1.

Példák:

$\mathbb{C}$ részhalmazai, Riemann gömb.
$f : C^2 -> C$ irreducibilis biholomorf leképezés, $R :=< (x, y) \in C^2 | f(x, y) = 0,\ f_x f_y \neq 0 >$. Irreducibilitás összefüggőséghez kell, a deriváltak nem nullasága a térképek holomorfitásához.
Ha nem teljesül a deriváltas felétel, $f(0, y) = y^k * p(y)$, az origó legalább kétszeres gyök, tehát minden értékhez az origónál kellően közel van k darab különböző őse, és így a szingularitások felbonthatóak több riemann felületté.

Leképezések holomorfitása is definiálható az evidens módon, konform ekvivalencia. Értékmultiplicitás, pólusmultiplicitás is jóldefiniált a térképek között, viszont a reziduum **nem**!

Homotópia, univerzális fedés, fedőtranszformációk és szigorúan diszkontinuus fedés, fedőtranszformciócsoport és fundamentális csoport izomorfiája skipp.

Univerzális fedés konstrukciója:

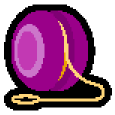
R riemann felület, $x_0 \in R$, $y \in R$. Kösse össze γ x_0-t y-al. Az új felület a $\hat{R} := \{(y, \gamma) | \gamma \text{ görbe y-ba}\}$/homotópia a görbékre, a környezetek egy pont térképkörnyezetében meghosszabítjuk az (y, γ) utat a térképkörnyezet pontjaiba, mivel a térkép egy körlap, ez egyértelmű. A térképleképezés az első koordinátára való vetítés. Haussdorfság, összefüggőség könnyű, egyszeresen összefüggő? $\hat{\gamma}(t) = (\gamma(t), \delta_t$/homotópia)=$(\gamma(t), \gamma|_{[0,t]}$/homotópia). De $\gamma(t)$ $t \in [0, g]$ nullhomotóp, és ezzel készen vagyunk.

Példák

Körgyűrűnek sáv az exponenciális leképezéssel.

Háromszor pontozott Riemann gömb, pl. a $0, 1, \infty$ helyeken, tükrözési elvvel kiterjesztjük az egységkörlapra a felső félsík leképezését ide. Következmény:Picard tétel

Az univerzális fedőterek a mi esetünkben metrikus terek, és egy infimumos konstrukcióval lehet ezt átvinni a lenti térre az ősök távolságának minimumával. Az egységkörlapon van konform automorfizmusokra invariáns metrika ami a hiperbolikus geometriának egy modellját kapjuk. A síkon is van egy invariáns metrikánk nyilván, illetve a gömbön is, de ő amúgy sem tud fedni senkit, nincsen szigorúan diszkontinuus automorfizmuscsoport. Mindez tehát az egyszeresen öf Riemann felületek osztályozásán múlik.



2.

Fedéseket részcsoportokból kapunk, a tegnapi konstrukció általánosításával.

$\gamma : [a, b] \to R$, $z_0$ból indul, w-be megy, és két $(\gamma_0, w_0) \sim (\gamma_1, w_1)$ ha $w_0 = w_1$ és $\gamma_0\tilde{\gamma}_1 \in H \leq \pi_1(R)$. A fedőleképezés a második koordinátára való projekció.

$H = G$ választással a triviális fedést kapjuk, $H = 1$-el pedig az univerzálist.

$h : S \to R$ fedés, S-en automorfizmusok egy diszkontinuus részcsoportja F, melyre $S/F = R$ és a fedőleképezést a faktorizáció adja meg pontosan akkor létezik, ha $H \lhd G$, ezeket hívjuk Galois fedésnek.

> 💡 $\pi_1(S) = H$, a faktor pedig a fedőtranszformációcsoport.

$S^1, \mathbb{C}, D^1$ a három egyszeresen összefüggő Riemann-felület, erre hajtunk (még mindig). Nehéz találni holomorf/meromorf függvényt Riemann-felületen az unicitástétel és hasonlóak miatt (nincs egységosztás!). Ugye a cél pont az lenne, hogy tetszőleges egyszeresen összefüggő Riemann felületet leképezzünk a fenti három valamelyikébe, de már akármilyen holomorf függvényt is nehéz találni.

*Egyszerű analitikus görbé*nek nevezünk egy $\gamma : [0, 1] \to M$ leképezést, ha az kiterjeszthető egy az intervallumot tartalmazó tartományra a komplex síkon (ebből szakaszonként analitikus görbe fogalma, stb). Az unicitástétel miatt csak véges sok metszéspontjuk lehet. Homológia emlékeztető.

Differenciál szokásosan a térkép visszahúzásával, ennek holomorf, meromorf verziója. Értelmezhetjük továbbá $\int_\gamma F(z)dz$ is a térképekre való felbontással

Cauchy integráltétel: Ha γ egy nullhomológ ciklus, akkor $\int_\gamma df = 0$. Reziduum is értelmezhető a szokásos módon, illetve a körülfordulási szám. Reziduum tétel zárt Riemann felületen $\sum ResF = 0$. Ez azon múlik, hogy véges sok izolált szingularitás lehet, ezek köré veszünk kis ϵ-köröket, az uniójuk nullhomológ lesz. A szingularotásokat kidobva az integráltétel szerint valóban 0-t kapunk.

▼ Következmény (értékeloszlástétel): Zárt felületen meromorf (nemkonstans) függvény multiplicitással számolva minden $\bar{\mathbb{C}}$ értéket ugyanannyiszor vesz fel.

$df/(f-a)$ meromorf differenciálra alkalmazzuk a reziduum tételt.

Harmonikus függvények, és a Poisson formula.

▼ Állítás: harmonikus függvények lokálisan egyenletesen konvergens sorozata is harmonikus.

A lok.e.konvergencia átmegy az integráláson, és a harmonikus függvényeket integrálformulával adtuk meg.

Harnack egyenlőtlenség: nemnegatív harmonikus függvény az egységkörlapon, a minimuma és a maximuma legfeljebb egymás 9-szeresei. Általánosan több kompakttal is a maximum a minimum egy λ-szorosával becsülhető (jegyzet 18. o.).

Következmény: harmonikus függvények monoton növő sorozata vagy mindenütt ∞-hez tart, vagy mindenütt lok.e.konvergens. Ehhez kell a Vitali-Montel kiválasztási tétel.

Vesszük a harmonikus függvényhez tartozó holomorfat az egységkörben, ezt tudjuk a Harnack egyenlőtlenséggel becsülni triviálisan, ezek e. korlátosak, van megfelelő lok.e. konvergens részsorozatuk. Lefedjük a tartományunkat környezetekkel, mindegyikben találunk egyenletesn korlátos részsorozatot, kiátlózva kapunk egy globálisan kovnergens részsorozatot.

Szubharmonikus függvény, ha a középértékintegrál felülről becsüli a függvényértéket (ez cirka azt jelenti, hogy a $\Delta = \nabla^2$ Laplace operátor nemnegatív).

Véges sok szubharmonikus függvény maximuma is szubharmonikus (ez elrontja a difhatóságot, jaj). Meglepő módon ez is egy jóldefiniált fogalom Riemann-felületeken is (mint a harmonikusság)! Érvényes rájuk a maximum elv, ha létezik lokális maximum egy pontban, ha lokálisan konstans.

Ha egy u harmonikus majorálja h-t a peremen, akkor mindenhol majorálja, egy Dirichlet-feladatot megoldva látjuk, hogy ha h szubharmonikus, akkor egy áttérképezése is az lesz (Halász 20. o.).

Dirichlet feladat riemann felület analitikus peremű határú tartományán megoldható úgy, hogy ne vegyen fel új értékeket. Vesszük az egyenlőtlenségeket teljesítő kompakt tartójú szubharmonikus függvények szuprémumát amik teljesítik az egyenlőtlenségeket. Egy térképkörnyezeten belül lecserélhetjük a klasszikus Dirichlet-feladat megoldására a függvényt, ezzel növelhetjük a függvényt a harmonikus majorizáció elve szerint.

3.

Emlékeztető: szubharmonikus függvények. Tudunk belőlük globális függvényeket összeragaszgatni, és erős közük van a harmonikus függvényekhez (ha egy tartományon értelmezve van egy harmonikus, és egy szubharmonikus függvény, és a peremen a harmonikus majorál, akkor mindenhol). Holomorf függvényt nehéz megadni.

- ▼ A Dirichlet feladat megoldható, ha D egy tartomány a Riemann felületen aminek minden határpontjából indul a határon analitikus ív, akkor minden folytonos korlátos függvényhez mint peremfeltételhez létezik megoldása D-n.

  Föltehetjük, hogy a peremfeltétel 0 és 1 között van. Vesszük a D-ben kompakt tartójú szubharmonikus függvények (amik tudják a peremfeltételt) ($= H$) szuprémumát, ő lesz a kandidátus a megoldásra (u).

  $r_0 \in D$, és V egy térképkörnyezete úgy, hogy még a lezártja is térképezhető, vehetjük akár az egységkörlapnak. Vegyük ennek egy sűrű részhalmazát, r_n, és $u(r_n) = \lim h_k^n;\ h_k^n \in H$.

  $h_n = \max\{h_i^j : i, j \leq n\}$, ezek is benne vannak H-ban. Vegyük észre, hogy ezek monoton nőnek, ez egy átlózás gyakorlatilag. Ezért $\forall k \in N :\ u(r_k) = \lim h_n(r_k)$.

  Mostmár legyen h_n^* a h_n-hez tartozó Dirichlet feladat megoldása V-ben (ezt tudjuk a klasszikus komplex analízisből), a környezeten kívül pedig maradjon h_n. Ez a függvény is szubharmonikus lesz, csak a határon ámenő görbékre kell ellenőrizni, de itt is igaz lesz, hiszen csak növeltük az integrandust a középértéktulajdonságnál, így a harmonikus majorálás elve miatt teljesülni fog. Egy kompakt halmazon változtattuk meg h_n-et, tehát még mindig kompakt tartójú függvényt kapunk, $h_n^* \in H$.

h_n^* monoton növő szintén, sőt harmonikus függvényhez tart a V-n (Harnack egyenlőtlenség miatt harmonikusok monoton limesze is harmonikus). Továbbá konstrukció miatt $h_n^*(r_k) \to u(r_k)$, tehát az u függvény egy sűrű részhalmazon egyenlő egy harmonikus függvénnyel, vagyis V minden pontjában az, ezt minden V-re eljátszhatjuk, tehát u harmonikus.

Kell még, hogy $\lim u(\zeta) = u(\zeta_0)$, ahol $\zeta \in D,\ \zeta_0 \in \partial D$. Vesszük egy δ sugarú környezetét ζ_0-nak D-ben (egy térképezés kis körlapjának ősképeként), ahol δ úgy van választva, hogy $|u(\zeta) - u(\zeta_0)| < \epsilon$ minden $\zeta \in \partial D$-re. Módosítjuk a függvényt hogy a $B(\zeta_0, \delta)$ határára lecsengjen, elmetszve D-vel minden komponensen harmonikus legyen, ez csak egy Dirichlet feladat megoldását jelenti. Az így kapott függvény legyen h, ez benne lesz H-ban, kompakt tartójú, és szubharmonikus, megint csak a kis körvonalon kell leellenőrizni, de mivel ott azonosan 0, a függvény nemnegatív, teljesül a középértékfeltétel. ζ_0-ban nem változtatuk az értékét, $\lim h(\zeta) = u(\zeta)$, vagyis létezik $\delta^* > 0$, hogy $\forall \zeta \in B(\zeta_0, \delta^*) \cap D$-re $h(\zeta) > u(\zeta_0) - \epsilon$, ugyanakkor $u(\zeta) \geq h(\zeta) \geq u(\zeta_0) - \epsilon$.

A másik egyenlőtlenséghez harmonikus majorálás. Konstruálunk egy másik $\tilde{u}$ függvényt a $\partial D \cap \bar{B}(\zeta_0, \delta)$-n. ζ_0-ban nem változtatunk, nagyobb egyenlő legyen u-nál itt, és folytonos. Továbbá legyen $\tilde{u} = 1$ a körvonal, és D határának metszetén (ez véges sok pont) és a körvonal határán is. Most erre oldjuk meg a Dirichlet feladatot (komponensenként), ez lesz $\tilde{h}$. Ez a függvény majorál minden $h \in H$-t V-n, nem tudjuk hogy kompakt tartójú, de nem is kell, hiszen emiatt $\tilde{h} \geq u$ is teljesül a szuprémum tulajdonságai miatt. Látjuk mostmár, hogy mivel a ζ_0-beli értékeik megegyeznek, folytonosak, ergo $\exists \tilde{\delta} > 0 : \forall \zeta \in B(\zeta_0, \tilde{\zeta}) \cap D$-re $u(\zeta) \leq \tilde{h}(\zeta) < u(\zeta_0) + \epsilon$.

Megjegyzés, nem mindig egyértelmű a Dirichlet feladat megoldása, mi most a legkisebbet konstruáltuk meg.

Legyen $D \subset C$ egy öf szép határú tartomány, z_0 egy pontja. f egy konform bijekció az egységkörrel, $f(z_0) = 0$, akkor $\log |f|$ egy *Green-függvény*.

▼ Tétel: ugyanolyan feltételek mint az előbb, de legyen a határ nemüres, $p \in D$-hez létezik egy $D \setminus z_0$-n harmonikus $u > 0$ függvény, ami a határon azonosan nulla (limeszű), és ha veszünk egy ρ térképet z_0 körül, ami z_0-t az origóba képzi, akkor $u(r) + log|\rho(r)|$ szubharmonikus, ha z_0-ban alkalmasan értelmezzük.

Először is, ha $\rho_1, \ \rho_2$ két térképezés p körül, p-t az origóba képzik, akkor $\lim_p \rho_1/\rho_2 = a \neq 0$ létezik.

Vegyük megint az összes szubharmonikus, kompakt tartójú függvényeket $D \setminus p$-n, amik 0-ba tartanak a ∂D-n, és egy választott ρ térképezéssel $h + \log|\rho|$ a p pontban is szubharmonikus. Ilyen függvény legaálbb egy van, a $-\log|\rho|$ függvény az egységkörön, és 0 kívül. Ezt a nemüres függvényhalmazt jelöljük H-val, a korlátosságot nem látjuk.

Legyen V z_0 egy térképkörnyezete, $\rho : V \to B(0,3)$ és menjen z_0 az origóba, és $h \in H$. Továbbá $M_1 = \max\{h(z)|\rho(z) = 1\}$, $M_1 = \max\{h(z)|\rho(z) = 2\}$.

Állítjuk, hogy $\exists q \leq 1 : M_2 \leq qM_1$. Ehhez Legyen u harmonikus $D \setminus \rho^{-1}(\bar{B}(0,1))$-n megoldása annak a Dirichlet feladatnak, melyre ∂D-n 0 a peremfeltétel, és 1, ha $\rho(z) = 1$. $\max\{u(z) : |\rho(z)| = 2\} = q < 1$ a maximum-elv miatt. Most az $M_1 u$ a $D \setminus \rho^{-1}\bar{B}(0,1)$ halmazon majorál tetszőleges h-t az M_1-et definiáló halmazból.

A $h^* := h + \log|\rho(z)|$ értelmes V-n, és szubharmonikus. Ebből, és a szubharmonikus függvényekre vonatkozó maximum elvből $M_2 + \log 2 = \max_{|\rho(z)|=2} h^* \geq \max_{|\rho(z)|=1} h^* = M_1$.

Következik, hogy $M_1 \leq M_2 + \log 2 \leq qM_1 + \log 2$, vagyis $M_1 \leq \log 2/(1-q)$.

Ebből látjuk, hogy korlátos, és hasonló módszerekkel mint az előbb belátható, hogy a pontonkénti szuprémum megfelelő.

4.

▼ Tétel: ugyanolyan feltételek mint az előbb, de legyen a határ nemüres, $p \in D$-hez létezik egy $D \setminus z_0$-n harmonikus $u > 0$ függvény, ami a határon azonosan nulla (limeszű), és ha veszünk egy ρ térképet z_0 körül, ami z_0-t az origóba képzi, akkor $u(r) + log|\rho(r)|$ szubharmonikus, ha z_0-ban alkalmasan értelmezzük.

Először is, ha $\rho_1, \ \rho_2$ két térképezés p körül, p-t az origóba képzik, akkor $\lim_p \rho_1/\rho_2 = a \neq 0$ létezik.

Vegyük megint az összes szubharmonikus, kompakt tartójú függvényeket $D \setminus p$-n, amik 0-ba tartanak a ∂D-n, és egy választott ρ térképezéssel $h + \log|\rho|$ a p pontban is szubharmonikus. Ilyen függvény legaálbb egy van, a $-\log|\rho|$ függvény az egységkörön, és 0 kívül. Ezt a nemüres függvényhalmazt jelöljük H-val, a korlátosságot nem látjuk.

Legyen V z_0 egy térképkörnyezete, $\rho : V \to B(0,3)$ és menjen z_0 az origóba, és $h \in H$. Továbbá $M_1 = \max\{h(z)|\rho(z) = 1\}$, $M_1 = \max\{h(z)|\rho(z) = 2\}$.

Állítjuk, hogy $\exists q \leq 1 : M_2 \leq qM_1$. Ehhez Legyen u harmonikus $D \setminus \rho^{-1}(\bar{B}(0,1))$-n megoldása annak a Dirichlet feladatnak, melyre ∂D-n 0 a peremfeltétel, és 1, ha $\rho(z) = 1. \max\{u(z) : |\rho(z)| = 2\} = q < 1$ a maximum-elv miatt. Most az $M_1 u \text{ a } D \setminus \rho^{-1}\bar{B}(0,1)$ halmazon majorál tetszőleges h-t az M_1-et definiáló halmazból.

A $h^* := h + \log|\rho(z)|$ értelmes V-n, és szubharmonikus. Ebből, és a szubharmonikus függvényekre vonatkozó maximum elvből $M_2 + \log 2 = \max_{|\rho(z)|=2} h^* \geq \max_{|\rho(z)|=1} h^* = M_1$.

Következik, hogy $M_1 \leq M_2 + \log 2 \leq qM_1 + \log 2$, vagyis $M_1 \leq \log 2/(1-q)$.

Ebből látjuk, hogy korlátos, és hasonló módszerekkel mint az előbb belátható, hogy a pontonkénti szuprémum megfelelő.

Láttuk, hogy lokálisan van Green függvény, van-e globálisan?

Állítás: Minden Riemann felület lefedhető megszámlálható sok paraméterkörnyezettel.

Definíció: *paraméterkörnyezet* egy V környezet, amin létezik $\rho : V \to D \subset C$ térképezés.

▼ Legyen R Riemann felület, V egy paraméterkörnyezet, $\rho : V \to B(0,2)$ konform bijekció. $R^* := R \setminus \rho^{-1}\bar{B}(0,1)$. Állítjuk, hogy R^* metrikus térré tehető.

Veszünk egy nemtriviális Dirichlet feladatot R^*, ez egy nemkonstans harmonikus függvényt határoz meg. Lokálisan vehetünk hozzá egy harmonikus társat, $f = u + iv$ holomorf lokálisan, nem jól definiált, egy additív konstans ambiguitás van benne. Ezért df egy jóldefiniált holomorf differenciál. Legyen $z_1, z_2 \in R^*$, és legyen $d(z_1, z_2) = \inf\{\int_\gamma |df| : \gamma \text{ a két pontot összekötő szakszonként analitikus görbe}\}$. Kérdés, hogy mért nem lehet két különböző pont távolsága 0?

Legyen $z_1, z_2 \in R^*$, U egy paraméterkörnyezete, $\rho : U \to B(0,1)$ bijekció, és γ szakaszonként analtikikus görbe közöttük, mely végig U-ban fut.
$\int_\gamma |df| = \int_{\rho(\gamma)} |g(z)||dz|$, $g(z) = \sum_k^\infty a_n z^n$, ha $\rho(\gamma) \subset B(0,\epsilon)$, akkor $|a_k/2||z^k| \leq |g(z)| \leq 2|a_k||z^k|$. Lokálisan alulról tudjuk becsülni az integrált egy pozitív számmal alulról becsülni, kívül pedig csak még messzebb vannak a pontok.

Következmény: R valóban megszámlálható sok paraméterkörnyezet uniója.

Most legyen R nem kompakt Riemann felület, $z_0 \in R$. Mikor van z_0-ra vonatkozó Green függvény R-en? Lefedjük megszámlálható sok paraméterkörnyezettel, aminek még a lezárása is paraméterezhető, a határ szép analitikus görbe, ezek halmaza P_n.

Legyen $D_n \subset R$ monoton növő nyílt részhalmazok a következő rekurzív definíció szerint. Legyen $z_0 \in P_1$, akkor $D_1 = P_1$, és ha D_n definiálva van, akkor legyen P_k a legkisebb indexű olyan paraméterkörnyezet, melyre $P_k \cap D_n \neq \emptyset$, de $P_k \not\subset D_n$, $D_{n+1} := D_n \cup P_k$. Világos, hogy $\cup_1^\infty D_n = R$, mivel $\bar{D}_n$ kompakt (és R nem az), ezért ez valóban végtelen sok tagú ez a sorozat. D_n-en van Green függvény, és nagyobb halmazon a Green függvények majorálják egymást, mert a különbség egy a határon nemnegatív harmonikus függvény lesz. Legyen g_n Green függvény D_n-en z_0-ra. Ha ez konvergens, akkor R-et *hiperbolikus*nak hívjuk (függetlenség g_n választásától, D_n-től, z_0-tól nem lesz elmondva, de megcsinálható), ha pedig mindenhol végtelenbe tart ez a sorozat, ekkor R-t *parabolikus*nak nevezzük.

Belátjuk, hogy egyszeresen összefüggő hiperbolikus Riemann felület konform ekvivalens az egységkörrel!

Legyen u egy Green függvény R-en, v a harmonikus társa (lokálisan definiált csak, vagy $\mod 2\pi i$), tekintsük az $f(z_0, z) = \exp(-(u + iv))$ függvényt, ez $R \setminus z_0$-ban értelmes, a limesze z_0-ban 0, és $|f| = e^{-u} < 1$. Világos, hogy csak z_0-ban egyenlő 0-val f, kellene mindenhol máshol is az injektivitás.

Legyen $w_0 \in R$, és tekintsük a $g(z) = (f(z_0, z) - f(z_0, w_0))/(1 - \bar{f}(z_0, w_0)f(z_0, z))$ függvényt. Ez w_0-ban nulla, és $|g| < 1$. Legyen $u^* := -\log|g|$. Állítjuk, hogy minden $g_n : D_n \setminus w_0$-n értelmezett Green függvényt majorál, ahol mindketten értelmezettek. Következik hogy ők korlátosak véges sok pontot kivéve, és konvergálnak egy $u(w_0, z)$ Green függvényhez. Tehát a $h(z) = f(w_0, z)$ függvény abszolútérétke majorál minden g_n-et, és magát g-t is. $z = z_0$-ban azt látjuk, hogy $|f(w_0, z_0)| \geq |g(z_0)| = |f(z_0, w_0)|$, ez persze eljátszható fordítva is, tehát ezek az értékek egyenlőek, és $|h(z)| = |g(z)|$, vagyis $h = \epsilon g$ valamely 1 abszolútértékű komplex számra. g egy lineáris törtfüggvénye $f(z_0, z)$-nek, $f(z_0, z) = f(w_0)$ akkor és csak akkor, ha $z = w_0$.

5.

Ott tartunk, hogy R egyszeresen összeefüggő nem kompakt Riemann felület. Ez előállt megszámlálhtóan sok paraméterkörnyezet uniójaként, $R = \cup D_n$, és $R_k = \cup_1^k D_n$ és egy pontot veszünk $z_0 \in R$. u_n a D_n Green függvénye erre a pontra, ezek monoton nőnek. Ha korlátosak valamely pontban, akkor mindenhol, és konvergensek is, ez volt a hiperbolikus eset, ezt lerendeztük, ez az egységkör.

$M_n^1 := \max\{u_n(z) : z \in D_1,\ |\rho(z)| = 1,\ \rho : D_1 \to B(0,3) \text{ térképezés}\}$, $M_n^2 := \max\{u_n(z) : z \in D_1, |\rho| = 2\}$, mint az előbbinél, a 4. e.a. elején. Most a parabolikus esetet tekintjük, vagyis amikor M_n^1 nem korlátos. Legyártunk egy $v_n := u_n - M_n^1$ függvényt. Mit tud ez? $v_n(z) \leq 0\ \forall z \in R_n \setminus \rho^{-1}(B(0,1)$, mert a Green függvény a külső peremen 0, és a belsőn a kivonással tettük nempozitívvá, a monotonitást viszont elveszítjük. Ahhoz, hogy mégis konvergens legyen kellene, hogy v_n lokálisan egyenletesen korlátos $R \setminus \rho^{-1}(B(0,1)$-en (esetleg kellően nagy n-re). Felső korlátunk a 0, alsó kellene.

Emlék a Harnack tétel: $D \subset C$ tartomány, akkor $\forall \emptyset \neq K_1, K_2 \subset D$ kompaktra $\exists q \in R$, hogy $\forall u : D \to R$ nemnegatív harmonikusra igaz, hogy $\max_{K_2} u \leq q \min_{K_1} u$ teljesül, ezt a gondolatmenetet ismételjük el Riemann felületre.

Most legyen $u = -v_n$. Ha $\exists z \in D_1 : |\rho(z)| = 2$ és $v_n(z) = M_2^n(z) - M_1^n(z) \geq -\log 2$. ezt elvileg tudjuk??

$u(z) \leq \log 2$, $\min\{u(z) : z \in \rho^{-1}(B(0,2))\} \leq \log 2$. Állítjuk, hogy $\forall n \forall\ \emptyset \neq K \subset D_n \setminus \bar{\rho}^{-1}(B(0,1))$ kompaktra $\exists q > 0 : \max_K u \leq q \log 2$, vagyis a Harnack egy változata kiterjed Riemann felületekre, ezekre a függvényekre.

> Bizonyítás teljes indukció, az alapeset maga a síkbeli Harnack. Indukciós lépésben a $K \subset D_n$ van egy kompakt. $D_n \cap D_{n-j} \neq \emptyset$, a metszetből veszünk egy K_0 nemüres kompaktot, és a síkbeli Harnack szerint $\exists \hat{q} = \hat{q}(K_0, K)$ a megfelelő tulajdonságokkal, és $\max_K u \leq \hat{q} \min_{K_0} u \leq \hat{q} \max_{K_0} u \leq \hat{q}\tilde{q} \log 2$ indukció szerint, $\tilde{q}$ az indukcióból kapott konstans a D_{k-j}-hez. Tehát valóban lokálisan

egyenletesen korlátosak vagyunk, hiszen ezek a konstansok nem függenek attól, hogy melyik függvényt választjuk.

Választunk most egy konvergens részsorozatot, vehetjük úgy, hogy v_n maga konvergál valami v-hez $R \setminus \bar{\rho}^{-1}(B(0,1))$-en.

💡 ρ a D_1 paraméterezése a három sugarú körlapra, $z_0 \in D_1$!

$\exists m \leq v_n(z) \leq M$, ha $|\rho(z)| = 2$. $v_n + \log|\rho|$ harmonikus $\rho^{-1}(B(0,3))$-on. Ha $|\rho| < 2$, akkor maximum és minimumelv miatt $m - \log 2 < v_n + \log|\rho| < M - \log 2$ teljesül. Hozzáadva $m - \log 2 - \log|\rho| \leq v_n \leq M - \log 2 - \log|\rho|$, tehát v_n lokálisan egyenletesen konvergens az egész $R \setminus z_0$-on, és így a határértéke, v harmonikus is itt, és valami Green szerű tulajdonságai vannak, nevesül $v + \log|\rho|$ harmonikusan értelmezhető az egész R-en.

Vegyük a harmonikus társát, ami megintcsak $2\pi i$ additív konstans erejéig van definiálva w-t, ebből viszont $f = \exp(-(u + iw))$ már mindenütt jóldefiniált holomorf függvény $R \setminus \{z_0\}$-ban, és egy limeszt számolva a szingularitás megszűntethető, és $f(z_0) = 0$. Kellene, hogy injektív.

Az világos, hogy csak z_0-ban nulla, és ez egyszeres nullhely, például argumentumelv miatt. $\forall\ z \in R \setminus \rho^{-1}(B(0,1) : v(z) \leq 0$, tehát $|f| = \exp(-v) \geq 1$ ugyanitt. $f \circ \rho^{-1} : B(0,3) \to C$ holomorf. Tekintsük az egységkör képét, $\delta = \min_{B(0,1)} |g| > 0$, tehát ha $|\zeta| < \delta$, akkor $g = \zeta$ pontosan egy helyen a $B(0,1)$-ben. Tehát ha $|\zeta| \leq \min\{1, \delta\}$ akkor $f = \zeta$ pontosan egyszer veszi fel multiplicitással az egész R-en (hiszen az egységkörön kívül csak egynél nagyobb értékeket vesz föl). $f(z_0, z) = f(z)$, és legyen $|\zeta| \leq \min\{1/2, \delta\}$, és $w_0 = f^{-1}(\zeta)$. Legyen most $g(z) = f(z) - \zeta$. Ez a függvény holomorf, és csak w_0-ban van nullhelye. De ha a teljes előbbi konstrukciót megcsináljuk $f(w_0, z)$ is egy ilyen függvény. $1/g$ holomorf $R \setminus w_0$-án, és w_0-ban elsőrendű pólusa van, szintúgy $1/f(w_0, z)$-re. Tehát $h(z) = 1/f(w_0, z) - a/g(z)$-nek megszüntethető szingularitása van w_0-ban valamely $a \in C$-re. Ez a h így holomorf lesz. Ha $z \in R \setminus \rho^{-1}B(0,1)$, akkor tudjuk becsülni.

$$|h| \leq 1 + |a|/|f - \zeta| \leq 1 + 2|a|$$

Tehát, hogy h egy korlátos holomorf függvény.

> Ha h nemkonstans korlátos holomorf függvény, feltehetjük, hogy $h(z_0) = 0, |h| \leq 1$, és akkor $-\log|h|$, és ez majorálja a Green függvényeket, de azt tettük fel, hogy ezt nem lehet.

Következik, hogy $1/f(w_0, z) - a/(f(z_0, z) - \zeta) = c$, vagyis $f(w_0, z)$ lineáris tört függvénye $f(z_0, z)$-nek. Ezen felbuzdulva csinálunk egy ekvivalenciarelációt. $z_0 \sim w_0$ $z_0, w_0 \in R$ pontosan akkor, ha $f(w_0, z) = L(f(Z_0, z))$, egy lineáris törtfüggvénnyel. Egy kis környezetben mindenki ekvivalens egymással, tehát az ekvivalens pontok egy nyílt halmazt alkotnak, vagyis mindenki ekvivalens mindenkivel.

> 💡 Ha két különböző függvényt konstruáltunk egy adot ponthoz, $1/f(z_0, z) - 1/f^*(z_0, z) = c$, akkor ők emiatt egy nullát fixen tartó transzformációban térnek el, tehát valóban jóldefiniált az ekvivalenciareláció.

Ha $f(z_0, w_0) = f(z_0, w_0^*)$, akkor legyen $f(w_0, z) = L(f(z_0, z))$, ekkor persze $f(w_0, w_0) = 0$, továbbá $= L(f(w_0)) = L(f(w_0^*)) = f(w_0, w_0^*)$ és ez ellentmondás, mert a nullát csak egy helyen veheti fel. Tehát a képnük injektív módon vagy az egységkör, vagy a számsík, de az egységkörön korlátosak lennének a Green függvények, tehát kénytelen a síknak lennie.

Kompakt eset

Hátra van még az eset, ha R egyszeresen összefüggő kompakt Riemann felület. Rögzítünk egy w_0-at, és $R^* = R \setminus w_0$.

> 💡 Az egyszeres összefüggőséget eddig csak ott használtuk, hogy a Green függvény exponenciálisa értelmes, mert a differenciálformáját kellett integrálnunk, és ennek kell útfüggetlennek lennie.

Vegyünk $z_0 \in R^*$. Eljátszuk az eddigi konstrukciókat, két szingularitás lesz, de értelmes lesz az exponenciális mert kompakt felületen a reziduumok összege nulla, nekünk két pólusunk lesz, nem lehet szinguláris w_0-ban, vagy megszüntethető

6.

$\bar{\mathbb{C}}$-n csak az identitás szigorúan diszkontinuus, ez nem túl izgalmas.

$\mathbb{C}$-n van az identitás, ebből megkapjuk önmagát mint faktor. $az + b$ is konform automorfizmusok, ezek közül szigorúan diszkontinuusak pontosan a $z + b$ alakúak. Ha $b \neq 0$ kapunk egy sávot a két végén összeragasztva, ergo egy nyílt henger, ami a pontozott sík az exponenciális leképezéssel. Kételemmel generált részcsoportok közül $z + w_1, z + w_2$ jó lesz pontosan akkor ha $w_1/w_2 \in C \setminus R$ (különben vagy elfajul 1 elemmel generálttá, vagy torlódni fog), ebből adódik a tórusz. Több elemmel sem fogunk tudni generálni, mert torlódásunk lenne.

Minden további esetet az univerzális fedés a félsík/körlap lesz. Ezt modellezzük $imz > 0$-val, ezen a $|dz|/Imz$ egy konform automorfizmusra invariáns metrika. A konform automorfizmusokat itt generálják az $az + b, -1/z$ alakú függvények ($a > 0, b \in R$), ezekre elég ellenőrizni, csak a reciprok kérdéses. $dw/dz = 1/z^2$, ebből $|dw| = |dz|/|z^2|$, és könnyen kiszámolható hogy valóban invariáns lesz.

A geodetikusok a peremet merőlegesen metsző körök lesznek a geodetikusok.

💡 Az egységkörön ugyanez a metrika $2|dz|/(1 - |z|^2)$.

Ha az R riemann felület $= Imz > 0/G$ alakban áll elő, egy fundamentális "tartomány" egy olyan részhalmaz, amely minden ekvivalenciaosztályból pontosan egy elemet tartalmaz.

💡 Általában nem lesz valódi (topológiai) tartomány, csak így hívjuk. Szokás néha lezárni, akkor a peremen lehetnek többszörös pontok, cserébe legalább zárt lesz.

Egyfajta fundamentális tartomány a normálpoligon. Vegyünk egy $z_0 \in H = Imz > 0$. $z \in H$ eleme a normáltartománynak pontosan akkor, ha $\forall \alpha \in G$: $d(\alpha(z), z_0) \geq d(z, z_0)$, ez ekvivalens azzal, hogy $d(z, \alpha^{-1}(z_0)) \geq d(z, z_0)$, ezeket a pontokat éppen a felezőmerőlegesekkel tudjuk kimetszeni, tekintsük $z_0, \alpha(z_0)$ pontpárok feleőzmerőlegeseit (a hiperbolikus geometriában!), és ezeket messük össze.

Minden kompakt Riemann felületnek létezik olyan fundamentális tartománya ami $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, \ldots, a_g^{-1}, b_g^{-1}$ alakú, a peremkomponensek ilyen módon ragadnak össze.

Kompakt Riemann felületnél maradunk, normálpoligonból Euler-karakterisztika. Van egy darab lapunk, l darab élünk, és v darab csúcsunk. Ebből $2-2g=1-l+v$, vegyük észre, hogy egy adott v csúcshoz tartozó szögek összege (a faktorálás előtti normáltartományban) 2π kell legyen ("körbeérünk" ha elkezdjük összeragasztani). A hiperbolikus geometriából tudjuk, hogy a normálpoligon területe arányos a szöghiánnyal $T=c((2l-2)\pi-2\pi v)=2c\pi(l-1-v)=4c\pi(g-1)$, vagyis minden kompakt Rieman felület normáltartományának területe abszolút konstansszorosa a génuszának.

Ha ω egy meromorf differenciál R-en, ami g génuszú kompakt Riemann felület, akkor a $gyök-pólus=2g-2$, ahol multiplicitással számoljuk a gyökök és pólusok számát. Ezt elegendő egyre ellenőrizni, mert amúgy meromorf függvénynek ugyanannyi pólusa és gyöke van multiplicitással kompakt R felületen. Vegyük $\omega=df$-et, ahol f nemkonstans meromorf függvény, az uniformizációs tétel szerint ilyen mindig lesz. Legyen $f:R\to\bar{\mathbb{C}}$ egymeromorf függvény. Ez valójában egy elágazásos fedés! Generikus pontnak d különböző ősképe van, genericitás itt konkrétan véges sok kivételt jelent, hiszen kompakt tereket tekintünk. létezik tehát s darab $v_i\in\bar{C}$ kritikus érték, ahol az ősképek száma nem d.

Kössük össze egyszerű ívvel a v_i pontokat, a maradék részben van egy valódi d-szeres fedésünk. Itt $2-2g=\chi=d+\sum_{j=1}^{s}k_j-d(s-1)$, ahol $k_j=\#f^{-1}(v_j)$. Továbbmenve ez $2d-ds+\sum_1^s k_j=2d-\sum_1^s\sum_1^{k_j}\mu_{ji}+\sum_1^s k_j=2d-\sum\sum(\mu_{ji}-1)$, ahol μ_{ji} v_j $i.$ ősképének multiplicitását jelöli. Ezt mondják Riemann-Hurwitz formulának:

$$\sum_1^s\sum_1^{k_j}\mu_{ji}-1=2d+2g-2.$$

Ha f-nek a végtelen nem kritikus értéke, akkor $\omega=df$ pólusainak száma $2d$, a zérushelyek (multiplicitással vett) száma pedig pont $\sum\sum(\mu_{ji}-1)$ (a deriváltnak egyel kevesebbszeres gyöke lesz egy adott pont). Az előbbi formulából következik, hogy $\#gyökök=\#pólusok+2g-2$.

Tétel: Legyen R kompakt Riemann felület, $f,h:R\to\bar{C}$ meromorf függvények. Álljuk, hogy létezik $p(x,y)$ irreducibilis polinom, melyre $p(f,h)\equiv 0$.

> Irreducibilitás világos. Legyenek $\deg f=d_1,\deg h=d_2$. Legyen $p(x,y)$ x-ben $\lambda\cdot d_2$ fokú, y-ban $\lambda\cdot d_1$ fokú, ahol λ egy természetes szám, később megadjuk. Ekkor $p(f,g)$ pólusainak száma legfeljebb $2\lambda d_1d_2$. Együtthatója p-nek $(1+\lambda d_2)(1+\lambda d_1)\geq\lambda^2d_1d_2$. Kijelölünk ennyi pontot, és azokban megoldunk egy

lineáris egyenletrendszert, hogy ezekben nulla legyen a kompozíció, és ezzel unicitás/fokszám miatt kész vagyunk. $\blacksquare$

8.

Analitikus függvény Riemann felülete

Példa $\log z$. Van egy $f : D \to C$ holomorf függvényünk, térképek lesznek (D, f), ha $D^* \cap D \neq \emptyset$ és $f|_\cap = f^*|_\cap$.

Speciális eset $f(x, y) : D \to C$ irreducibilis, vehetjük az $f(x, y) = 0$. Ha $f(x_0, y_0) = 0$ és $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$, akkor létezik $h : B(x_0, \epsilon) \to C$ holomorf úgy, hogy lokálisan a megoldás $(x, h(x))$.

Még speciálisabban, ha $f(x, y)$ irreducibilis kétváltozós polinom. Keresni akarunk egy R^* kompakt Riemann felületet és $X, Y : R^* \to \bar{C}$ meromorf függvényt, melyre $f(X, Y) = 0$. $\forall (x_0, y_0) \in C^2$ melyre $f(x_0, y_0) = 0$ létezik $p \in R^*$ melyre $X(p) = x_0$ és $Y(p) = y_0$. Ezt úgy kapjuk meg, hogy az előző eljárást akalmazzuk és kompaktifikálunk. Mit lehet csinálni a szinguláris pontokban? $(x_0, y_0) \in C^2, f(x_0, y_0) = 0$ és $\partial_y f(x_0, y_0) = 0$. Legyen egy ilyen pontban y_0 $k-$szoros megoldás.

Legyen $\epsilon > 0$ olyan, hogy minden $x^* \in \dot{B}(x_0, \epsilon)$ környezetre $f(x^*, y) = 0$-nak minden megoldása egyszres. Az implicit függvény tétel szerint értelmezhetünk egy $h(x)$ függvény, hogy $f(x, h(x)) = 0$, kis környezetekkel körbemehetünk, néhány ilyen után visszaérünk saját magunkba.

<u>Példa</u>: $x^3 + y^3 + xy$ az origóban. Metszés is lesz, és az egyik komponens kétszeresen van. Egy megoldás az, hogy $y = -x + \sum_2^\infty a_n x^n$, ezt köbreemelve $y^3 = -x^3 = \sum_4^\infty b_n x^n$, továbbá $xy = -x^2 + \sum_2^\infty a_n x^{n+1}$.

A másik komponens $y = \sum_1^\infty a_n x^{n/2}$ alakban áll elő. $y^3 = \sum_3^\infty b_n x^{n/2}$, és $xy = \sum_3^\infty a_{n-2} x^{n/2}$, ebből megint csak kapunk egyenletrendszereket.

Ha $f(x, y)$ x-ben k fokú, y-ban l fokú, akkor generikus x_0-ra $f(x_0, y)$-nak multiplicitással l megoldása van, kivéve ha a főegyüttható eltűnik, reciprokot helyettesítve itt az $y = \infty$ lesz a megoldás, csak a véges-véges esetet kell kell érdemben vizsgálni.

Állítjuk, hogy ebből egy kompakt metrikus teret kapunk. Legyen $p_n \in R^*$ sorozat, vesszük az $x_n = X(p_n)$ és $y_n = Y(p_n)$ sorozatokat $\bar{C}$-ben. Ezeknek tehát létezik konvergens részsorozata, tartsanak x^*, y^*-hoz. Vagy ezek reguláris pontok, ha szingulárisak, akkor véges sok branch találkozik ott, és valamelyikben van végtelen sok pont, ezek torlódni fognak a koordinátakörnyezetben.

Legyen $\tilde{R} \subset R^*$ egy összefüggőségi komponens, ebben kevesebb őse lesz egy adott x-nek, mert a többi komponensben is lesz, tehát ezt egy alacsonyabb fokú polinommal is kivághattuk volna, és f nem irreducibilis.

Tétel: Legyen R kompakt Riemann felület, X, Y két (nemkonstans) meromorf függvény, amelyre generikus x_0 esetén az $X^{-1}(x_0)$ véges halmaz pontjaiban Y páronként különböző értéket vesz föl. Ekkor $\forall Z : R \to \bar{C}$ meromorf függvényre $Z = Q(X, Y)$ valamely Q racionális törtfüggvényre, sőt

$$Z = q_{n-1}(Y)X^{n-1} + Q_{n-2}(Y)X^{n-2} + \cdots + q_0(Y)$$

alakú q_i racionális törtfüggvényekre, ahol n az Y meromorf függvény rendje (=pólusok multiplicitással vett száma).

> Bizonyítás: $y_0 \in C$ generikus. Legyen $x_1, \ldots, x_n \in C$ páronként különbözők melyre $Y(x_j) = y_0$. Legyen $z_j = Z(x_j)$. Létezik olyan p legfeljebb $n-1$-ed fokú interpolációs polinom melyre $p(x_j) = z_j$. Ez függ y_0 választásától, $p(x) = p(y_0, x) = q_{n-1}(y)x^{n-1} + \cdots + q_0(y)$. Az interpolációs polinom valóban racionális törtfüggvénye az interpolálandó pntoknak, kizárjuk hogy lényeges szingularitás legyen *valahogy*.

Következmény: R meromorf függvényeinek teste izomorf $C(Y)[X] : f(X, Y) = 0$.

9.

Egyszerűbb példa $x^2 + y^2 - 1 = 0$, ennek a felülete a Riemann gömb lesz. Ennek a felparaméterezése megadja nekünk a Pitagoraszi sázmhármasokat is.

Múlt órán $x^3 + y^3 + xy = 0$, hozzá tartozik egy R kompakt Riemann felület, és erről X, Y meromorf függvények. Hol kritikus X? $3x^2 + y = 0$, ergo $y = -3x^2$, visszahelyettesítva $x^3 - 27x^6 - 3x^3 = 0$, $27x^6 = 2x^3$, tehát $x = 0$, vagy $x = (\frac{2}{27})^{1/3}$, ami még 3 érték, összesen 4 tehát. Elhisszük egyelőre, hogy a végtelen nem kritikus. Rieman Hurewiczből 2d+2g-2=4 adódik, mert minden kritikus pontunk 1-szeres, vagyis $g = 0$, ez egy tórusz. A koordinátáink $X = Q(t)$ és $Y = R(t)$

alakúak lesznek, közös pólussal az egyenlet miatt. Ezt a három pólust elvihetjük kvázi bárhová, legyenek ezek a harmadik egységgyökök, vagyis $Q(t) = \frac{q(t)}{t^3-1}$, hasonlóan $R(t) = \frac{r(t)}{t^3-1}$ alakúak, továbbá a nullhelyeik is megegyeznek. $q(t) = c_1(t-\alpha)(t-\beta)^2$, és hasonlóan $r(t) = c_2(t-\alpha)^2(t-\beta)$ alakú lesz, a nullabeli vágás miatt. Beírjuk ezt a definiáló egyenletbe, és bővítünk $(t^3-1)^3$-el. $c_1(t-\alpha)^3(t-\beta)^6 + c_2(t-\alpha)^6(t-\beta)^3 + c_1c_2(t^3-1)(t-\alpha)^3(t-\beta)^3 = 0$ adódik. Egyszerűsítve

$$c_1(t-\beta)^3 + c_2(t-\alpha)^3 + c_1c_2(t^3-1) = 0.$$

Ehhez $c_1 + c_2 = -c_1c_2$ kell, továbbá az egyes együtthatókra kapunk egyenleteket, ezzel paramétereztük a gömböt.

Newton poligon

$\sum a_{kl}x^ky^l$ alakú polinomunk van, akkor vegyük a nem nulla a_{kl}-ek-hez tartozó (k,l) pontok konvex burkát, ez a Newton poligon, és ennek is a határa érdekel minket. Ez jól leírja a végtelen beli szingularitást. Ha X-nek, vagy Y-nak pólusa van, akkor ott $f(x,y) \sim x^3 + y^3$, csak a poligon "felső" peremét adó pontok sózlnak bele a nagyságrendbe. X egy pólusa közelében $x^3 + y^3 \sim 0$, és $y \sim -\epsilon x$, ahol $\epsilon^3 = 1$. A pólus közelében vlaóban harmadik egységgyökhöz tart a függvény, hiszen $1 + (y/x)^3 + y/x^2 = 0$. Átparaméterezzük $u = y/x$-el, $1 + u^3 + u/x = 0$. Felírhatjuk $y = \sum_{-\infty}^1 a_nx^n$ alakban, kiszámolhatjuk az együtthatókat, látjuk hogy $a_1 = -\epsilon$. Következő koordinátát is bevezetjük a következő együtthatóra $u_2 = (u+\epsilon)x$. Mondjuk $\epsilon = 1$-re $u = u_2/x - 1$, ebből $0 = 1 + u_2/x^3 - 3u_2^2/x^2 + 3u_2/x - 1 + u_2/x^2 - 1/x$, és kapunk lineáris egyenletet az $1/x$ együtthatóját, stb. Tehát három küpönböző hatványsort kapunk a végtelenbeli szingularitáshoz, és valóban nem elfajult.

Átvisszük a nullát a végtelenbe, $\xi = 1/x, \eta = 1/y$. $1/\xi^3 + 1/\eta^3 + 1/\xi\eta = 0$, átszorozva $\eta^3 + \xi^3 + (\xi\eta)^2 = 0$, a Newton poligon felső pereme két egyenesből áll $(0,3) - (2,2) - (3,0)$. Az első esetben $\eta + \xi^2 \sim 0$. Felírhatjuk $\eta = \sum_{-\infty}^2 a_n\xi^n$, és látjuk hogy $a_2 = -1$. $u = \eta/\xi^2$ az új koordinátánk, $\eta = \xi^2u$, ezt beírva az egyenletbe $\xi^6u^3 + \xi^3 + \xi^6u^2 = 0$, elvégezve megint a helyettesítést $u_2 = (u+1)\xi$, és $\xi^6(u_2/\xi(u_2/\xi - 1)^2) + \xi^3 = 0$, csak egy tagban lesz $1/\xi$, tehát $a_1 = 0$ kell hogy legyen.

A másik ágon $\xi + \eta^2 \sim 0$ látszik szimmetrikusan, tehát ξ-nek másodrendű pólusa van, és $\eta \sim \sqrt{-\xi}$, ezt lokálisan tudjuk értelmezni, két különböző módon is. Ekkor

$\eta = \sum_{-\infty}^{1} a_n t^n$ alakban írhatjuk fel, ahol $t = \sqrt{\xi}$. $\xi = t^2$, ebből $\eta^3 + t^6 + \eta^2 t^4 = 0$, az összeg utolsó 2 tagja játszik, $u = \eta/t$-t helyettesítünk, ennek már lesz határértéke, és ebből $u^3 t^3 + t^6 + u^2 t^6 = 0$, vagyis $u = \pm i$ kell hogy tljesüljön, hogy a fokszám csökkenjen, $u_2 = (u - i)t$.

$$t^3 (u_2/t + i)^3 + t^6 + t^6 (u_2^2/t^2 + 2iu_2/t - 1) = 0$$

a hatodfokú tagok kiejtik egymást, csak egy ötödfokút látunk, tehát $a_0 = 0$, s így tovább.

Példa: $(x^2 - y^3)^3 + xy = 0$. Ő már nagyon betegecske szegény. x-ben harmadrendű pólus, y-ban másodrendű, de még köbre is van emelve, a Newton poligon nem lát mindent. $y = \sum_{-\infty}^{2} a_n x^{n/3}$ alakú Puiseux sort kap az ember, gyakorlatilag három sor jön ki, szétválnak az ágak.

10.

$g = 1$ Riemann felületek

Tudjuk, hogy vannak nemtriviális meromorf függvények, és közöttük mindig van egy algebrai kapcsolat. Ezzel meg is adtuk a kompakt Riemann felületeket, valamilyen algebrai függvény nullhelyeként.

Az univerzális fedés $\mathbb{C}$ lesz. Létezik ω_1, ω_2, melyekre $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in C \setminus R$, és valójában az általuk generált ráccsal van lefaktorizálva a komplex számsík. Tudjuk, hogy a fundamentális tartomány területe konstansszor $g - 1$, ebből valahogyan kiderül, hogy ez az összes.

Weierstrass féle $\mathcal{P}$ üggvény: $f : C/(k\omega_1 + l\omega_2) \to \bar{C}$ meromorf függvény, létezik egy $f^* : C \to \bar{C}$ függvény, ami ω_i szerint periodikus. Mekkora lehet egy ilyen f rendje? 1 biztosan nem, mert akkor konform ekvivalencia lenne (kiintegrálva egy fundamentális tartomány határán aminek a belsejében van a pólus nullát, és a reziduumot kapnánk). 2 rendű bizonyos esetekben lehet a Schwarz Christoffel formula szerint, $c \int \prod (z - B_j)^{\alpha_j/\pi - 1}$-vel. Ezért például ha a sokszög amire képezni akarjuk a felső félsíkot egy négyzet, feltehetjük hogy $B_4 = \infty$, és akkor az összes $\alpha_j = \pi/2$, és akkor $\int \frac{dz}{\sqrt{(z-B_1)(z-B_2)(z-B_3)}}$. Egy tükrözési elv után az alsó félsíkot is megkapjuk, és egy kétszer akkora négyzetet képzi le. Így a konform leképezések alaptételéből látjuk, hogy téglalaprácson van másodrendű függvény.

Tekintsük a $\sum_{k,l\in Z} \frac{1}{(z-k\omega_1-l\omega_2)^2}$ összeget, egy baja van neki, hogy divergál. Helyette $\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k,l\in Z^2\setminus(0,0)}(\frac{1}{(z-k\omega_1-l\omega_2)} - \frac{1}{(k\omega_1+l\omega_2)^2})$, ez abszolút konvergens, az invariancia kevésbé világos. Deriválunk, $\mathcal{P}' = -2(\frac{1}{z^3} + \sum_{Z^2\setminus(0,0)} \frac{1}{(z-k\omega_1-l\omega_2)^3}) = -\frac{1}{2}\sum_{Z^2} \frac{1}{(z-k\omega_1-l\omega_2)^3}$, amin már látszik, hogy invariáns, és lokálisan egyenletesen, és abszolút konvergens, mert a rácspontok reciprok köbének összege az, és Weierstrass kritérium. A derivált invarianciájából következik, hogy létezik c_1, c_2, melyekre $P(z+\omega_1) = P(z) + c_1$, és hasonlóan. Látszik továbbá, hogy P egy páros függvény. Tehát $P(-\omega_1/2) = P(\omega_1/2)$, és $P(\omega_1/2) = P(-\omega_1/2+\omega_1) = P(-\omega_1/2) + c_1$, tehát $c_1 = 0$, és hasonlóan c_2 is.

A rácspontok köbösszegének abszolút konvergenciája azon múlik, hogy a $r < |z| \leq 2r$ körgyűrűben hány rácspont van. Nagyjából $\pi(4r^2 - r^2)/T$, ahol T a rácsparalelogramma területe, ezt egy egészen konkrét becsléssé kiszámolható, tehát cr^2 darab rácspontot tartalmaz egy ilyen körgyűrű. Következésképpen $\sum |\frac{1}{k\omega_1+l\omega_2}|^\alpha$ becsülhető mindkét irányból, vegyük $r = 2^n$-et, ekkor tagonként $\frac{1}{2^n}^\alpha c_2 2^{n^2}$, és hasonlóan alulról.

A P függvény definíciójában a tagokat is valahogy $\frac{c}{(k\omega_1+l\omega_2)^3}$-al becsülni.

P-hez másodrendú, a deriváltjához harmadrendű meromorf függvény tartozik a tóruszon. Szingularitás csak a rácspontokban van. P páros, a deriváltja páratlan, ebből P'^2 ismét páros lesz. $P'^2 - \alpha P^3$-nek negyedrendű pólusa lesz megfelelő α-ra. Kivonva még βP^2-nek már csak másodrendű pólusa lesz, még kivonunk egy γP-t, ezzel egy konstans függvényt kapunk, vagyis a P'^2 egy harmadfokú polinomja P-nek.

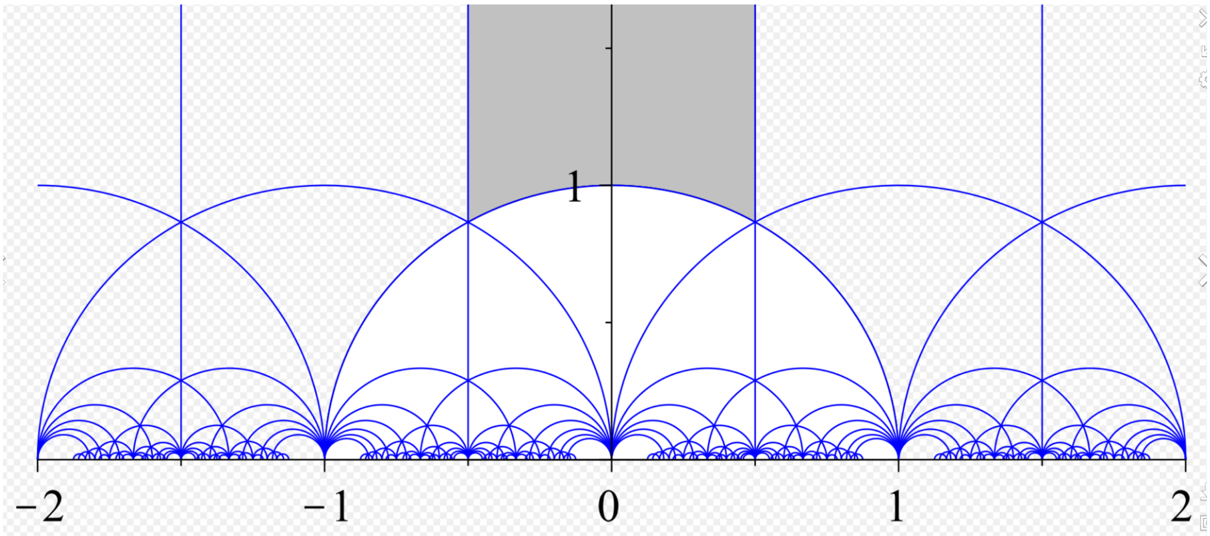
Az $x^2 = p_3(y)$ felírásból világos, hogy van egy másodrenű auomorfizmus, továbbá minden eltolás is indukál egyet, van egy egész komplex dimenziónyi automorizmus, tranzitívan hat a túruszon.

Hogy tudjuk megkülönböztetni az 1-génuszú Riemann felületeket (a konform struktúra tekintetében)?

$T = C/(k\omega_1 + l\omega_2)$ és $T^* = C/(k\omega_1^* + l\omega_2^*)$. Ha $h : T \to T^*$ konform bijekció, akkor létezik olyan $\hat{h} : C \to C$ konform bijekció, amely rácspontokat rácspontokba visz, tehát pontosan a hasonló rácsok által meghatározott tóruszok lesznek konform ekvivalensek. Mikor lehet két rács hasonló? $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ leírja a parallelogrammalap hasonlóságokat, a sorrendet mindig válasszuk úgy, hogy ennek a hányadosnak a képzetes része pozitív legyen. Azonban a rácsok szintjén $\omega_1, -\omega_2$, és $\omega_1 + k\omega_2, \omega_2$ is ugyanazt a rácsot reprezentálja, és valójában minden generátorrendszer megkapható ilyen lépésekkel.

Az elsőhoz $-\omega_2/\omega_1$ tartozik, vagyis a $-1/z$ függvény. A második esetben a $z+1$ alakú leképezést kapjuk, ezek generálják az $PSL(2,Z)$ részcsoportját a felső félsík automorfizmuscsoportjának, végsősoron tehát akkor hasonló két paralelogrammarács pontosan akkor ekvivalens, ha a megfelelő hányadosaik ilyen függvényekkel átvihetőek egymásba. Ezt a csoportot hívják moduláris csoportnak.

A fundamentális tartomány a $-1/2 < Rez < 1/2$ sáv egységkörön kívüli részével lehet reprezentálni, ennek minden pontjához tartozik egy tórusz, és pontosan ezek a tóruszok. Összeragasztva kapunk egy szinguláris gömböt, a végtelenben cuspja van, i -ben másodrendű, illetve a perem két sarokpontjában harmadrendű szinguláris helyekkel.



Kép wikipédiáról

A végtelen távoli pontot kidobva látjuk, hogy a síkkal ekvivalens, magyarán minden tóruszhoz létezik egy $j(T) \in C$ szám, ami megadja az ő konform struktúráját.

Legyen T_a az $x^2 = y(y-1)(y-a)$-hoz tartozó tórusz, azt szeretnénk, hogy $j(T_a)$ holomorf legyen. $a = 0, 1$ esetekben elfajulás van, gömböt kapunk.

$g > 1$ esetben a modulustér $3(g-1)$ komplex dimenziós lesz, szinguláris.

Hasonló dolgokból kapjuk a Teichmüller tereket, ez is $3(g-1)$ dimenziós sima komplex sokaság, ami C^{3g-1} korlátos (egysz. öf.) részhalmaza. Ezen van egy randa nagy csoport, a szerine vett faktor lesz a becsületes modulustér, a magasabb dimenziós moduláris csoportok szerint. Egy kompaktifikációs eljárást alkalmazhatunk ezekre is, amit kapunk az pont a $CP^{3(g-1)}$ ezután. Itt is a kvázikonform leképezéseket használták a bizonyításhoz, talán Ahlfors.

Szingularitás akkor lesz a paramétertérben, amikor a felületnek van nemtriviális automorfizmusa.

$g = 2$-re van egy másodrendű "hiperelliptikus" automorfizmus, nagyobb génuszra generikusan egyáltalán nincsen automorfizmus!

A tóruszok esetében a négyzetrácsnak van egy nemtriviális automorfizmusa, az i-vel való szorzás, a fundamentális poligonban neki pont az i pont felel meg. Most az egyenlőoldalú $\pi/3$ szögű rácsot tekintsük, ekkor a rács valójában szabályos háromszögekből áll, és harmadik egységgyökkel való szorzás is automorfizmus lesz, a másik kör-egyenes sarokponot pedig a 120 fokos háromszögrácsból kapjuk.

Következő alkalommal diskutáljuk, hogyha G egy automorfizmuscsoporja egy g génuszú felületnek akkor $|G| \leq 84(g-1)$ (továbbá $g > 1$-re végtelen nem lehet).

11.

Automorfizmuscsoportok

Legyen $g \geq 2$, R kompakt g génuszú Riemann felület. $Aut(R)$ konform automorfizmusok csoportja érdekel minket. Miért is érdekes? A g génuszú kompakt Riemann felületeken létezik egy $T(G)$ $3(g-1)$ komplex dimenziós sokaság (valójában C^{3g-3} korlátos egyszeresen összefüggő részhalmaza (homeomorf R^{6g-6}) amelyen hat a (egy) moduláris csoport, és $M(G) = T(G)/\text{moduláris csoport}$. A moduláris csoportok egyre randábbak, de diszkrét csoportok. A modulustér már nem sokaság, vannak szinguláris részei, ezek pontosan akkor jelennek meg, ha vannak nemtriviális automorfizmusok. Magas génusznál (> 2) a nemidentikus automorfizmus a nemtriviális, alacsonyban nem, a tóruszt el tudjuk forgatni önmagában bárhogy, illetve még van egy szimmetria a harmadfokú miatt ha y jó, akkor $-y$ is. 2 génusznál mindig lesz egy másodrendű automorfizmus még, és ennyi.

<u>Állítás</u>: $|Aut(R)| < \infty$ ha $g \geq 2$.

<u>Állítás</u>: $z_0 \in R$, akkor a z_0-t fixenhagyó automorfizmusok részcsoportja ciklikus.

> $\alpha : R \to R$, $\alpha(z_0) = z_0$ automorfizmus. Áthúzzuk a fedésre $B(0,1) \xrightarrow{\alpha^*} B(0,1)$, tegyük fel hogy $\pi(0) = z_0$, és azt a felemeltet vegyük, amire $\alpha^*(0) = 0$, a Schwarz lemmi miatt mostmár $\alpha^*(z) = \epsilon z$, mivel véges a csoport, ezért ennek az ϵ-nak a rendje véges.

$\Gamma := Aut(R)$, vegyük az R/Γ teret, ami szintén egy kompakt Riemann felület lesz.

> Ha egy pont nem fixpont, világos hogy jó lesz, ha fixpont, akkor az előbbiek szerint csak egy ciklikus részcsoportnak fixpontja, a fedésben egy pont környezetének a reprezentánsa egy megfelelő szögű szögtartomány.

Jelöljük $R^* = R/\Gamma$. Legyen a génusza ρ. Az R-en generikus pontok pályája Γ szerint d elemű, ha $|\Gamma| = d$, vannak kivételes pályák, a fixpontokhoz tartozók. Ezeknek a pályáknak a hosszai $d/\lambda_1, \ldots, d/\lambda_k$, ahol λ_i a megfelelő pontot fixentartó automorfizmusok száma. Eulerkarakterisztiák sázmolunk, $2 - 2g = d(2 - 2\rho) - \sum_1^k d - \frac{d}{\lambda_j}$, ebből

$$d = \frac{2g-2}{\sum_1^k (1 - \frac{1}{\lambda_j}) + 2g - 2}.$$

Most ha $\rho \geq 2$ akkor $d \leq (2g-2)/2 = g - 1$, ha $\rho = 1$, akkor pedig $d \leq (2g - 2)/(1/2) = 4(g-1)$. Végül ha $\rho = 0$, akkor $d = (2g-2)/(-2 + \sum_1^k (1 - 1/\lambda_j))$. Ha $k \geq 5$, akkor a nevező automatikusan pozitív lesz, és $d \leq 4(g-1)$ mint az előbb. A $k = 3, 4$ esetek maradtak, hiszen legfeljebb $1/2$-el tudjuk növelni a nevezőt tagonént. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy λ_j monoton növő. Ha $k = 4$, és $\lambda_1 \neq 2$, akkor mindegyiknek $1/3$-nak kell lennie, ebből $d \leq 3(g-1)$. $\lambda_1 = 2$ esetben ha $\lambda_2 > 2$, akkor a többit választhatjuk 3-nak, és megint $d \leq 4(g-1)$-et kapunk. Ha $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, és a harmadik nem, akkor $d \leq (2g-2)/(-2 + 2 * 1/2 + 2 * 2/3) = 6(g-1)$. Ha az első három λ kettő, a harmadik nem lehet kettő, háromnak választjuk, és így $d \leq (2g-2)/(-2 + 3 * 1/2 + 2/3) = 12(g-1)$.

$k = 3$-nál? Ha $\lambda_1 = 2$, akkor $\lambda_2 \neq 2$, hiszen különben a nevező negatív lenne. Vegyük akkor háromnak, A nevező ekkor $-2 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + 1 - \frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{\lambda_3}$, tehát $\lambda_3 > 6$, hét a legjobb eset. Ekkor $d = (2g-2)/(-2 + 1/2 + 2/3 + 6/7) = 84(g-1)$. Következő eset $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$, ekkor $\lambda_3 > 4$, és az extrém esetben $d \leq 40(g-1)$ adódik. Ha $\lambda_1 = 2, \lambda_2 \geq 5$, akkor a nevező $\geq -2 + 1/2 + 2 * 4/5 = 1/10$, és ez már automatikusan pozitív, $\lambda_3 = 2$, és $d \leq 20(g-1)$. $\lambda_1 = 3, \lambda_2 \geq 4$-re ismét a nevező automatikusan pozitív, és $12(g-1)$-et kapunk, marad a $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, ekkor végül $-2 + 4/3 + 1 - 1/\lambda_3 = 1/3 - 1/\lambda_3$, ezért $\lambda_3 > 3$, extrém esetben a nevező $24(g-1)$-et kapunk, a legrosszabb tehát $84(g-1)$.

$g = 3$-ra már létezik ilyen extrém Rieman felület, Macbeath találta meg. Ezeket hívják Hurvitz csoportoknak.

Ha van g génuszú Riemann felület $84(g-1)$ rendű automorfizmuscsoporttal, akkor $g^* = (g-1)m^{2g} + 1$-re van g^* génuszú is tetszőleges $m \in \mathbb{N}_+$-re.

Speciálisan van pl $2m^6 + 1$ génuszú.

Geometriai magyarázat

Vegyük R egy normáltartományát N, ennek a (hiperbolikus) területe, mint azt korábban meggondoltuk $(2g-2) * c$, és valójában arról van szó, hogy R^* "normáltartományának" a területe nem lehet kisebb mint $c/42$.

Hogyan keresünk automorfizmuscsoportokat?

Szokásos jelölések, legyen $R^* = S^2$, a Riemann-gömb. Ezen vegyünk $v_1, \dots, v_k$ páronként különböző pontokat, $v_k = \infty$-t a kényelem kedvéért feltesszük, továbbá $\lambda_1 \dots, \lambda_k$ a fixpntokhoz tartozó osztótényezők. Kell, hogy $d = (2g-2)/(-2 + \sum(1 - 1/\lambda_i)) \in \mathbb{N}$, ennyi lenne a rend. Összekötjük a v_i-ket egymás után, a komplementum egyszeresen összefüggő lesz persze, nevezzük ezt a tartományt D-nek. Γ-t ismerjük izomorfizmus erejéig. $R \to R^*$ a szokásos vetítés, vegyük a $\pi^{-1}(D)$ halmazt, ez d darab diszjunkt kópiája D-nek, hiszen a fedés elágazási pontjait kidobtuk. Az egyik ilyen ősképet elkereszteljük 1-nek $(D, 1)$, majd $\alpha \in \Gamma$-ra $\alpha(D, 1) = (D, \alpha)$-ként legyen jelölve. Ha látjuk hogy ezek a diszkek hogyan csatlakoznak egymáshoz a perem mentén, akkor készen vagyunk, látjuk a felületet is. Tekintsünk egy kis kört a v_1 körül. Ehhez a ponthoz tartozik egy α_1 automorfizmus ami a legkisebb szögű, ergo generálja a pontot fixáló részcsoportot, és $\alpha_1^{\lambda_1} = id$, a kört ha felemeljük, akkor ezzel az elemmel lépünk tovább. v_2-nél kétszer lépünk át az elvágott részen, egyszer α_1^{-1}-el, majd $\alpha_2\alpha_1$-el a második átlépésnél, tehát összességében α_2-vel lépünk el, s így tovább.

Kell tehát $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Gamma$ csoportelemek, melyek rendje $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, és $\lambda_k\lambda_{k-1} \dots \lambda_1 = 1$ teljesül, és $< \alpha_i >= \Gamma$.

Tehát például a $2-3-7$ csoportnál úgy vehetjük, hogy $\alpha^2 = \beta^3 = \gamma^7 = \gamma\beta\alpha = 1$ mint prezentáció, Máshogy, mivel $\gamma = \alpha^{-1}\beta^{-1}$, $\alpha^2 = \beta^3 = (\beta\alpha)^7 = 1$, kell még hogy $< \alpha, \beta >= 84(g-1)$, ezekt pont a megfelelő extrém Riemann felületeket adják.

Mi változik ha R^* nem a gömb? $a_1, b_1, \dots, a_\rho, b_\rho$ az R^* normáltartomány csúcsai, ezeket fogja az α_i, β_i felcserélni, a nekik megfelelőeket.

Létezzen $\alpha_1, \beta_2, \dots, \alpha_\rho, \beta_\rho, \gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Gamma$, és a reláció $\gamma_1^{\lambda_1} = \dots = \gamma_k^{\lambda_k} = [\alpha_1, \beta_1] \dots [\alpha_\rho, \beta_\rho]\gamma_1 \dots \gamma_k = 1$ lesz.

12.

R-en másodrendű automorfizmus van, és legyen $R/Z_2 = \bar{C}$. Fixpontok számára $2 = d = (2g-2)/(-2\sum_k 1 - 1/2) = (2g-2)/(-2+k/2)$, ezt rendezve $k = 2g+2$ db fixpont van.

Példa. $g = 0$, másodrendű automorfizmusnak persze 2 fixpontja van. $g = 1$-en 4 fixpont, szintén látjuk. $g = 2$-nél hatnak kellene lennie. A gömbnél mondjuk a $-z$ függvény, két fixponttal, a tórusznál az $y^2 = p_3(x)$ felírásból $(x, y) \mapsto (x, -y)$, három véges helyen nulla az y koordináta, plusz a végtelen (ez is a $-z$ az univerzális fedésben). A duplatórusznál egy ötöd, vagy hatodfókúja lesz x-nek egyenlő y^2-el (és még annyi hogy csak egyszeres gyökök vannak).

A 2-génuszú kompakt Riemann felületek sokasága 3 komplex dimenziós. Lineáris áthelyettesítéssel feltehetjük, hogy minden polinomnak 0,1 gyöke, így valójában $p_5(x) = x(x-1)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$ alakú, valóban ott a 3 szabadságfok, ez már magasabbra nem fog működni, egy hetedfokúba csak 2 extra szabadságfokot kapunk, de a felületeknél 3-nak kellene bejönnie.

Ha nem a gömb a faktor, akkor $2 = (2g-2)/(2\rho - 2 + \sum 1 - 1/2))$-t kapunk, ebből $3g - 3 = 6\rho - 6 + 3k/2$. A faktor létrehozásánál $3(\rho - 1) + k$ szabadsági fokunk van, ez a tórusznál is működik, mert az automorfizmusok tranzitívan hatnak, ezért egy pont kijelölése nem emeli a dimenziót. Ezért $3\rho - 3 \geq 3g - 3 = 6\rho - 6 + 3k/2$, vagyis $-3\rho + 3 \geq k/2$, tehát $\rho = 0$ vagy 1. Az 1-es esetben nulla darab fixpontnak kellene lenni, de ezeket már megnéztük.

Ezért nincsen tipikusan (másodrendű) automorizmus, túl sok dimenziónyi felület jönne ki.

Állítás: Ha R hiperelliptikus Riemann felület (van rajta másodrendű automorfizmusa, hogy a faktor a gömb), akkor R-en van olyan X, Y meromorf függvény, melyre $Y^2 = p_{2g+2}(X)$, és ez az egyenlet definiálja R-et.

> Legyen $X : R \to R/Z_2$ a faktorizáció. Feltehető, hogy a $2g+2$ fixpont ősképe mind véges, $a_1, ..., a_{2g+2}$, ezek pont az X kritikus értékei. Most pedig $Y := \sqrt{(X-a_1)...(X-a_{2g+2})}$ legyen. Összekötjük az a_i-ket ívekkel szépen sorban, a komplementum legyen egyszeresen összefüggő, nevezzük $D := \bar{C} \setminus a_1 - a_2 - ... - a_{2g+2}$-nek. $X^{-1}(D)$ két egyszeresen összefüggő komponensből áll R-ben. Mindkét komponensen tudjuk értelmezni a négyzetgyököt egyszeres összefüggőség miatt. $Y : E_1 \to \bar{C}$, ezt szeretnénk

kiterjeszteni. Ehhez legyen $Y|_{E_2} : -Y \circ \phi$, ahol ϕ a másodrendű automorfizmusa R-nek. Annyi kell, hogy ez jól terjedjen ki a határra. Amikor egy zárt görbe az a_i-ket összekötő egyenest metszi, és páros sok pontot tartalmaz, akkor a fedésben E_1-ből E_2-be lépünk át, vagy fordítva, és pontosan ez történik a négyzetgyökkel is, ha a nullát megkerüljük, ezért fog kompatibilisen kiterjedni a határra a fenti módon megadott leképezés.

Nemkonstans meromorf függvények, mint elágazásos fedések

R kompakt Riemann felület. $X : R \to \bar{C}$ d-edfokú meromorf függvény. Kritikus értékek legyenek $v_1, ..., v_s$ páronként különbözők. Minden kritikus pontjához tartozik egy λ_{i,k_i} multiplicitás, ahol az 1-eseket általában kihagyjuk. Kifejezhetjük az Euler karakterisztikát $\chi = 2 - 2g$, és ezt az elágazó fedésből is kiszámolhatjuk, ez tovább egyenlő $d - (s-1)d + \sum_1^s k_i = 2d + \sum_1^s (k_i - d)$, továbbá ez $2d + \sum_1^s (k - \sum_1^{k_i} \lambda_{i,j}) = 2d - \sum_1^s \sum_1^{k_i} (\lambda_{ij} - 1)$, ezt a formulát is Riemann-Hurewicznek szokás hívni, általánosítása annak amit már tanultunk.

Kössük össze most megint a kritikus értékeket ívvel, a komplementum őse megintcsak d-db egyszeresen összefüggő tartomány diszjunkt uniója lesz, $1, 2, ..., d$. Fixálunk egy pontot az íven kívül, és vesszük a fundamentális csoport generátorait az egyes kritikus pontok körül. A körbemenés után egyes diszkek felcserélődnek, ezt leírja egy permutáció $\tau_j \in S_d$. $\lambda_{j,1}, ..., \lambda_{j,k_j}$ hosszú ciklusokból fog állni, továbbá $\tau_s ... \tau_2 \tau_1 = id$, és az általuk generált csoport tranzitív. Ez visszafelé is igaz, ha adott egy ilyen részcsoport, akkor konstruálhatunk belőle egy megfelelő felületet.

Ritt dolgozott sokat ezen a területen.

Ha p egy polinom, és $p = p_1 \circ ... \circ p_s$, ahol p_i irreducibilisek, akkor s független a felírástól (néhány kivétellel, pl Csebisev polinomok). Racionális törtekre nem igaz, létezik R, melyre létezik R_1^*, R_2^* irred, hogy $R = R_1^* \circ R_2^*$, és léteznek $\hat{R}_i$ $i = 1, 2, 3$, irreducibilisek, hogy $R = \hat{R}_1 \circ ... \circ \hat{R}_3$.

Ha $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$ nem azonos polinomokra, akkor $p_1 = z^n, p_2 = z^m$, és még esetleg egy lineárissal megkomponálva, vagy pedig Csebisev polinomok lineárissal való konjugálás erejéig. Itt is le lehet követni ha felírja az ember, hogy a kompozíciónak mik lesznek a kritikus értékei.

Polinomok körében a $kp'q - lpq' = c \neq 0 \in \mathbb{C}$ megoldására is alkalmazható az eddig tárgyalt masinéria. $R(z) = p^k / q^l$, és $R'(z) = (kp'p^{k-1}q^l - lq'q^{l-1}p^k)/(q^{2l})$ persze, a feltétel miatt $(p^{k-1}q^{l-1}c)/q^{2l}$, vagyis a p-nek és a q-nak a gyökei lesznek a kritikus pontok. Triviális esetektől eltekintve $\deg p^k = \deg q^l$ egy megoldsra. A kritikus értékek tehát a végtelen, a nulla, és még egy v szám, lekövethető hogy hogyan forognak a dogok. A fenti egyenletet pl a szomszédos Csebisev polinomok megoldják, sőt ha csak valós gyökök vannak a polinomoknak, akkor $l = k + 1$, és csak a T_k, T_{k+1}-ek oldják meg.

13.

Uniformizációs tétel alkalmazás a Koenigs tétel bizonyítása.

Tétel: $f(z_0) = z_0$, és $|f'(z_0)| = |\lambda| < 1$, akkor $\exists! \phi : B(0, \epsilon) \to B(z_0, \delta)$ konform, $\phi(0) = z_0, \phi'(0) = 1$ úgy, hogy $(\phi^{-1} f \phi)(z) = \lambda z$

> Legyen γ olyan Jordan görbe, hogy $z_0 \in im\ \gamma$, f injektív $in\bar{t}\ \gamma$-on és $f(\gamma) \subset int\ \gamma$. Itt csinálunk egy Rieman felületet, legyen $\gamma(t) \sim f(\gamma(t))$, ez egy tórusz lesz, az univerzális fedése egy parallelogramma rács. Az egyik oldala $2\pi i$ legyen, a másikat pedig feszítse w. Van egy h leképezés a síkból erre a parallelogrammára ami a w oldalakon esetleg kicsit másként áll, az exponenciális leképezés ezt elviszi egy körgyűrűbe. Itt az f-el való kompozíció pont az e^w-bel való szorzásnak fog megfelelni, a lokális dinamikát pedig ismerjük. Ezzel adódik a $\phi : B(0, \epsilon) \to B(z_0, \delta)$ leképezés először csak a pontozott környezeten, de létezik határértéke, beterjed a teljes környezetre, $e^w \cdot z$ alakban kapjuk a konjugáltas leképezést.

R kompakt Riemann felület, g génusszal. $p \in R$, mit tudunk R azon meromorf függvényeiről amelyeknek csak p-ben lehet pólusuk? Konstans függvények persze jók, de na. Ha p generikus, akkor a legkisebb fokú nemtriviális ilyen meromorf függvény pólusának rendje legfeljebb $g + 1$. Ez a Riemann-Roch tétel egy speciális esete. Általában ha azt kérdezzük hogy milyen rendű pólusa lehet egy meromorf függvénynek p-ben, és az derül ki, hogy pontosan g kivétellel kell tartalmaznia ennek a sorozatnak az összes természetes számot, és ezek a számok félcsoportot alkotnak persze, hiszen szorzással összeadódik a pólusok rendje, generikus esetben ez persze az 1....g számok. Weiestrass pontoknak nevezzük azon p-ket, ahol ez a félcsoport nem a $\{g + 1, g + 2, \ldots\}$ számokból áll. 1 génuszban nincsenek ilyen pontok egyáltalán, és általában is ismert, hogy hány van, egy harmadfokú kifejezés g-ben (multiplicitással).

A múlt órai konstrukcióban az összekötő utak választása egy nem természetes dolog, mi van ha másik utat veszünk? Bejönnek a fonatcsoportok somehow.