eta$, $c_2((S^2)^2) = \zeta\eta$, mert ezek pont a Chern gyökei. $Pol^d(S^2) = Symm^d((S^2)^v)$. Adódik, hogy $\prod(i\zeta + (d-i)\eta) = e(Pol^d(S^2))$. Most $e(\mathbb{E})$ is kell, a tenzorszorzat egyik tagját most számoltuk ki d-re $d-3$ helyett, a másik tagból megjelenik még 3η minden szorzandóban, átindexelve $\prod_3^d(i\eta + (d-i)\zeta)$, ezt a kettőt mostmár el tudjuk osztani.

$$e(Pol^d S^2/\mathbb{E}) = (d\zeta)(\eta + (d-1)\zeta)(2\eta + (d-2)\zeta)$$

[19] $\gamma = S^1$

Nem tudjuk azonban még $\int \zeta^3,\ \int \zeta^2\eta,\ \int \zeta\eta^2$ értékeit.

$$H^*(Fl(3)) = H^*(PS^2) = H^*(Gr_2(\mathbb{C}^3))[c,\bar{c}]/(c\bar{c} - c(S^2))$$

Ezt kicsit konkrétabban, $c = 1 + c_1 = 1 + \zeta,\ \bar{c} = 1 + \bar{c}_1 = 1 + \eta$. $c((S^2)^v) = 1 + \sigma_1 + \sigma_1^2$, mert $c(Q^v)c(S^2) = 1$, utóbbi $1 + \sigma_1$, előbbi $1 - \sigma_1 + \sigma_1^2$. Mivel $Hr_2\mathbb{C}^3$ egy projektív tér, a homológiája $\mathbb{Z}[\sigma_1]/(\sigma_1^3)$. Így a teljes kohomológiagyűrű

$$\mathbb{Z}[\sigma_1, \zeta, \eta]/(\sigma_1^3, \sigma_1 = \zeta + \eta, \sigma_1^2 = \zeta\eta).$$

8.7. *Házi.* $\zeta^3, \eta^3 = 0$ ebben a gyűrűben, és $\zeta^2\eta = -\zeta\eta^2 = [*]$.

Mostmár minden megvan, hogy az integrált kiszámoljuk, megnézzük a szorzatban a kétféle tag együtthatóit.

$$\int (d\zeta)(\eta + (d-1)\zeta)(2\eta + (d-2)\zeta) = d(2(d-1) + d - 2 - 2d) = 3d(d-2)$$

Arassuk még a babérokat! Általános(abb)an a kohomologikus számolások igazak maradnak, és még mindig $p|_{p^*\sigma_f^{-1}(\mathbb{E})}$ egy feloldás, de nem biztos hogy p bijektív. Előrelökéssel számolhatjuk a flagben élő sima A varietásnak az osztályát, a szinguláris B fölött, $[B] = p_![A]$.
Az előrelökés kompatibilis a Leray-Hirsch tétellel. $F \to E \to B$ L-H, ha a fibrumra való megszorítás szürjektív a kohomológiákban, vagyis $H^*(F)$-et szabadon generálják $f_0, ..., f-k$-k és a feltétel az, hogy léteznek $\bar{f}_0, ..., \bar{f}_k \in H^*(E)$ amikre $\bar{f}_i|_F = f_i$. Vagyis ha $\alpha \in H^*(E)$ akkor $\sum P^*\beta_i\bar{f}_i$, ahol $\beta_i \in H^*(B)$. Mivel f_0 a pont osztálya, a top kohomológiába kerül, egy térfogati forma, ezért integrálva csak az ő együtthatója marad meg, vagyis $p_!\alpha = \beta_0$.
Előrelökve az előbbi számolást megkaphatjuk a flexvarietás kohomológiaosztályát $Gr_2\mathbb{C}^n$-ben.

8.8. Állítás. *A mostani setupban egy olyan osztályt keresünk, ami minden fibrum CP^1-ben a pont osztályát generálja, ez pont a tautologikus vonalnyaláb első Chern osztálya, vagyis az eddigi nyelvünkben ζ, ez lesz az $\bar{f}_0$. $q(\zeta,\eta) = \zeta p^*\beta_0 + p^*\beta_1$, mivel a bázisból jönnek, $\beta_0, \beta_1, ...$ szimmetrikus ζ,η-ban. Tehát egy kétváltozós polinomhoz kell rendelnünk egy egyel kisebb fokú szimmetrikus polinomomt, erre a következő formula lesz jó:*

$$\partial q(\zeta,\eta) := \frac{q(\zeta,\eta) - q(\eta,\zeta)}{\zeta - \eta}$$

A L-H tétel miatt egyértelműséget tudunk, és kapunk egy $p_!q(\zeta,\eta) = \partial q$.
$\zeta^3 \mapsto \zeta^2 + \zeta\eta + \eta^2 = s_2 = c_1^2 - c_2,\ \zeta^2\eta \mapsto \zeta\eta = c_2 = s_{11},\ \zeta\eta^2 \mapsto -\zeta\eta$*, és ebből ki tudjuk számolni a kívánt osztály előrelököttjét.*
A flexvarietás osztálya ezért $d(d-1)(d-2)s_2 + 3d(d-2)s_{11}$.

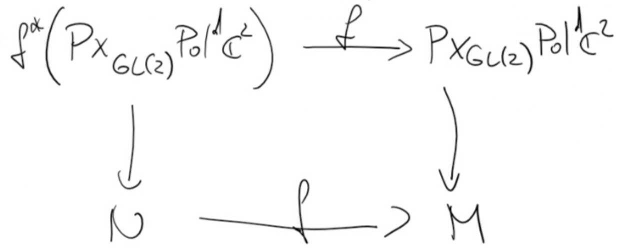
Az egyik együtthatót már láttuk, a másik azt számolja meg, hogy egy d fokú felületnek egy adott ponton át hány inflexiós egyenese van (be kell szorozni még s_2-vel, hogy megkapjuk a top dimenziót).
Jegyzet teamsben.
Az eddigi számolásokhoz megfigyeljük, hogy az n nem szerepel a formulákban! Mindegy, hogy melyik $\mathbb{C}^n$ felett akarjuk ezeket az osztályokat számolni.

8.9. Állítás. *Ez egy univerzális formula.*

Ha $P \to M$ egy principális $GL(2)$ nyaláb valaimlyen algebrai sokaság fölött, ehhez tudjuk asszociálni az $E := P \times_{GL(2)} Pol^d(\mathbb{C}^2) \supset \bar{Y}_3(d)(E) =: Y(P)$. Az állítás azt mondja, hogy $[Y(P)] := [Y \subset E] = d(d-1)(d-2)s_2(P) + 3d(d-2)s_{11}(P)$. Itt $s_2(P) = c_1^2(P \times_{GL(2)} \mathbb{C}^2 - c_2(P \times_{GL(2)} \mathbb{C}^2$, hasonlóan $s_{11} = c_2(...)$. A következő állításból fog a fenti következni:

8.10. Állítás. *$f : M \to N$ simák, akkor $[Y(f^*P)] = f^*[Y(P)]$.*

Bizonyítás. $f^*P \times_{GL(2)} Pol^d(\mathbb{C}^2) = f^*(P \times_{GL(2)} Pol^d(\mathbb{C}^2))$, mindegy hogy egy principális nyalábot húzunk vissza, vagy az asszociált nyalábját. Kapjuk a $\bar{f}$ pullback leképezést a vektornyalábok között.



7. ábra. A pullback diagram.

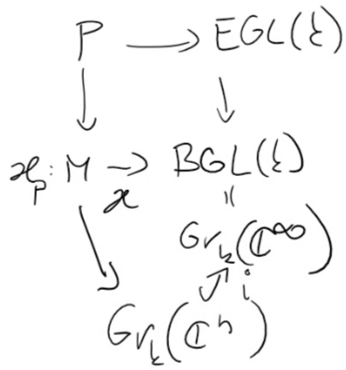
Az a megfigyelés, hogy $\bar{f} \pitchfork Y(P)$. Megfelelő azonosítás mellett $\bar{f}^*$" = "f^*. Azt használjuk, hogy $Y(f^*P) = \bar{f}^{-1}(Y(P))$, a transzverzalitással együtt ebből már valóban következik az állított természetességi tulajdonság, $[Y(f^*P)] = \bar{f}^*[Y(P)]$ és a technikai állítás miatt elhagyhatjuk a vonást. $\square$

8.11. *Házi.* Kiszámolni a felhasznált transzverzalitást.

Ugyanezen az érvelés egy általánosabb állítást is belát, bármilyen principális G nyalábra, és invariáns részvarietásra teljesül ugyanez.

8.12. Következmény. *Ha $G = GL(k)$, akkor $\exists! \alpha \in \mathbb{Z}[c_1, ..., c_k](H^*(BGL(k)))$, amire $[P \times_G Y \subset P \times_G V] = \alpha(P) = \kappa_P^* \alpha$, ahol $\kappa : M \to BGL(k)$ a klasszifikáló leképezés(e P-nek).*

Ugye $BGL(k) = Gr_k(\mathbb{C}^\infty)$, de elegendő valami véges Grassmannt választani CW-approximáció miatt.



8. ábra. A klasszifikáló leképezés és a véges Grassmanok

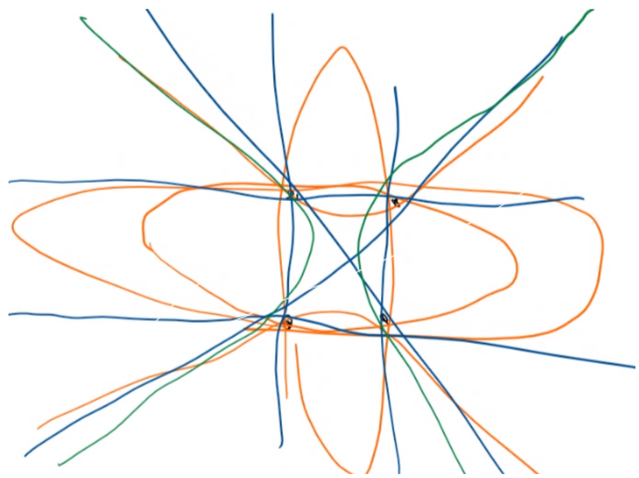
Bizonyítás. $P := GL(S^k) \to Gr_k(\mathbb{C}^n)$, erre $\alpha := [P \times_{GL(k)} Y \subset ...] \in H^d(Gr_k\mathbb{C}^n) = H^d(BGL(k))$, ahol a kohomológiagyűrűk a természtes beágyazáson keresztül azonosulnak. $\square$

Mi is történt? Volt egy $Y \subset V$ $GL(k)$ invariáns részvarietásunk, és rendeltünk hozzá egy karakterisztikus osztályt $\alpha \in H^*(BGL(k))$, ezt hívják az Y ekvivariáns kohomológiaosztályának.

9. Steiner feladat

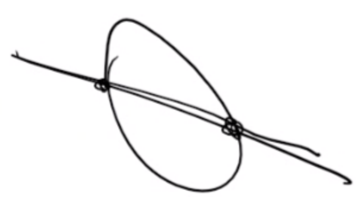
A probléma az, hogy hány kúpszelet érint 5 adott kúpszeletet. $H_Q \subset \{\text{kúpszeletek}\} = P(Pol^2\mathbb{C}^3) = P^5$ lesz a diszkriminánshalmazunk most. Explicitebben $H_Q = \{k : K \text{ érinti } Q\text{t}\}$. Ez egy hiperfelület lesz, a foka kell nekünk, amiről az derül ki, hogy 6. Elemi módon is kiszámolható, az egyenletét egy diszkriminánssal lehet számolni, de mi most egy geometriaibb érvelést fogunk csinálni. Úgy fogalmaztatik át a kérdés, hogy egy kúpszeletsor hány tagja érinti Q-t?

Rövid bevezető a kúpszeletsorokba, a kúpszeletek egy P^5-öt alkotnak, veszünk egy egyenest ebben a térben, ezek a kúpszeletsorok. Ergo veszünk két kúpszeletet, és az egyenleteiket egy projektív paraméterrel súlyozva összeadjuk. Ebből a paraméterezésből látványos, hogy 5 pont kell egy kúpszelet megadásához[20], egy kúpszeletsor tehát négy adott ponton átmenő kúpszeletek seregét is jelenti. Steiner gondolatmenete, hogy



9. ábra. Egy kúpszeletsor tagjai, ellipszisek hiperbolák és egyenespárok

$\{\text{érdekes kúpszeletek}\} = \cap_1^5 H_{Q_i}$, ennek az elemszáma (nem) $\int [H_q]^5 = 6^5$, mert kettős egyenesek vannak H_Q-ban, és egy kettős egyenesnél a transzverz metszés is algebrailag érintésként látszik. Ha ezt nem zárjuk

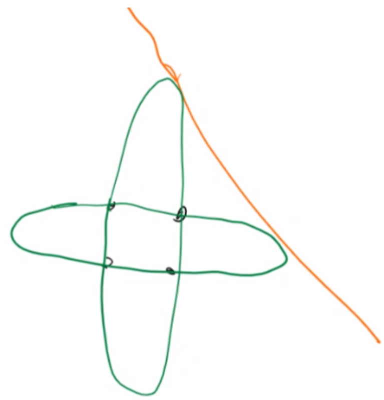


10. ábra. Kettős egyenessel vett metszés

ki akkor a válasz nyilván végtelen, így ezeket ki kell zárnunk ahhoz, hogy a feladat érdekes legyen: Hány olyan kúpszelet érint 5 adott kúpszeletet, ami nem kettősegyenes? Így már nem működnek a kohomologikus technikák, mert nem részvarietás a halmazunk, ki van dobva egy része. Adunk egy intuitív érvelést arra, hogy

[20] ld. még Geogebra

a valódi válasz 3264. Mivel az eddigi állításaink nem mennek, reflexből általánosítunk. P pont, L egyenes, Q kúpszelet úgy, hogy $P+L+Q=5$, és megkérdezzük, hogy hány (igazi[21]) kúpszelet érinti ezeket? Így kapunk több feladatot, ezek megoldásait (P,L,Q)-val jelöljük.
Lesz egy táblázatunk, elkezdjük kitölteni. $(5,0,0)=1$, öt pont megad egy kúpszeletet egyértelműen. Megyünk tovább $(4,1,0)=2$, egy kúpszeletsor tagjait kell visgálni, és pont kettő fog érinteni egy fix egyenest.



11. ábra. (4,1,0)

$(3,2,0)=4$. Az előző feladatból tudjuk, hogy egy adott egyenest érintő kúpszeletek hiperfelületének a foka 2.

$$(P,L,Q) \neq \int [H_P]^P [H_L]^L [H_Q]^Q$$

Azonban ez a formula néha azért működik, például az előbbi esetben. A kettős egyenesek nincsenek elég sokan hogy bezavarjanak, nem úgy a következő esetben!
Projektív dualitás to the rescue $P^2 \ni p \leftrightarrow \{L : p \in L\} \in (P^2)^v$, és ez a dualizálás tartja az illeszkedéseket. Ez megy tovább, egyenesek duálisa egyenes, és még a kúpszeletek is dualizálódnak $Q \mapsto \{Q\text{-t érintő egyenesek}\}$, tehát ha van egy állításunk amiben pontok egyenesek és kúpszeletek szerepelnek, akkor annak a duálisa igaz. Ebből következik, hogy szimmetrizáljuk a táblázatot innentől, $(2,3,0)=4$.
Így a táblázatunk egyfajta Pascal háromszög lesz.

9.1. Állítás. $(P,L,Q) = 2(P+1,L,Q-1) + 2(P,L+1,Q-1)$

9.2. *Házi.* Kitölteni a táblázatot.

Bizonyítás. Egy valós trükkön múlik az állított rekurzió. Először is legyen az egyik kúpszelet egy egyenespár. Egy ilyet kúpszelet kétféleképpen tud érinteni, vagy valamelyik tagot valóban érinti, vagy átmegy a metszéspontpon. Kis perturbáció után az egyenespárból hiperbola lesz, a valóban érintő kúpszeletek ezt észre sem veszik, a kettőspontban "érintő" kúpszeletek viszont megduplázódnak, a hiperbola két ágából valamelyiket érintheti. Itt nemtriviális lépés, hogy a perturbáció így valóban elvégezhető.
A másik eset az, hogy ha az egyik kúpszeletet egy pontnak választjuk, ezt úgy lehet érinteni, hogy átmegyünk rajta. Megperturbálva kapunk egy kis ellipszist, és szintén két módon lehet majd érinteni.

[21] nem kettősegyenes

Na de hogyan lehetne ezt precízen? $P^2 = \{\text{kettősegyenesek}\} \hookrightarrow P^5$, méghozzá pont a Veronese felület V. Felfújjuk a P^5-öt a Veronese képe mentén, legyen ez B. Veszünk 5 darab $H_P, H_Q, ...$-t lent, és tekintsük a strict transzformjukat. $\tilde{H}_P, ...$, ez ugye úgy alakul, hogy $\overline{\beta^{-1}(H_P \setminus V)}$, a teljes őse ez, unió a kivételes divizor, $\beta^{-1}V$. Állítás, hogy megszűntek a gondjaink, a strict transzformok metszeteinek az elemszáma már a valódi megoldást adja, és transzverzálisak is. $\int_B [\tilde{H}_Q]^5 = (5, 0, 0)$ Gond, hogy nem ismerjük $H^*(B)$-t, kellemetlen.
Az az állítás, hogy $[\tilde{H}_Q] = 2[\tilde{H}_P]+2[\tilde{H}_L]$, a precíz verziója az iménti rekurziónak. Ezért $[\tilde{H}_Q]^5 = 2^5 \sum_0^5 \binom{5}{i} [\tilde{H}_P]^i [\tilde{H}_L]^{5-i}$, és még ki kell számolnunk az $\int [\tilde{H}_P]^i [\tilde{H}_L]^{5-i}$-ket, ez pont a háromszögünk alsó sora, és a Veronese képét elkerülik, tehát ugyanaz az integrál lent és fent. $\square$