1.

Történeti bevezető. Gauss 19. sz. első fele. Később Riemann habilitációs előadása (≥ 3 dimenziót is vizsgálni kell), az ambiens tér elhagyása lényeges új ötlet. Sokaságfogalom (*mannigfaltigkeit*) szintén Riemanntól származik. Az érintőtér absztrakciója fontos lépés, befoglaló euklideszi tér nélkül hogyan értelmezzük az érintővektor fogalmát?

Szokványos jelöléseket alkalmazunk parciális deriválásra, stb.

Iránymenti deriválás mint vektortér. Topologikus sokaság definíció. Térkép, koordinátafüggvény és C^∞ kapcsoltság definíció (diszjunkt esetben mindig!). ($C^\infty-$)Atlasz definíció mint fedő térképrendszer.

Példa nem kompatibilis térképekre: $\phi(t) = t,\ \psi(t) = t^3$.

> 1960 Kervaire konstruált topologikus sokaságot, amin nem lehet differenciálható atlaszt megadni

▼ Tétel: Adott egy A C^∞ atlasz, ez egyértelműen meghatároz egy teljes (tovább nem bővíthető) atlaszt.

Vesszük az összes olyan térképet, amely kompatibilis az A bármely térképével, erre belátható, hogy megfelelő lesz.

Mostantól eleve teljes atlaszokkal dolgozunk. $(M, \mathcal{A})$ egy topologikus sokaság, és egy teljes C^∞-atlasz. $\mathbb{R}^m$-en mindig a természetes differenciálható struktúrát tekintjük, az id függvény meghatároz egy teljes atlaszt.

Egy függvény sima, ha minden térképen az. A sima függvények egy (egységelemes kommutatív) $\mathbb{R}$-algebrát alkotnak. Sima sokaságok közötti leképezések simák, ha a térképekre vett részeik simák ($\eta \circ \mu \circ \xi^{-1}$)

Diffeomorfizmus definíció.

> 1956-ban Milnor belátta, hogy a 7-dimenziós gömbön 28 nem diffeomorf diffható strukrúra van. Igaz továbbá, hogy a 4-dimenziós euklideszi téren is több nem diffeomorf struktúra van (Donaldson 1983).

Sokaság nyílt részhalmaza is (sima) sokaság az altértopológiában a térképhalmazok és függvények megszorításával.

Másik módja új sokaságok gyártására a szorzatkonstrukció.

Sima görbe definíció.

Egy környezeten értelmezett függvény kiterjesztése az egész sokaságra: dudorfüggvény. Tartó definíció.

- Állítás: $U \subset M$ nyílt, $p \in U$. Ekkor létezik függvény, melyre $suppf \subset U$, $0 \leq f \leq 1$, p egy nyílt környezetén $f \equiv 1$.

  $g := 0$ ha $t \leq 0$; és $\exp(-1/t^2)$ egyébként. Legyen $\epsilon > 0$ fix, és ezzel

  $$h(t) := g(2\epsilon - t)/(g(2\epsilon - t) + g(t - \epsilon)).$$

  Ez a függvény azonosan 1 ϵ-nál kisebb számokra, 0 2ϵ-nál nagyobbakra.

  Minden térképezés eltolható a képben, tehát feltehetjük, hogy a térképen p az origóba képződik. Megtehetjük továbbá hogy a térképtartomány része legyen U-nak, és a kép a $\sqrt{3\epsilon}$ sugarú golyó. ρ ezen környezeten a térkép képének hossznégyzetfüggvénye. Komponáljuk ezt h-val, ez megfelelő lesz dudorfüggvénynek.

Érintővektort a sima függvényeken értelmezett deriválásokként (lineáris+Leibniz szabály) definiálunk. A konstans nulla például megfelelő.

- Állítás: ha h megegyezik g-vel p egy környezetében, akkor minden deriválásra v(f)=v(g).

  Veszünk egy f dudorfüggvént p-hez. f(g-h) azonosan nulla itt. A Leibniz szabály és a linearitás miatt kapjuk az állítást.

Most értelmezhetjük sima görbe pontbeli érintővektorát. Minden sima függvény prekomponálhatjuk a görbével, ez egy deriválható R→R függvény, tehát valóban egy érintővektort definiál a vizsgált p pontban.

Hogy is lesz vektortér az érintővektorokból? Könnyen ellenőrizhető hogy deriválások összege és skalárszorosa is deriválás lesz, ezzel kapjuk a T_pM érintőteret.

Hány dimenziós az érintőtér? Minden érintővektor előáll görbe sebességvektoraként? Naivan nem látjuk rögtön, de persze igaz.

Egy adott térképezéshez vegyük a térképezés koordinátafüggvényeit. (U, ξ) térkép, és $x^i = \pi_i \circ \xi$. Ezek megadnak $\dim M$ darab deriválást p-ben a $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)(f) = \partial_i(f \circ \xi^{-1})(\xi(p))$ formulával. Ezeket nevezzük a térképhez tartozó alapvektoroknak. Világos továbbá, hogy ezek az R^n koordinátavonalainak a visszahúzott görbéinek a sebességvektorai. Ez valójában az egész környezetben megad alapvektorokat.

- Tétel (Bázistétel): Az alapvektorok kifeszítik a pontbeli érintőtereket, konkrétan $v_p = \sum v_p(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$

2.

Világos, hogy a pontbeli érintővektorok halmaza egy vektorteret alkot R felett, ezt T_pM-el jelöljük. Ha egy függvény csak lokálisan van megadva, akkor dudorfüggvénnyel kiterjeszthetjük, az iránymenti derivált egy adott pontban nem függ a kiterjesztéstől, ezt fogjuk hívni a lokális függvény deriváltjának valamely irányban.

Vegyük az $\mathbb{R}^m$-beli r sugarú egységgolyót. Lemma, minden $B \to \mathbb{R}$ függvény előáll $g(0) + \sum u^i \cdot P_i g$ alakban. Ez a Morse lemmához hasonlóan a parciális derivált egyik koordinátairány menti integrálásával kapunk, ez is sima lesz a paraméteres integrál tétele miatt. Összekütjük lineárisan az origót egy z ponttal, és alkalmazzuk a Newton-Leibniz formulát.

A bázistétel bizonyításához mostmár vegyünk egy térképezést. Feltehető hogy a p pontot az origóba viszi, és a képe egy nyílt golyó, esetleges szűkítéssel. Állítjuk, hogy $v_p = \sum v_p(x^i)\partial/\partial x^i(p)$, ehhez megmutatjuk, hogy minden függvényen ugyanazt az értéket veszik fel.

Legyen $f \in F(M)$ tetszőleges, és szorítsuk meg a térképkörnyezetre. Áthúzva a térképpel $g = f \circ \xi^{-1}$-re alkalmazhatjuk az előző lemmát, és felírhatjuk $f(p) + \sum u^i \cdot P_i(f \circ \xi^{-1})$ alakban. ξ-vel komponálva $f(p) + \sum u^i \cdot (P_i(f \circ \xi^{-1}) \circ \xi)$, és erre hattatjuk a v_p érintővektort. $v_p(f) = 0 + \sum v_p(x^i) \cdot P_i(f \circ \xi^{-1})(0) + \sum x^i(p) \cdot v_p(P_i(f \circ \xi^{-1}) \circ \xi)$ a Leibniz szabály miatt. Az origót választottuk a p értékének a koordinátázásnál, ergo a második tag eltűnik. Az első tagban pedig a konstrukció miatt az alapvektor definíciója, a koordinátairány deriváltja a 0-ban. Ezzel valóban megkaptuk az állított felírást. A függetlenség peig elveszett, rip.

Következmény, hogy T_pM dimenziója pont m. Továbbá, hogy minden érintővektorhoz találunk olyan görbét, aminek pont egy választott érintővektor a sebessége.

Megjegyezzük, hogy két különböző pont érintőterei diszjunkt halmazok. Ezek uniója a sokaság *érintőnyalábja*.

Általában így nincs összefüggés a különböző érintőterek között. Azonban, ha a sokaságunk eleve egy vektortér még van remény. Egy V^m vektortéren bármely norma ugyanazt a topológiát adja, vegyünk egy b_i bázist V-ben, és egy duális bázist ehhez x^i. Ezzel kapunk egy térképezését a vektortérnek, ez sima lesz, bármely két térképezés között az átmeneti függvények mátrixokkal írhatók le, lineárisak tehát simák.

Azonosíthatjuk V-t és T_pV-t. Vehetjük a p kezdőpontú, v irányú egyenest a vektortérben, és ezen görbéknek lehet venni az érintővektorát a kezdőpontban, $\sigma_{p,v} = p + tv$ alakú görbékkel.

Sima leképezés érintőleképezése

Adott egy $\mu : M \to N$ sima leképezés. Egy v\in T_pM érintővektorhoz rendelt leképezés $v_\mu : F(N) \to R$ úgy, hogy $v_\mu(g) = v(g \circ \mu)$ minden sima függvényre N-en. Könnyen láthatóan ez egy érintővektort ad a célsokaság $\mu(p)$ pontjának érintőterében, ez lesz a $T_p\mu$ leképezés, ez az *érintőleképezése* μ-nek.

Kifejezhetjük ezt koordinátákkal is. A kiindulási, és a céltér pontjai $p, \mu(p) = q$ körül veszünk egy-egy koordinátázást ξ, η. Veszsük a térképezéshez tartozó bázisokat, és alkalmazzuk a bázistétel(bizonyításá)t.

$$T_p\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(p)\right) = \sum_{l=1}^{n} T_p\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(p)\right)(y^l) \cdot \frac{\partial}{\partial y^l}(q) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(p)\left(y^l \circ \mu\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y^l}(q) =$$

$$= \underline{\sum_{l=1}^{n} \partial_i\left(y^l \circ \mu \circ \xi^{-1}\right)(\xi(p)) \cdot \frac{\partial}{\partial y^l}(q)}$$

$T_p\mu$ lin. leképezés mátrixának elemei

$$A^l_i = \partial_i\left(y^l \circ \mu \circ \xi^{-1}\right)(\xi(p))$$

Tehát a leképezés mátrixa pont a térképekre átvitt függvény Jacobi-mátrixa lesz ($n \times m$-es).

A sima görbék esetét külön kiemeljük. Egy darab alapvektor van, ez pont deriválásként hat. $\sigma : I \to M$ sima görbe, mi lesz az alapvektor képe? Pont a görbe irányában vett deriválásként.

Teljesül továbbá a láncszabály.

$M \xrightarrow{\mu} N \xrightarrow{\rho} P$ által kapott összetett függvény érintőleképezése megegyezik a tagonként vett érintőleképezések kompozíciójával. Megintcsak megmutatjuk, hogy az egyenlőség két oldala ugyanúgy hat (használjuk a kompozíció asszociativitását). $v \in T_pM, h \in F(P)$:

$$T_p(\rho \circ \mu)(v)(h) = v(h \circ (\rho \circ \mu)) = v((h \circ \rho) \circ \mu) =$$

$$= T_p\mu(v)(h \circ \rho) = T_{\mu(p)}\rho\left(T_p\mu(v)\right)(h)$$

$$\Rightarrow T_p(\rho \circ \mu)(v) = T_{\mu(p)}\rho \circ T_p\mu(v) \qquad \square$$

Következmény, ha veszünk egy sima görbét M-ben, akkor a görbe érintővektorának érintőleképezés alatti képe megegyezik a képgörbe érintővektorával.

Sima vektormezők differenciálható sokaságon

Érintővektormező egy $Y : M \to TM$ szekció, a vektormező sima hogyha minden sima f függvényre Yf is sima.

$\mathcal{X}(M)$ a sima vektormezők halmaza. A sima vektormezők halmaza egy modulus az $F(M)$ gyűrű felett (vagy csak mint R vektortér).

Vektormezőhöz vehetjük az integrálgörbéit, hogyha a pontbeli érintővektorűra $\sigma'(p) = Y(\sigma(p))$, vagyis megegyezik a vektormező pontbeli értékével. Ezek konstrukciója diferenciálegyenletrendszerek megoldásaként áll elő. Lokális koordinátákban felírhatjuk ezeket az egyenleteket. Volt diffegyen, hogy lokálisan minden pontból el tudunk indítani ilyen görbéket, kérdés hogy mikor igaz az, hogy minden integrálgörbe kiterjed a teljes számegyenesre?

3.

Múlt órán integrálgörbéket definiáltunk, beláttuk a bázistételt.

Duális érintőtér T_p^*M, egy f függvény p pontban vett deifferenciálja az a $df(p) : T_pM \to R$ lineáris forma, melyre $df(p)(v) = v(f)$ áll fenn, ez persze egy tényleg egy lineáris forma a T_pM téren.

Egy térképezésen vehetjük a koordinátafüggvényeket $x^i = u^i \circ \xi$, és ezek differenciáljait $dx^i(p)$, világos, hogy ezek fogják alkotni a duális bázist a koordinátakörnyezethez csatolt alapvektorokhoz.

$$dx^i(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^l}(p)\right) = \frac{\partial}{\partial x^l}(p)\,(x^i) =$$

$$= \partial_l\left(x^i \circ \xi^{-1}\right)(\xi(p)) = \partial_l\left((u^i \circ \xi) \circ \xi^{-1}\right)(\xi(p)) =$$

$$= \partial_l u^i(\xi(p)) = \delta^i_l$$

Ez a differenciál is teljesíti a Leibniz szabályt az érintővektorok definíciója miatt.

Sima vektormezők mint az $F(M)$ derivációi

Világos, hogy $F(M)$ egy algebra, deriváció egy lineáris leképezés, ami a szorzásra nézve a Leibniz szabályt teljesíti. Ha adott egy sima vektormező $Y : M \to TM$, tekinthetjük minden függvényre az $Yf(p) = Y_p(f)$ sima függvényt, a Leibniz tulajdonság is teljesül az érintővektorok definíciója miatt. Felmerül a kérdés, hogy minden deriváció előáll-e, mint egy vektormező szerinti iránymenti deriválás? Igen!

Sima vektormezők Lie-zárójele egy $[X, Y] : F(M) \to R$ leképezés, ha X, Y sima vektormezők, és teljesül hogy $[X, Y]f = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$.

▼ Állítjuk, hogy ez egy érintővektort definiál M-hez p-ben.

A linearitás világos, kell még a Leibniz szabály.

$$
\begin{aligned}
[X,Y]_p(fg) &= X_p(Y(fg)) - Y_p(X(fg)) = \\
&= X_p((Yf)g + f(Yg)) - Y_p((Xf)g + f(Xg)) = \\
&= X_p(Yf)\cdot g(p) + Y_p(f)\cdot X_p(g) + X_p(f)\cdot Y_p(g) + \\
&\quad + f(p)\cdot X_p(Yg) - Y_p(Xf)\cdot g(p) - X_p(f)\cdot Y_p(g) - \\
&\quad - Y_p(f)\cdot X_p(g) - f(p)\cdot Y_p(Xg) = \\
&= \big(X_p(Yf) - Y_p(Xf)\big)\cdot g(p) + f(p)\cdot\big(X_p(Yg) - Y_p(Xg)\big) \\
&= [X,Y]_p(f)\cdot g(p) + f(p)\cdot [X,Y]_p(g)
\end{aligned}
$$

Hasonlóan definiálhatjuk vektormezők Lie zárójelét, pontonként. Megjegyezzük továbbá, hogy ha a sima vektormezőkre, mint $F(M)$ modulusra tekintünk, akkor a Lie zárójel nem lineáris!

Koordináta alakban kiszámolhatjuk vektormezők Lie-zárójelét, és nullát kapunk az alapvektorokra.

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] f &= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} f\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} f\right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\partial_j (f \circ \xi^{-1}) \circ \xi\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\partial_i (f \circ \xi^{-1}) \circ \xi\right) \\
&= \left(\partial_i \partial_j (f \circ \xi^{-1}) - \partial_j \partial_i (f \circ \xi^{-1})\right) \circ \xi = 0
\end{aligned}
$$

Lie-algebra definíció. Antikommutatív+Jacobi azonosság, pl R^3 a vektoriális szorzással.

Állítjuk, hogy $X(M)$ a Lie-zárójellel Lie algebra, a Jacobit kell leellenőrizni.

Hogyan tudnánk jellemezni a részszokaságokat?

V^m, W^n vektorterek, V^*, W^* a duális tereik, $\alpha : V \to W$ lineáris leképezés, $e_i,\ f_j$ bázisok, akkor $\alpha(e_i) = \sum A_i^r f_r$ mátrixszal írható le a leképezés. Ez indukál egy leképezést a duális terek között $\alpha^*(\omega)(v) = \omega(\alpha(v))$ a másik irányban. A duális bázisokat ϵ^i, ϕ^j-vel jelölve könnyen látszik, hogy ugyan azon együtthatók szerepelnek $\alpha^*(\phi^r) = \sum A_i^r \epsilon^i$. Mivel mátrix és transzponáltjának a rangja megegyezik, látjuk, hogy $rk\alpha = rk\alpha^*$.

Vegyünk egy sima leképezést, ennek az érintőleképezését, végül ennek a duálisát.

$$T_p\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(p)\right) = \sum_{r=1}^{n} \underbrace{\partial_i(y^r\circ\mu\circ\xi^{-1})(\xi(p))}_{A_i^r}\cdot\frac{\partial}{\partial y^r}(\mu(p))$$

Leképezés indukált lineáris érintőleképezése

Az előbbihez hasonlóan itt is a Jacobimátrix transzponáltja fogja megadni a duális leképezést.

A rangmegmaradás miatt, ha injektív volt a leképezés, akkor az indukált duális leképezés szürjektív lesz, és fordítva.

▼ Állítás:Minden $g \in F(N)$ függvény diferenciáljára $(T_p\mu)^*(dg(\mu(p)) = d(g\circ\mu)(p)$.

$$(T_p\mu)^*(dg(\mu(p)))(v) = dg(\mu(p))\,(T_p\mu(v)) = T_p\mu(v)(g) = \\ = v(g\circ\mu) = d(g\circ\mu)(v), \quad v\in T_pM.$$

Sima leképezések osztályozása

μ immerzió, hogyha minden pontban $T_p\mu$ injektív, szubmerzió, ha $T_p\mu$ szürjektív. Lokális diffeomorfizmus, ha minden pontnak van olyan U környezete, amire megszorítva $\mu|_U$ diffeomorfizmust létesít a képére.

Megjegyzés: a térképezések lokális diffeomorfizmusok.

▼ Tétel: Ha $T_p\mu$ izomorfizmus, akkor μ lokális diffeomorfizmus p-körül.

Áttérünk térképekre, és látjuk, hogy a térképekre áthúzott függvény Jacobi mátrixa nemelfajuló p-ben, és alkalmazzuk az inverzfüggvény tételt.

Így nyerhetünk térképezést sima leképezésekből. Vegyünk sima függvényeket R-be, melyeknek a p-beli differenciálja bázist alkot T_pM^*-ban. Ezeket összetéve egy vektorleképezéssé nyerünk egy $M \to R^m$ leképezést. Állítjuk, hogy p egy környezetén ez a leképezés térkép.

Kellene, hogy $(T_p\eta)^*$ maximális rangú. R^m_{\eta(p)}-ben a természetes bázist, és koordinátafüggvényeket tekintve alkalmazhatjuk a koérintőleképezés kiszámolására adott képletet. Ebből látjuk, hogy az R^m^* duális bázisa pont az dy^i-be megy (ahol $\eta = (y^1, \ldots, y^m)$), tehát bázist bázisba visz, ergo izomorfizmus, majd használjuk az előbbi állítást. Megmutatható továbbá, hogy ez kompatibilis lesz a differenciálhatósági struktúrával.

Definíció: Egy P sima sokaságot az M részsokaságának nevezünk, ha $P \subset M$ és a topológia az altértopológia, továbbá $\iota : P \hookrightarrow M$ természetes injekció egy immerzió.

Beágyazás hasonlóan egy injektív immerzió, amely homeomorfizmust ad P és a képe között.

Térképezéseknél különböző dimenziós affin alterek ősei különböző dimenziós beágyazott részsokaságokat adnak, ezeket hívjuk koordináta-szeletnek. A projekcióval komponálva kapunk rajta térképezést is, ezek a k-dimenziós koordináta szeletek, ezek topologikus, sőt differenciálható sokaságok, differenciálható részsokaságai M-nek.

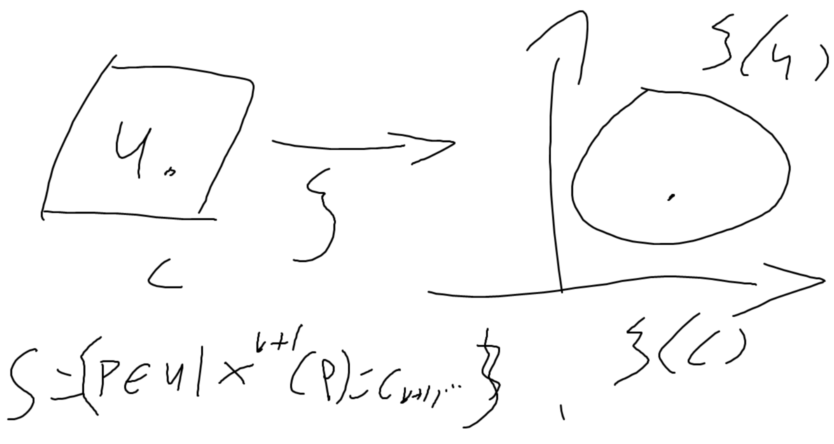
Állítás: Ha van egy olyan részhalmaz, aminek minden pontja körül van egy olyan környezete, ami megegyezik egy koordináta-szelettel, akkor ez a halmaz differenciálható részsokaság(gá tehető). A megfordítás is igaz lesz, minden k-dimenziós részsokasághoz adhatóak olyan térképek, hogy pont a koordinátaszeletek feleljenek meg a részsokaság térképezéseinek.

4.

Múlt órán: részsokaságok.

Definíció: M diffható sokaság, a P sokaság részsokasága M-nek, ha $P \subset M$, és $\iota : P \to M$ természetes leképezés egy immerzió.

Példa: koordinátaszelet. (U, ξ) térképkörnyezet, tekinthetjük a képhalmazának egy pontját



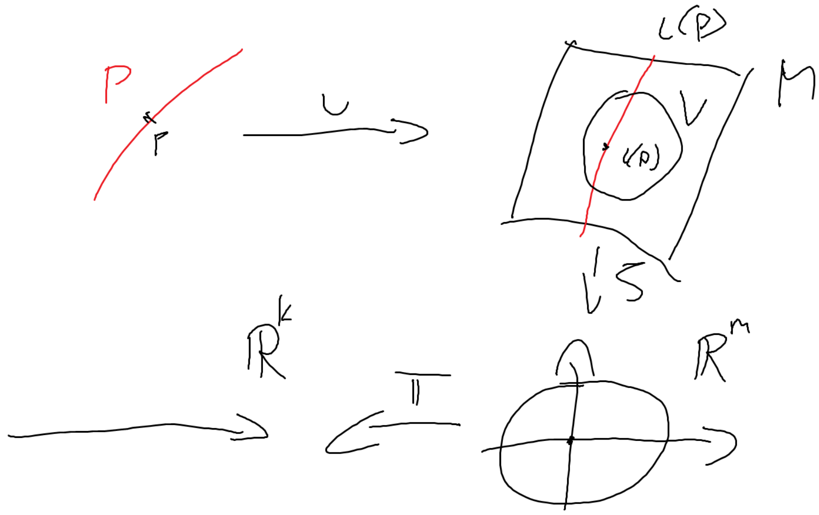
A koordinátaszelet konstrukciója

Ezt nevezzük k dimenziós koordináta szeletnek, gyakorlatilag egy affin altér ősképe. Világos, hogy topologikus sokaság, a térképet az első k koorinátára való projekcióval kell csak komponálni, $\tilde{\xi} : \pi \circ \xi|_S$, ahol $\pi : R^m \to R^k$ a vetítés. A difható struktúrát it megkapjuk ezzel, $(S, \tilde{\xi})$ egy globális térkép.

Több is igaz, minden részsokaság koordinátaszeletek uniójaként fog előállni.

▼ Tétel: Legyen $P^k \subset M$ részsokaság, ekkor tetszőleges $p \in P$ pontban létezik egy olyan (U, ξ) térképe M-nek, hogy $U \cap P$ ennek egy koordinátaszelete.

Legyen (V, ζ) egy olyan M-beli térkép, hogy $p \in V$ és $\zeta(p) = 0$. Az idetartozó koordinátafüggvényeket $z^i = u^i \circ \zeta$-val jelöljük. Tudjuk, hogy $\iota : P \to M$ egy immerzió, vagyis mindig injektív az érintőleképezése.



Az alapfelállás

Az előbbi megjegyzés szerint $(T_p\iota)^* : T_p^*M \to T_p^*P$ szürjektív. $dz^1(p), \dots, dz^m(p)$ bázis a duális térben, tekintsük a képét $(T_p\iota)^*(dz^i(p)) = d(z^i \circ \iota)(p)$, ezek a differenciálformák generálják a duális T_p^*P teret szürjektivitás miatt, tehát létezik k darab közöttük ami bázist alkot, feltehető, hogy az első k darab ez a bázis. A múlt órai tétel szerint megfelelő szűkítésével a $W \subset \iota^{-1}(V \cap P)$ környezetnek térképezést adnak a $z^i \circ \iota$ függvények $i = 1 \dots k$.

Legyen $\eta = \pi \circ \zeta \circ \iota|_W$. A projekció egy nyílt leképezés, megfelelő $\hat{V} \subset V$-re $\pi\xi\hat{V} \subset \eta W$ teljesülni fog (esetleg egy kis szűkítéssel. Válasszuk $f_i = z^i\iota\eta^{-1} : \eta W \to R$. Most az $x^i : \hat{V} \to R$ függvényeket adjuk meg, az első k koordinátában egyezzen meg $z^i|_{\hat{V}}$-vel, a maradék helyeken $x^j := z^j - f_j\pi\zeta$. Kellene, hogy ez is egy térképezés, ergo, hogy $dx^i(p)$ lineárisan függetlenek.

$$dx^i(p) = \sum_l dx^i(p)(\partial/\partial z^l) \cdot dz^l(p) = \sum_l B_l^i \cdot dz^l(p)$$

Ha $j \leq k$, akkor nem végeztünk változtatást, $B_l^j = \delta_l^j$, az l. alapvektort kell hattatnunk a j. koordinátafüggvényen. A fennmaradó $j > k$ esetben állítjuk, hogy $l > k$-ra szintén $B_l^j = \delta_l^j$ teljesül. Behelyettesít, kibont, behelyettesít, $f_j\pi$ konstans az utolsó $m - k$ koordinátatengely mentén.

Most vehetünk egy $U \subset \hat{V}$ nyíltat p körül, amin az imént kiszámolt $x^1|_U, \dots, x^m|_U$ függvények térképezést adnak, hiszen a differenciálok bázist alkotnak T_p^*M-ben.

Belátjuk, hogy (U, ξ)-nek $U \cap P$ koortinátaszelete, de ez világos. GGEZ

▼ Állítás: $P^k \subset M$ részsokaság, legyen adott $\mu : N \to M$ sima úgy, hogy $\mu(N) \subset P$. Ekkor a $\tilde{\mu} : N \to P$ megszorított leképezés is sima.

Vehetjük a koordinátaszelet térképezéseket, ezen világosan látszik, hogyha áthúzzuk μ-t, sima leképezést kapunk.

▼ Állítás: Legyen $P \subset M$ olyan, hogy tetszőleges $p \in P$-hez létezik M-beli (U, ξ) térkép, hogy $U \cap P$ egy k-dimenziós koordináta szelet. Ekkor P egy k dimenziós részsokasággá tehető.

"Kézenfekvő kalkuláció."

▼ Állítás: M tetszőleges P részhalmaza legfeljebb egyféleképpen tehető részsokasággá, azaz legfeljebb egy C^∞ osztályú teljes atlasz adható meg rajta.

Legyenek A_1, A_2 olyan teljes atlaszok P-n, hogy (P, A_1) és (P, A_2) egyaránt részsokaságok.

(M, B) a teljes atlasz adja meg a difható struktúrát. $\iota_1 : (P, A_1) \to (M, B)$, és $\iota_2 : (P, A_2) \to (M, B)$ injektív immerziók (a függvény maga azonos, csak az alantas differenciálható struktúrákat változtatjuk meg). Ekkor $\tilde{\iota}_1 : (P, A_1) \to (P, A_2)$ sima leképezést ad oda, és vissza, és a két struktúra diffeomorf.

Definíció: Legyen adott egy $\mu : M \to N$ sima leképezés, $c \in \mu(M)$ reguláris érték, ha $\forall p \in \mu^{-1}(c)$ pontban a $T_p\mu$ szürjektív.

▼ Állítás: Ha c egy reguláris érték, akkor $\mu^{-1}(c)$ egy $m - n$ dimenziós részsokaság.

Vegyünk egy (U, ξ) térképet $p \in M$ körül, és (V, η) egy térkép $\mu(p) = c$ körül. Kihasználjuk, hogy $(T_p\mu)^* : T_c^*N \to T_p^*M$ injektív, $d(y^r\mu)(p)$ független elemek T_p^*M-ben, választunk hozzájuk még $m - n$ darabot, hogy bázist kapjunk, pl az első $m - n$ darab, $dx^i(p), \dots, dx^{m-n}(p), d(y^1\mu), \dots$

Legyen $z^j = x^j$, ha $j \leq n - m$, illetve $z^{m-n+r} = y^r\mu$, ha $r = 1 \dots n$. Mivel a differenciálok függetlenek, van olyan esetleg szűkebb $W \subset U$ tartomány, amelyen ezek a függvények térképezést adnak. $S = \mu^{-1}(c) \cap W$ egy $m - n$ dimenziós koordinátaszelet lesz, hiszen az utolsó n koordináta konstans lesz.

5.

Kovariáns tenzormezők

$X(M)$ sima vektormezők tere M-en, egy modulus $F(M)$ felett.

Definíció: Az M-en vett $0, r$ tipusú *tenzormezőn* egy olyan $Q : X(M) \times \cdots \times X(M) \to F(M)$ leképezést értünk, ami $F(M)$-lineáris, ergo változóiban additív, és sima függvény szorzó kiemelhető.

Értelmezhető $1, r$ tipusú tenzormező is, ahol $Q : X(M)^r \to X(M)$.

Állítás: tegyük fel, hogy valamely p pontban valamely Y_l mező nulla, akkor $Q(Y_1, \ldots, Q_r)(p) = 0$. □

Állítás: Legyenek $Y_1, \ldots, Y_r$ és $Z_1, \ldots Z_r$ vektormezők, melyek a p-ben ugyanazt veszik el, akkor $Q(Y_1, \ldots, Y_r)(p) = Q(Z_1, \ldots, Z_r)(p)$. □

Ezen két állításból következően értelmezhető minden tenzormezőhöz egy $Q_p : T_pM^r \to R$ lineáris forma.

Megjegyzés $T_r^0(M), T_r^1(M)$ jelöli a 0,r és 1,r tenzormezők terét.

Definíció: $Q_0 \in T_r^0(M), Q_2 \in T_r^0(M)$ tenzormezők tenzori szorzata az a $Q_1 \otimes Q_2 \in T_{r+s'}^0$ melynek az értéke az Y_i vektorokon $Q_1(Y_1, \ldots, Y_r)Q_2(Y_{r+1}, \ldots, Y_{r+s})$.

1-forma mezők

$X^*(M)$ jelöli a 0,1 tipusú mezők terét, ezek vektormezőkhöz rendelnek függvényeket.

Definíció: $f \in F(M)$ függvény diferencálja df az az 1-forma, melynél $df(Y) = Yf$.

Tenzormező visszahúzása

$\mu : M \to N$ sima leképezés, és $Q \in T_r^0$, tekinthetjük a visszahúzott μ^*Q tenzormezőt, melynek a definíciója $\mu^*Q(Y_i) = Q(T\mu(Y_i)$.

Definíció: Riemann metrika egy 0,2 tenzormező, amely szimmetrikus, és minden érintőtérre megszorítva egy pozitív definit bilineáris formát eredményez.

Párhuzamos eltolás

$r : D \to R^n$ egy M hiperfelület paraméterezése, ebben fut egy görbe, egy vektort ementén párhuzamosan eltolhatunk. Egy vektormező $Z : I \to R^n$ görbementi, ha $Z(t) \in T_{\gamma(t)}M$ minden t-re.

Deiníció: Z egy párhuzamos vektormező ha $Z'(t) - < Z'(t), N\sigma(t) > N\sigma(t) = 0$.
Ez mind szép és jó, amíg be vagyunk ágyazva, az absztrakt sokaságokhoz konnexiók kellenek.

Kovariáns deriválás sokaságon

Definíció: $\nabla : X(M)^2 \to X(M)$ egy kovariáns deriválás/lineáris konnexió M-en, ha

1. első változójában additív
2. első változójában $F(M)$ lineáris
3. második változójában additív
4. második változójában $F(M)$ deriválás

Megjegyzés: $\nabla_X Y$-nal jelöljük, és az Y mező X szerinti kovariáns deriváltjának hívjuk.

Ha a második változót fixáljuk, kapunk egy 1,1 tenzort, és látjuk, hogy az irány, amerre deriválunk, csak a pontbeli értéktől függ.

Állítás: Ha $Y = \tilde{Y}$ a p pont egy környezetében, akkor $\nabla_v Y = \nabla_v \tilde{Y}$.

> $Y - \tilde{Y}$ azonosan nulla egy környezetben, ezt kénytelen nullába vinni a ∇_v 1-1 tenzor.

Ha U, ξ egy térkép, $X(U)$-n vehetjük az alapvektormezőket $\partial/\partial x^i$, és vehetjük a $\nabla_{\partial/\partial x^i} \partial/\partial x^j$ felírását ebben a bázisban. Felírva a derivált mezőt a természetes bázisban $\sum \Gamma^k_{ij} \partial/\partial x_k$, ami tovább megegyezik $\Gamma^k_{ij} = dx^k(\nabla_{x_j} x_j)$-vel.

Megjegyzés, ha két vektormező egy v irányú görbe mentén egyenlő, akkor a v irányú kovariáns deriváltjuk is megegyezik.

Legyenek $Y, Z \in X(U)$ lokálisan definiált vektormezők, az alapvektorokból η^i, ζ^i együtthatókkal felírva. Most számolunk, $\nabla_Y Z$-t kibontva a linearitás, és deriválási tulajdonságok szerint.

6.

Kovariáns deriválás/lineáris konnexió folyt.

$\nabla : X(M) \times X(M) \to X(M)$, egy térképezésen kifejezhető koordinátaalakban $\nabla_{X_i} X_j = \sum \Gamma^k_{ij} X_k$ alakban. Ebből a konnexió tulajdonságait felhasználva kifejezhetjük tetszőleges $\nabla_Y Z$ vektormezőt a Christoffel szimbólumokkal, és a vektormezők koordinátafüggvényeivel.

$$\nabla_Y Z = \sum_k (\sum_i y^i X_i(z^k) + \sum_i \sum_j \Gamma^k_{ij} y^i z^j) X_k$$

lesz az X_k együtthatója, ha $Y = \sum y^i X_i,\ Z = \sum z^i X_i$. Egy pontban kiírva ezt a formulát ($Y(p) = v$) adódik a következő.

Állítás: legyen $\sigma : I \to M$ sima görbe, és $Z_1, Z_2 \in X(M)$, ahol $Z_1 \circ \sigma = Z_2 \circ \sigma$. Ekkor $\nabla_{d\sigma/dt} Z_1 = \nabla_{d\sigma/dt} Z_2$ teljesül.

> Veszünk egy térképet $\sigma(t)$ körül, felírjuk a kovariáns deriváltat ezen a térképen. A feltételünk szerint a két vektormező megegyezik a görbén, és így visszaírva a kifejezéseket látjuk, hogy ugyanazt a vektormezőt kapjuk. ■

Definíció: $\sigma : I \to M$ sima görbéhez a $Z : I \to TM$ leképezést *görbementi vektormező*nek nevezzük, ha $Z(t) \in T_{\sigma(t)}M$.

Ha $\sigma(I) \subset U$ egy térképtartományban van, akkor a Z mező kifejezhető $\sum \zeta_i(t)\partial_i\sigma(t)$ alakban (ahol $\zeta_i : I \to R$). A Z görbementi vektormezőt simának mondjuk, ha ezen koordinátafüggvények simák. Ebből definiálható $X(\sigma)$ a görbementi sima vektormezők tere, ez persze egy modulus a $C^\infty(I)$ gyűrű felett.

Definíció: Legyen (U, ξ) olyan térkép, amely tartalmazza $\sigma(t)$-t. Egy $t \in I' \subset I$ intervallumon kifejezhetjük a $Z(t)$ görbementi vektormezőt, ennek a kovariáns deriváltját

$$Z'(t) = \sum_k (\zeta_k'(t) + \sum_i \sum_j \Gamma_{ij}^k(\sigma(t)) \cdot \sigma_i'(t) \cdot \zeta_j(t)) X_k(\sigma(t))$$

formula értelmezi.

Ha σ reguláris (vagyis a sebességvektora nem tűnik el), akkor I-nek megadható egy részintervalluma, és egy olyan $\hat{Z} \in X(M)$ vektormező, hogy $\hat{Z} \circ \sigma|_J = Z|_J$ tetszőleges Z görbementi vektormező esetén, és ekkor $Z' = \nabla_{\dot\sigma}\hat{Z}$.
Ha $\sigma'(t) = 0$ valahol, akkor $Z'(t) = \sum \zeta_k'(t) X_k(\sigma(t))$ teljesül.

$h \in F(I)$, akkor $hZ \in X(\sigma)$, ekkor $(hZ)'(t) = h'(t)Z(t) + h(t)Z'(t)$.

Definíció: A Z görbementi vektormező párhuzamos, ha $Z' \equiv 0$ teljesül.

Világos, hogy ezek egy alterét alkotják $X(\sigma)$-nak, méghozzá m dimenziósat, hiszen egy adot pontból egyértelműen tudunk elindítani egy párhuzamos vektormezőt, egy elsőrendű lineáris difegyenlet megoldásai a koordinátafüggvényei. Következik hogy értelmezhető a σ menti párhuzamos eltolás.

Definíció: σ *geodetikus*, hogyha az érintővektormezeje párhuzamos saját maga mentén. $(\dot\sigma)' = 0$

Ez már egy másodrendű diffegyenlet megoldását jelenti, nem biztos hogy kiterjed, de legalábbis minden pontból kiindul geodetikus minden irányban.

A kovariáns deriváláshoz rendelt tenzormezők

1. Torziótenzor. $T : X(M) \times X(M) \to X(M)$, definíció szerint $T(Y, Z) = \nabla_Y Z - \nabla_Z Y - [Y, Z]$. Látványosan antiszimmetrikus, tenzorialitás ellenőrizhető.
2. Görbületi tenzor. $R : X(M)^3 \to X(M)$, ez pedig $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$. Ez az első két inputjában antiszimmetrikus.

Kovariáns tenzormező deriváltja

$Q \in T_r^0(M)$ egy $0, r$ tenzor. Ennek az X mező szerinti deriváltja azon $\nabla_X Q \in T_r^0(M)$ tenzormező lesz, amelyet a

$$\nabla_X Q(Y_1, \dots, Y_r) = X(Q(Y_1, \dots, Y_r)) - \sum_i Q(Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_r)$$

formula értelmez. Továbbá $\nabla Q(Y_1, \dots, Y_{r+1}) := \nabla_{Y_{r+1}} Q(Y_1, \dots, Y_r)$, egyel növelhetjük a rendjét ha a deriváló vektormezőt változónak tekintjük.

Riemann-sokaságok

$g \in T_2^0(M)$ tenzormező egy Riemann-metrika, ha szimmetrikus, és $g_p : T_pM \times T_pM \to R$ pozitív definit minden p-re.

💡 Legyen $Y \in X(M)$ rögzített. A $g_Y : X(M) \to F(M),\ Z \mapsto g(Y, Z)$ leképezés egy $0, 1$ tenzormezőt határoz meg.

Lemma: Legyen adva egy $\omega \in X^*(M)$ (1-forma v. kovektormező), ekkor egyértelműen létezik egy olyan $Y \in X(M)$, hogy $\omega = g_Y$.

> Lokálisan. Térképtartomány (U, ξ), és vehetjük a koordinátafüggvényeket $x^i = u^i \circ \xi$. A g metrika térkép szerinti komponensfüggvényei $g_{ij} : U \to R$ sima leképezések, ahol $g_{ij}(p) = g_p(\partial_i(p), \partial_j(p))$, ezekkel kifejezhetjük a metrikát mint bilineáris formát, $\sum_i \sum_j g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ alakban. Vehetjük a g^{lk} inverzmátixot. $\omega|_U = \sum \rho_i dx^i$ alakban írható fel. Elegendő egy olyan vektormezőt konsturálni, melyre $\omega(X_l) = g(Y, X_l)$, hiszen ha a bázison megegyeznek, akkor mindenhol. Beírva ebbe az egyenletbe $\rho_l = \sum g_{il} y^i$, ezt az inverzzel átszorozva megkapjuk, hogy $Y = \sum\sum g^{ij} \rho^j \partial_i$, vagy valami ilyesmi alakú lesz lol ■

Tétel: (M, g) Riemann sokaságon egyértelműen létezik olyan ∇ kovariáns deriválás, amely torziómentes, és $\nabla g = 0$.

7.

Riemann sokaságon vett Levi-Civita lineáris konnexió

$g \in T_2^0(M)$ a metrika tenzormezője M-en. Egy ilyen objektumot is lehet kovariánsan deriválni, definíció szerint $\nabla_X g(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$.

Tétel: létezik egy olyan kovariáns deriválás, amelyre $\nabla_X g \equiv 0$ minden X szerint, és torziómentes.

> Bizonyítás: Tegyük fel, hogy ∇ egy ilyen lineáris konnexió. A metrika ad egy kanonikus megfeleltetést a vektormezők, és a kovektormezők között, mint múlt órán megemlítettük ($\forall\ X \in X(M)\ \exists\ \omega\ \forall Y : g(X, Y) = \omega(Y)$).

Most az első feltétel szerint $Xg(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$, majd ezeket felírjuk ciklikusan az X, Y, Z vektormezőkre:

$$
\begin{aligned}
Xg(Y,Z)) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\
Yg(Z,X)) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\
Zg(X,Y)) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)
\end{aligned}
$$

$1. + 2. - 3.$-ból adódik

$$
\begin{gathered}
X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) = \\
g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z) + g([X,Z],Y) + g([Y,Z],X)
\end{gathered}
$$

Az utolsó két tag a torziómentesség miatt a Lie-zárójel. $\nabla_Y X = \nabla_X Y - [X,Y]$-t felhasználva átírjuk az első tagot is az egyenlőség jobb oldalán.

$$2g(\nabla_X Y, Z) - g([X,Y],Z) + g([X,Z],Y) + g([Y,Z],X)$$

Most a teljes egyenlőségben csak egy tagban szerepel kovariáns deriválás, kifejeztük $g(\nabla_X Y, Z)$-t iránymenti deriválások és Lie zárójelek illetve a metrika segítségével.

Ezzel megkaptuk a Koszul formulát, a $\nabla_X Y$-hoz tartozó 1-forma mező egyértelműen meghatározott, és így a metrikával maga a vektormező is.

Most egzisztenciát is belátjuk. Vegyük azt a $C : X(M)^3 \to F(M)$ leképezést, amit a Koszul formula definiál. Az additivitása minden változóban világosan látszik. Az derül ki viszont, hogy csak az első és harmadik változójában lesz $F(M)$ lineáris. A második változójában

$$C(X, fY, Z) = fC(X,Y,Z) + (Xf)g(Y,Z)$$

történik. Ez kiszámolható egyszerű behelyettesítéssel, és az $[fY, Z] = f[Y,Z] - (Zf)Y$ azonosság felhasználásával.

Legyen X, Y fix, tekinthetjük a $C_{X,Y}$ leképezést amit ezzel kapunk, ez egy 1-forma mező lesz. Ehhez a metrikát felhasználva egyértelműen létezik egy olyan $D(X,Y)$-el jelölt vektormező, hogy $C_{X,Y}(Z) = g(D(X,Y),Z)$, ergo kaptunk egy $D : X(M)^2 \to X(M)$ hozzárendelést. Erről be akarnánk látni, hogy kovariáns deriválás.

A $g(D(X,Y),Z) = C(X,Y,Z)$ felírásból, és az első változóbeli $F(M)$ linearitásból látszik, hogy $D(fX,Y) = fD(X,Y)$, a második változóhoz az előbbi azonosságot használjuk:$g(D(X,fY),Z) = g(f(D(X,Y) + (Xf)Y, Z)$ a tagok összevonása után, mivel ez minden Z-re igaz, $D(X,fY) = fD(X,Y) + (Xf)Y$ következik tehát D egy kovariáns deriválás.

Torziómentességhez $D(X,Y) - D(Y,X) = [X,Y]$ teljesül-e, egyszerű formális ellenőrzés, végül a metrikussághoz $X(g(Y,Z)) - g(D(X,Y),Z) -$

$g(D(X,Z),Y)=0$ kell, az utolsó két tag pont $C(X,Y,Z)$ és $C(X,Z,Y)$, megintcsak egy formális ellenőrzés.■

💡 A tételben szereplő lineáris konnexiót nevezzük Levi-Civita féle kovariáns deriválÍt.

A Christoffel-féle szimbólumok

(M,g) Riemann sokaság, (U,ξ) térképezések. Egy ilyenen felírhatjuk $\nabla_{x_i}x_j=\sum\Gamma^l_{ij}x_l$ alakban a kovariáns deriválást, ahol $x^i:u^i\circ\xi:U\to R$ a koordináatfüggvények, és $x_i=\partial/\partial x^i$.

Továbbá a metrikából $g_{ij}:U\to R$, ahol $G(p)=(g_{ij}(p))=(g(x_i(p),x_j(p)))$ a Gram mátrixa a lokális koordinátarendszerünknek. Ennek nemelfajultság miatt vehetjük az inverzmátrixát, ez legyen $H(p)=(h^{kl}(p))$, ezekre teljesül, hogy $\sum g_{il}h^{lk}=\delta^k_i$. Lokálisan $g|_U=\sum_i\sum_j g_{ij}dx^i\otimes dx^j$ alakú lesz a metrika.

Tétel: A Christoffel szimbólumai a Levi-Civita konnexiónak kifejezhetőek a metrika komponenseiből a következő módon: $\Gamma^l_{ij}=\frac{1}{2}\sum h^{lk}(\frac{\partial}{\partial x^i}(g_{jk})+\frac{\partial}{\partial x^j}(g_{ki})-\frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij}))$.

Bizonyítás: $\nabla_{X_i}X_j=\sum\Gamma^l_{ij}X_l$, ezt szorozzuk skalárisan X_k-val, $g(\nabla_{X_i}X_j,X_k)=\sum\Gamma^l_{ij}g_{lk}:=P_{ikj}$. A konnexió szimmetrikusságából $X_i(g(X_j,X_k))=g(\nabla_{X_i}X_j,X_k)+g(X_j,\nabla_{X_i}X_k)$. Megint ciklikus cserélgetést csinálunk:

$$\begin{aligned}X_i(g_{jk})&=P_{ikj}+P_{ijk},\\X_j(g_{ki})&=P_{jik}+P_{jki},\\X_k(g_{ij})&=P_{kji}+P_{kij}\end{aligned}$$

Most pedig megint $1.+2.-3.$, és azt kapjuk hogy $X_i(g_{jk})+X_j(g_{ki})-X_k(g_{ij})=2\sum\Gamma^l_{ij}g_{lk}$. Erre a kifejezésre rászorozhatunk a H inverzmátrixszal megkapjuk a kívánt azonosságot.■

Példa: Poincaré féle félsíkmodell a hiperbolikus geometriának. $M=\{(u,v)\in R^2|v>0\}$, a metrika $g_{ij}(u,v)=1/v^2\delta_{ij}$.

8.

Összefüggő Riemann sokaság metrizálása

Riemann sokaságban a távolság alatt két pontot összekötő görbék ívhosszának az infimumát értjük. Ez ad egy metrikát a sokaságon, az indukált topológia megegyezik a sokaság eredeti topológiájával.

Legyen $\sigma:[a,b]\to M$ egy sima görbe, $\dot\sigma=T_t\sigma(d/du(t))$ az érintővektora, és az ívhossz $\int\sqrt{g(\dot\sigma,\dot\sigma)}dt$ lesz. Két tetszőleges pontot szakaszonként sima görbével összeköthetjük, és ennek az ívhosszát kiintegrálhatjuk, majd ezen számokra vehetünk egy infimumot. Általában nincsen legrövidebb összekötő görbe, lokálisan azonban igen.

Állítás: Legyen adva egy $\sigma : I \to M$ sima görbe, Ha $Y, Z \in X(\sigma)$ görbementi vektormezők párhuzamosak, akkor $g(Y, Z)$ konstans t-ben.

Bizonyítás: $\dot{\sigma}(t) \neq 0$ az első eset. Ekkor van egy olyan leszűkítése az intervallumnak J, hogy a $\sigma(t)$ pont egy U nyílt környezetén megadhatóak $\hat{Y}, \hat{Z}$ vektormezők, melyek kiterjesztik Y, Z-t erre a nyíltra. Ekkor az $f =< Y, Z >$ függvény is kiterjed erre a környezetre persze. Tekintsük az $f'(t)$ deriváltat, behelyettesítve ez $\frac{d}{du}|_t(g(\hat{Y}, \hat{Z}) \circ \sigma) = T\sigma(\frac{d}{du}|_t)g(\hat{Y}, \hat{Z}) = \dot{\sigma}(t)(g(\hat{Y}, \hat{Z})) = g(\nabla_{\dot{\sigma}(t)}\hat{Y}, \hat{Z}(\sigma(t))) + g(\hat{Y}(\sigma(t)), \nabla_{\dot{\sigma}(t)}, \hat{Z}) = g(Y', Z) + g(Y, Z')$, és ez a párhuzamosság miatt 0.

Ha $\dot{\sigma} = 0$, akkor lokálisan kifejezzük, és a Leibniz szabályt alkalmazzuk, a 0-vektor irányában kell deriválni, ami mindig nullát eredményez. A két vektormező komponensfüggvényeinek deriváltja 0 lesz párhuzamosság, és a feltételünk miatt (a görbementi kovariáns deriváltas formulában a Christoffel szimbólumos tagot megöli $\dot{\sigma}$), a harmadik tag f'-ben pedig azért esik ki, mert $\dot{\sigma} = 0$. ■

Geodetikusok

σ görbe geodetikus pontosan akkor, hogyha $\dot{\sigma}' = 0$. Egy térképtartományban felírhatjuk a diffegyenletet ezekre. $\dot{\sigma} = \sum \sigma_i'(t)X_i(\sigma(t))$, ezt még deriválva

$$\sigma_k''(t) + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(\sigma(t))\sigma_i'(t)\sigma_j'(t) = 0$$

minden k-ra, kell hogy teljesüljön.

Következmény: Ha az M egy p pontjában adva van egy $v \in T_pM$ vektor, akkor létezik egyértelmű geodetikus, melyre $\sigma(0) = p$, és $\dot{\sigma}(0) = v$ teljesül valamely maximális I intervallumon értelmezve.

Exponenciális leképezés

A $v \in T_pM$ érintővektorhoz tartozó maximális γ_v geodetikushoz tartozó intervallum legyen I_v . Jelölje $\tilde{T_pM}$ azon vektorok halmazát, melyekre $1 \in I_v$. Belátható, hogy egy geodetikus lineáris átparaméterezése is geodetikus, és hogy $\tilde{T_pM}$ nyílt, és csillegszerű halmaz. Ezen a halmazon $\exp_p : \tilde{T_pM} \to M$ az $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$ képlettel. Belátható, hogy ez a leképezés sima, és a nulla egy környezetét diffeomorf módon képezi le p egy környezetére.

Normális koordinátarendszer

e_i ortonormált bázis T_pM-ben, és $U = \exp_p(W)$ a megfelelő kis környezetre. $x^i : U \to R$ az a függvény, ahol $x^i(\exp_p(w)) = g_p(w, e_i)$. Ezeket tegyük össze egy ξ leképezéssé, ezt hívjuk normális koorinátarendszernek.

Görbületi tenzor tulajdonságai

<u>Állítás</u>: Tetszőleges $X, Y, Z, W \in X(M)$ vektormezőkre fennáll

1. $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$
2. $g(R(X,Y)Z, W) = -g(R(X,Y)W, Z)$
3. $g(R(X,Y)Z, W) = g(R(Z,W)X, Y)$

   Kihasználjuk, hogy tenzormezőkkel dolgozunk, elég egy adott térképen az alapvektormezőkre ellenőrizni, tehát válasszuk X, Y, Z, W-ket ilyennek. Torziómentesség miatt $\nabla_X Y = \nabla_Y X$ teljesül ilyen esetben, és ebből $R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - 0$.

   Az első (Bianchi) azonossághoz felírhatjuk a 6 tagot, s páronként kiejtik egymást.

   A második tulajdonsághoz elegendő, hogy $g(R(X,Y)Z, Z) = 0$.

$S = \mathcal{L}(v,w)$ egy síkállás, $S \subset T_pM$, a hozzátartozó Gauss görbület $K_p(S) = \frac{<R(v,w)w,v>}{<v,v><w,w>-<v,w>^2}$.

9.

Alternáló formák egy vektortéren

V egy m-dimenziós vektortér R felett. V-n értelmezett k-lineáris formák tere legyen $\mathcal{L}^k(V)$. Értelmezhető ezek tenzorszorzata, $\alpha \in \mathcal{L}^k$, és $\beta \in \mathcal{L}^l$, akkor $\alpha \otimes \beta \in \mathcal{L}^{l+k}$ a pontonkénti szorzatra, az első k változó α-ba, a többi l változó β-ba helyettesítendő, majd az eredményt összeszorozzuk.

S_k a k-fokú szimmetrikus csoportot jelölje.

<u>Definíció</u>: Az α k-lineáris forma *alternáló*, ha $\alpha(v_{\sigma(i)}) = sgn(\sigma)\alpha(v_i)$ teljesül.

Hasonlóan definiálhatjuk a $\sigma\alpha$ transzformált k-formát, ahol pont a σ permutációval csavarjuk meg az inputokat.

Világos, hogy az $A^k(V)$ alternáló formák egy alteret alkotnak a k-lineáris formák terében. Szeretnénk egy szorzást ezeken is, a tenzorszrzás nem felel meg, nem lesz alternáló a szorzat, valami hasonlót csinálunk majd.

> Vegyük észre, hogy lineárisan összefüggő vektorokon egy alternáló forma értéke mindig nulla. Egyszerűen kifejezünk egyet a többiből, linearitást használjuk, és az alternálóságot.

Következésképp $k > m$-re csak a 0 forma alternáló. Belátható továbbá, hogy általánosan is $\binom{m}{k}$ lesz a k-alternáló formák terének dimenziója.

<u>Állítás</u>: Legyen e_j egy bázisa V-nek, és $i_1 < \cdots < i_k$ indexek. Ezekhez tekintsük az $\epsilon^{i_1 \cdots k}$ formát, ami a következőképpen van definiálva $\epsilon^{i_1 \cdots i_k}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \delta^{i_1}_{j_1} \ldots \delta^{i_k}_{j_k}$, ahol

feltesszük, hogy $j_1 < \dots < j_k$ is teljesül. Ezen formák egy bázist alkotnak a k-alternáló formák terében.

Alternáló operátor

Legyen $\mathfrak{a} : \mathcal{L}^k \to \mathcal{L}^k$ az a leképezés, ahol tetszőleges $\mathfrak{a}(\alpha) = \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma)\sigma\alpha$. Könnyen láthatóan ez a forma mindig alternáló lesz.

> 💡 Az $r, s \in S_k$ permutációk szorzatán az $r \circ s$ leképezést értjük, a kompozíciójelet néha elhagyjuk.

Lemma: $\rho(\sigma\alpha) = \rho\sigma\alpha$ igaz tetszőleges $\rho, \sigma \in S_k, \alpha \in \mathcal{L}^k$-ra.

$\rho(\sigma\alpha)(v_i) = \sigma\alpha(v_{\rho(i)}) = \alpha(v_{\rho(\sigma(i))}) = \rho\sigma\alpha$, egy $v_{\rho(i)} = w_i$ helyettesítéssel látszik szépen.

Lemma: $\mathfrak{a}(\alpha)$ alternáló.

$\rho \in S_k$ mellett tekintsük $\rho\mathfrak{a}(\alpha)$-t.

$$\rho(\sum_\sigma sgn(\sigma)\sigma\alpha) = \sum_\sigma sgn(\sigma)(\rho\sigma)\alpha = sgn(\rho)\sum_\sigma sgn(\rho\sigma)(\rho\sigma)\alpha = sgn(\rho)\mathfrak{a}(\alpha)$$

Külső szorzat az alternáló formákon

Definíció: α k-alternáló, β l-alternáló forma legyen. Az ő külső szorzatukon az

$$\alpha \wedge \beta := \frac{1}{k!l!}\mathfrak{a}(\alpha \otimes \beta)$$

formulával definiált l+k alternáló formát értjük.

Állítás: Igazak az alábbi összefüggések

1. $\beta \wedge \alpha = (-1)^{kl}\alpha \wedge \beta$, vagy egyenértékűen $\mathfrak{a}(\beta \otimes \alpha) = (-1)^{kl}\mathfrak{a}(\alpha \otimes \beta)$
2. $\mathfrak{a}(\mathfrak{a}(\alpha) \otimes \beta)) = k!(\alpha \otimes \beta)$
3. $\mathfrak{a}(\alpha \times \mathfrak{a}(\beta)) = l!(\alpha \otimes \beta)$
4. $\mathfrak{a}(\alpha) = k!\alpha$

   Az egyeshez csak ki kell számolni annak a permutációnak az előjelét, ami az 1..k számokat $l + 1 \dots l + k$-ba viszi, és a $k + 1, \dots, k + l$ számokat $1, \dots, l$-be. Ezt kell hattatnunk hogy felcseréljük a tenzorszorzat sorrendjét, és kiemelünk az előjelével, ami minden bizonnyal $(-1)^{kl}$.

Állítás: tetszőleges α, β, γ k l és n lineáris formákra $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ teljesül, ez egyenlő $\frac{1}{k!l!n!}\mathfrak{a}(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)$.

Állítás: Legyenek ϵ^i lineáris formák. Ekkor tetszőleges v_i vektorokra $\epsilon^1 \wedge \cdots \wedge \epsilon^k(v_i)$ értéke pont $\det \epsilon^j(v_i)$ lesz.

> Az asszociativitási állítást használjuk, a faktoriálissal való osztás nincsen, hiszen 1-formákat tekintünk (figyelem, minden 1-forma alternáló!). Tehát csak a tenzorszorzat alternáltját kell kiértékelni a vektorokon, ami pont a determináns definícióját adja vissza.

Differenciálformák sokaságon

Definíció: Az M sokaságon vett k-fokú *differenciálformá*n egy olyan $\omega : X(M)^k \to F(M)$ kovariáns tenzormezőt értünk, amely minden pontban alternáló.

Értelmezhetjük a *külső szorzatot*, mint a pontonkénti ékszorzatát differenciálformáknak. A k-differenciálformák terét $\Omega^k(M)$-el jelöljük. A $\dim M$ fokú differenciálformákat *térfogati formá*knak nevezzük.

10.

Differenciálformák sokaságon

r-adfokú differenciálforma tulajdonképpen egy $\omega : X(M)^r \to F(M)$, egy $(0, r)$ (kovariáns) tenzormező, amelynél $\omega(X_1, \ldots, X_r) = sgn(\sigma)\omega(X_{\sigma 1}, \ldots, X_{\sigma r})$ teljesül minden $\sigma \in S_k$ permutációra, vagyis ω_p minden pontban egy alternáló forma T_pM-en. Ezeket $\Omega^r(M)$-el jelöljük, az r-edfokú differenciálformák M-en. Ezekre kiterjesztjük a külső szorzás műveletét. Ha $\eta \in \Omega^l(M)$, akkor $\omega \wedge \eta : X(M)^{r+l} \to F(M)$ a külső szorzatuk ami a $\frac{1}{k!l!} \sum_{S_{k+l}} sgn(\sigma)\omega(X_{\sigma 1}, \ldots, X_{\sigma r})\eta(X_{\sigma(r+1)}, \ldots, X_{\sigma(r+l)})$ formula szerint van értelmezve teljesen analóg módon a vektortereken értelmezett alternáló formákhoz.

Alternáló formák egy vektortéren

V egy m dimenziós vektortér. Az $e_1, \ldots, e_m$ bázishoz vehetjük a duális $\epsilon^1, \ldots, \epsilon^m$ duális bázist V^*-ban. Ebből $A^k(V)$-nek bázisa a k-tagú ékszorzatok az ϵ^j-jből (monoton növekvő indexekkel mondjuk). Ez valóban bázis, mint a $\sum \eta(e_{i1}, \ldots, e_{ik})\epsilon^{i1} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{ik}$ felírás mutatja. Következően emiatt $\dim A^k(V) = \binom{m}{k}$. Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik bázistranszformációra az ékszorzat.

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ egy másik bázis, $\beta^1, \ldots, \beta^m$ duálisokkal. Az áttérést felírhatjuk $b_i = \sum c_i^r e_r$ alakban. A térfogati formákra $\epsilon^1 \wedge \cdots \wedge \epsilon^m = (\epsilon^1 \wedge \cdots \wedge \epsilon^m)(b_1, \ldots, b_m)\beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^m$, mert az értékük megegyezik a báziselemeken. Ez utóbbi számot kiértékelhetjük a topdimenziós formákra vonatkozó determinánsos képlettel $\det(\epsilon^i(b_j))\beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^m$ alakú lesz a transzformált m forma, ez pedig az áttérés miatt $\det C\beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^m$.

Lineáris izomorfizmusra mi a helyzet? V, W valós vektorterek. Vegyünk egy $\mu : V \to W$ lineáris leképezést. Ennek a pullbackje $\mu^* : W^* \to V^*$ (másnéven transzponáltja). Ezt kiterjeszthetjük az alternáló ormákra a következő módon. $\mu^* : L^k(W) \to L^k(V)$, ahol tetszőleges η-ra $\mu^*\eta(v_1, \ldots, v_k) = \eta(\mu(v_1), \ldots, \mu(v_k))$-val van definiálva. Ez a leképezés megszűkül az alternáló formák terére. Tegyük fel most, hogy μ lineáris izomorfizmus. b_i egy bázis W-ben, β^i a megfelelő duális bázis, hasonlóan e_i bázis V-ben. Felírhatjuk mostmár μ mátrixát, $\mu(e_i) = \sum A_i^r b_r$. Igazolható, hogy $\mu^*(\beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^m) = \det A\epsilon^1 \wedge \cdots \wedge \epsilon^m$ teljesül, az előző esethez hasonlóan.

A differenciálformák lokális kifejezése

$\omega \in \Omega^k(M)$, és adott egy U, ξ térkép, $x^i = u^i \circ \xi$ koordinátafüggvényekkel. $\omega|_U = \sum \omega(\frac{\partial}{\partial x^{i1}}, \ldots)dx^{i1} \wedge \ldots$ alakban fejezhető ki.

Irányítható sokaságok

Definíció: Az M sokaság irányítható, ha létezik $\nu \in \Omega^m(M)$, amire $\nu_p \not\equiv 0$.

Ebből konkrét irányítást úgy kapunk, hogy egy adott érintőtérbeli bázis irányított, ha a ν rajtuk felvett értéke pozitív, az ilyen bázisokat kompatibilisnek mondjuk.

💡 Egy adott térfogati forma minden pozitív számszorosa ugyanazt az irányítást reprezentálja.

Deifiníció: Legyen M irányítható és az irányítást reprezentálja ν. Az U, ξ térkép kompatibilis az irányítással, ha van olyan $f : U \to R$ pozitív sima függvény, hogy $\nu|_U = f \cdot dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$.

💡 Összefüggő térképtartomány esetén legfeljebb egy koordinátacserével elérhetjük a kompatibilitást, tehát kiválasztható kompatibilis térképekből atlasz.

Térképezésekből nyert térfogati formák

U, ξ és V, η legyenek térképek metsző térképtartományokkal. $x^i = u^i \circ \xi$, és $y^j = u^j \circ \eta$. $\frac{\partial}{\partial y^i}(p) = \sum \frac{\partial}{\partial y^i}(p)(x^r)\frac{\partial}{\partial x^r}(p) = \sum \partial_i(x^r \circ \eta^{-1})(\eta(p))\frac{\partial}{\partial x^r}(p)$ a bázistétel szerint. Tehát a bázistranszformáció mátrixa T_pM-ben pont a $J(\xi \circ \eta^{-1})(\eta(p))$ Jacobi mátrix. A T_p^*M-beli duális bázisok (differenciálformák) $dx^1(p), \ldots, dx^m(p)$, és hasonlóan a másik térképre. Az előbbi meggondolások miatt a bázisok ékszorzatai pontosan az áttérési mátrix determinánsával szorzódnak az áttéréskor ($\wedge dx^i = \det J(\xi \circ \eta^{-1}) \cdot (\wedge dy^i)$).

Tétel: Az M sokaság irányítható pontosan akkor, hogyha kiválasztható rajta olyan sima atlasz, hogy bármely két elemére (mondjuk megint U, ξ és V, η) teljesül, hogy $\xi \circ \eta^{-1} : U \cap V \to R^m$ leképezés Jacobi mátrixának a determinánsa pozitív.

> Veszünk egy fedő megszámlálható résztérképet a feltétel szerinti atlaszból U_α, ξ_α, és a hozzájuk tartozó $f_\alpha \cdot (\wedge dx_\alpha^i)$, ahol f_α egy nemnegatív bumpfüggvény, amivel kiterjesztjük

a lokális térfogati formákat. (lokálisan véges fedő rendszert veszünk az egységosztáshoz, ezért az összeg értelmes)

Riemann metrikával meghatározott térfogati forma

Legyen adva (M, g) Riemann sokaság, amely irányítva van (ν). (U, ξ) legyen az irányítással kompatibilis térkép. Itt lokálisan felírhatjuk a metrikát komponensfüggvényekkel, $g_{ij}(p) = g(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j)$. $\tau(p) := \sqrt{\det G(p)} \cdot (\wedge dx^i)(p)$ egy alternáló forma lesz, ami független a térkép megválasztásától, ez lesz a térfogati forma (ahol $G(p) = g_{ij}(p)$ a Gram mátrix).

$\tilde{G}(p)$ a V, η térképhez tartozó Gram-mátrix legyen. A bilineáris formák transzformációs szabálya szerint $\tilde{G} = J^T G J$, tehát $\sqrt{\det \tilde{G}} = \sqrt{\det G} \det J$, és ezt pont kiegészíti a lokális térfogati forma képletében felbukkanó Jacobi-determináns, tehát minden térképen $\sqrt{\det \tilde{G}}(\wedge dy^i)$-t látunk.

R^m-en értelmezett térfogati forma integrálja

V legyen nyílt részhalmaza R^m-nek. $\omega \in \Omega^m(V)$ egy olyan térfogati forma, hogy $supp(\omega)$ kompakt. ω kifejezhető egy függvény segítségével $\omega = h \cdot (\wedge du^i)$, ahol $h : V \to R$ sima függvény. Nem tudjuk, hogy V, K Jordan mérhető lenne, de vehetünk véges sok gömböt, melyek lezártja is V-ben van, és K-t lefedik, ezek uniója Jordan mérhető lesz, hiszen a határuk nullmértékű, ez lesz $\hat{K}$ (a másik konstrukció az lenne, hogy speciális V-t és ω-t választunk, de ez egyszerűbb).

<u>Definíció</u>: Az ω térfogati forma integrálján az $\int_{\hat{K}} h$ Riemann integrált értjük. Ezt $\int_V \omega$-nak jelöljük.

<u>Állítás</u>: $\int_W \phi^* \omega = \int_V \omega$, ha ϕ egy irányítástartó diffeomorfizmus V, W között, ez csak egy átfogalmazása az integráltranszformációs tételnek.

11.

Integrálás R^n-ben

$V \subset R^n$ nyílt részsokaság, az identitás mint globális térkép, és legyen ω egy térfogati forma V-ben, melynek K tartója kompakt. Mint a múltkor láttuk $\omega = h du^1 \wedge \cdots \wedge du^n$ alakban kifejezhető.

<u>Definíció</u>: $\int_V \omega = \int_{\hat{K}} h = \int_{\hat{K}} h(u_1, \ldots, u_n) du_1 \ldots du_n$ a forma integrálja.

A tartó nem feltétlenül Jordan mérhető, de lefedhetjük véges sok gömb uniójával egy olyan kompakt halmazzá, amely már Jordan mérhető (ez a $\hat{K}$).

<u>Állítás</u>: Legyen $\phi : W \to V$ az R^m-beli W nyílt halmaznak egy irányítástartó diffeomorf leképezése V-re. Ekkor $\int_V \omega = \int_W \phi^* \omega$.

<u>Bizonyítás</u>: A W, id globális térkép koordinátafüggvényei $z^1 \ldots, z^m$ legyen, $supp\, \omega$ kompakt, és az őse is kompakt W-ben. $T_a \phi : T_a W \to T_{\phi a} W$, az alapvektorok $\partial/\partial z^1(a), \ldots$, és

$\partial/\partial u^1(\phi(a))$. A bázistétel szerint $T_a\phi(\partial/\partial z^i(a)) = \sum_r T_a\phi(\partial/\partial z^i(a)(u^r)(\partial/\partial u^r(\phi(a)))$.

Az együtthatófüggvények pedig pont $T_a\phi(\partial/\partial z^i(a)(u^r) = \partial_i(u^r \circ \phi)(a)$, vagyis pont $J\phi(a)$ írja le az érintőleképezést. Vagyis $\phi^*(du^1 \wedge ... \wedge du^n)(a) = detJ\phi(a)(dz^1 \wedge ... \wedge dz^n)(a)$ a múlt órai számolások szerint. $\phi^*\omega = (h \circ \phi)\det J\phi(a)(dz^1 \wedge ... \wedge dz^n)$ a visszahúzott térfogati forma. Felírva mostmár a térfogati forma integráljának definícióját

$$\int_V \omega := \int_K h(u_1, \ldots, u_n)du_1...du_n =$$
$$\int_{\phi^{-1}K}(h \circ \phi)(z_1, ..., z_n) \cdot (\det J\phi)(z_1, ..., z_n)dz_1...dz_n =$$
$$=: \int_W \phi^*\omega$$

Pontosan ezt állítottuk ■.

💡 $M \xrightarrow{\mu} N \xrightarrow{\rho} P$ sima leképezések, vehetünk egy ω differenciálformát (vagy tenzormezőt), akkor $(\rho \circ \mu)^*\omega = \mu^*(\rho^*\omega)$

Mostantól csak irányított sokaságokat veszünk, irányított térképekkel.

Integrálás sokaságokon

Állítás: Az M sokaságon legyen adva egy kompakt tartójú $\omega \in \Omega^m(M)$ térofgati forma. Tegyük fel, hogy $supp\ \omega = K \subset U \cap V$, ahol U, ξ és V, η szokás szerint térképek. Ekkor fennál, hogy

$$\int_{\xi U}(\xi^{-1})^*\omega = \int_{\eta V}(\eta^{-1})^*\omega.$$

Bizonyítás: Az inverzeket inkább tildával jelöljük az egyszerűség kedvéért. Nézzük a $\xi \circ \tilde{\eta}$ leképezést, ez a térképtartományok metszeteinek képei között egy irányítástartó diffeomorfizmus, $\eta(U \cap V) \to \xi(U \cap V)$.

Az előző állítás szerint $\int_{\xi(U\cap V)} \tilde{\xi}^*\omega = \int_{\eta(U\cap V)}(\xi \circ \tilde{\eta})^*(\tilde{\xi}^*\omega)$ teljesül. Nyilván

$$(\xi \circ \tilde{\eta})^*(\tilde{\xi}^*\omega) = \tilde{\eta}^*(\xi^*(\tilde{\xi}^*\omega)) = \tilde{\eta}^*((\tilde{\xi} \circ \xi)^*\omega)) = \tilde{\eta}^*\omega.$$

■

Legyen $\omega \in \Omega^n(M)$ kompakt tartójú. Fedjük le $supp\ \omega$-t véges sok térképtartománnyal, ezeket nevezzük U_α, ξ_α-nak. $U_\alpha, M \setminus K$ nyílt halmazok egy véges fedését adják a sokaságnak. Vegyünk egy ehhez alárendelt egységosztást, $supp\ f_\alpha \subset U_\alpha$, és $supp\ \hat{f} \subset M \setminus K$, világos hogy f_α tartója kompakt. Mostmár vehetjük a $\sum_\alpha \int_{\xi_\alpha(U_\alpha)} \tilde{\xi}^*(f_\alpha\omega)$ értéket.

Állítás: A fenti érték nem függ a lefedő térképtartományok és az alárendelt egységosztás megválasztásától.

Bizonyítás: Vegyünk egy másik V_β, η_β véges fedést, és annak alárendelt h_β egységosztást. Az előző integrál

$$\sum_\alpha \int_{\xi_\alpha U_\alpha} \tilde{\xi}_\alpha^*(f_\alpha \omega) = \sum_\alpha \sum_\beta \int_{\xi_\alpha U_\alpha} \tilde{\xi}_\alpha^*(h_\beta f_\alpha \omega) = \sum_\alpha \sum_\beta \int_{\xi_\alpha U_\alpha \cap V_\beta} \tilde{\xi}_\alpha^*(h_\beta f_\alpha \omega) = \sum_\alpha \sum_\beta \int_{\eta_\alpha U_\alpha \cap V_\beta} \tilde{\eta}_\beta^*(h_\beta f_\alpha \omega)$$

Ahol az utolsó egyenlőségnél az előbbi állítást használtuk, hogy egy diffeomorfizmusra invariáns az integrál, konkrétan a két térképezés áttérési függvényére. Végül ez tovább egyenlő

$$= \sum_\beta \int_{\eta_\beta V_\beta} \tilde{\eta}_\beta^*(h_\beta \omega).$$

ami pedig pont a másik térképezéshez és egységosztáshoz rendelt integrálérték, ezzel készen vagyunk.

Definíció: Az imént belátott egyértelműen létező $\sum_\alpha \int_{\xi_\alpha U_\alpha} \tilde{\xi}_\alpha^*(f_\alpha \omega)$ értéket nevezzük az $\omega \in \Omega^n(M)$ térfogati forma integráljának.

Definíció: Legyen M kompakt Riemann sokaság, ennek térfogata $vol(M) = \int_M \tau$, ahol τ a metrikából meghatározott térfogati forma.

> Ez kb ugyanaz, mint a klasszikus felszínszámolás, csak bonyibb lol.

Külső differenciál

Legyen adva az M sokaság és azon egy $\omega \in \Omega^k(M)$, k-fokú differenciálforma.

Definíció: Az ω külső differenciálján azt a $d\omega : X(M)^{k+1} \to F(M)$ leképezést nevezzük, ahol tetszőleges $X_1, \ldots, X_{k+1}$ mezőkre fönnáll

$$d\omega(X_1, \ldots, X_{k+1}) := \sum_i (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \ldots, \bar{X}_i, \ldots, X_{k+1})) + \\ + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \bar{X}_i, \ldots, \bar{X}_j, \ldots, X_{k+1})$$

💡 Ha $\omega \in \Omega^1(M)$, akkor $d\omega(X_1, X_2) = X_1(\omega(X_2)) - X_2(\omega(X_1)) - \omega([X_1, X_2])$ például.

Állítás: Legyen $\omega \in \Omega^R(M)$ egy olyan differenciálforma amely előáll $\omega = f dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^R$ alakban valamely f, y^r függvényekkel. Ekkor $d\omega = df \wedge dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^R$. ld jegyzet 52-53. o.

Bizonyítás: $J = df \wedge ... \wedge dy^r(X_1, ..., X_{k+1})$ kiszámítható egy determinánssal a $df(X_i), dy^j(X_i)$ mátrixból. Az első sor alapján kifejtjük ezt a determinánst. Vegyük az $\underline{\mathrm{y}} = (y_i)$ oszlopvektort, amire a vektormezők hassanak koordinátánként, ezzel a számolás egyszerűsödik valamelyest. A kifejtésből

$$= \sum_i (-1)^{i+1} df(X_i) \det(X_1\underline{\mathrm{y}}, ..., \bar{X_i}\underline{\mathrm{y}}, ..., X_{k+1}\underline{\mathrm{y}})$$

adódik. Most a másik oldalt is számoljuk. $d(fdy^1 \wedge ... \wedge dy^R) =$

$$= \sum_i (-1)^{i+1} X_i(f \det(X_1\underline{\mathrm{y}}, \dots, \bar{X_i}\underline{\mathrm{y}}, ..., X_{k+1}\underline{\mathrm{y}}) +$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f(\det([X_i, X_j]\underline{\mathrm{y}}, ..., \bar{X_i}y, ..., \bar{X_j}y, ..., X_{k+1}\underline{\mathrm{y}}))$$

definíció szerint. A második tag összegre bomlik a zárójel miatt, az első tagban pedig a szorzat deriválási szabályát alkalmazva látjuk, hogy pont kiesnek a másodrendű tagok.

$$\sum_i (-1)^{i+1} df(X_i) A_i + \sum_i (-1)^{i+1} f X(A_i) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f \det(X_i X_j - X_j X_i, ...)$$

és minden másodrendű tag kiesik.

12.

Külső differenciál

$\omega \in \Omega^k(M)$-hez rendel egy $d\omega$ $k+1$ fokú differenciálformát a múlt órán tárgyalt formulával (biz most).

Állítás: Ha $\omega = fdy^1 \wedge ... \wedge dy^k$, akkor $d\omega = fd \wedge ... \wedge dy^k$.

> Ez volt múlt héten.

Állítás: Tetszőleges $\omega \in \Omega^k(M)$ esetén $d\omega$ egy $k+1$ fokú differenciálforma.

> Veszünk egy V, η térképezést, $y^i = u^i \circ \eta$, és $\tilde{\omega} = \omega|_V$, ez álljon elő $\sum_{i_1 < ... < i_k} f_{i_1,..,i_k} dy^{i_1} \wedge ... \wedge dy^{y_k}$, és az előző állítás szerint $d\tilde{\omega} = \sum df_{...} \wedge ... \wedge dy^{i_k}$, kapunk egy k+1 formát a V környezeten. Továbbá $d\omega|_V = d\tilde{\omega}$, ezért készen vagyunk.

Állítás: Ha $\omega \in \Omega^k, \eta \in \Omega^l$, akkor $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k(\omega \wedge d\eta)$

> Ismét lokálisan számolunk. V, η térképezés, felírjuk a térképen a leszűkítéseket koordinátás alakban a természetes bázissal $f_{\dots}$ és $h_{\dots}$ koordinátafüggvényekkel. Az ékszorzatban a koordinátafüggvények összeszorzódnak, illetve $d(fh) = hdf + fdh$, és k darab cseréjét kell végezni a báziselemekben hogy e a második tagot a megfelelő alakra hozhassuk, innen az előjel, megintcsak a báziselemek differenciáljára vonatkozó állítást alkalmazva.

Lemma: tetszőleges $f \in F(M)$ függvényre $d(df) = 0$

> $X, Y \in X(M)$ vektormezők. $d(df)(X,Y) = X(df(Y)) - Y(df(X)) - df([X,Y])$ a definíció szerint. $X(Yf) - Y(Xf) - [X,Y]f = 0$.

Állítás: Tetszőleges $\omega \in \Omega^k(M)$ esetén $d(d\omega) = 0$.

> Megint lokalizálunk, stb, ebből $d\tilde{\omega} = \sum df \ldots \wedge \ldots \wedge dy^{i_k}$. Az előző állítások alapján ennek a kifejezésnek a differenciálja nulla lesz, hiszen ha kibontjuk összeggé mindegyik tagban lesz egy "dd"-s tag, ami nulla, így az egész összeg nulla, tagonként.
>
> ---
>
> Máshogy, $d\tilde{\omega} = \sum 1 \cdot f \wedge \ldots \wedge dy^{i_k}$, és erre $dd\tilde{\omega} = \sum d1 \wedge df \wedge \ldots \wedge dy^{i_k}$, de a konstant egy függvény deriváltja nulla, így az egész kifejezés is az.

Definíció: $\omega \in \Omega^k(M)$ differenciálforma *egzakt*, ha van olyan egyel kisebb fokú η differenciálforma, hogyha $d\eta = \omega$. Ha $d\omega = 0$ akkor pedig *zárt*nak nevezzük.

Integrálás kompakt reguláris tartományon

Definíció: Az M sokaságnak legyen D egy részhalmaza, ahol ∂D jelöli D határpontjainak halmazát. D-t reguláris tartománynak mondjuk, ha tetszőleges $p \in \partial D$ pontban M-nek létezikU, ξ térképe hogy $x^m(p) = 0$, és a $\xi|_{U \cap D} : U \cap D \to R^m$ leszűkítés egy homeomorfizmust ad a metszet, és $R^m_+ \cap \xi(U)$-vel, tehát a felső zárt féltér és a térképezés képe között.

> 💡 Ergo D egy 0 kodimenziós peremes részsokaság.

Megfelelő térképezések választásával elérhetjük, hogy a perem egy térképezésnél pont a koordinátasíkba kerüljön, majd a vetítéssel kaphatunk egy tékrépezését a peremnek.

Állítás: Ha M irányítható, akkor a D peremes részsokaság pereme is irányítható.

> Vegyünk két térképet a perem egy pontja körül, amik megszorításként jöttek létre és a belső rész irányításával kompatibilisek. Az áttérési leképezések Jacobi mátrixai persze irányítástartóak feltevés szerint, meg kellene érteni hogy a projekció után mi történik. Az utolsó sorban a parciális deriváltak az utolsó (átlóba tartozó) kivételével mind nulla, hiszen a perem képződik az $x^m = 0$ hipersíkba. Az átlóhoz tartozó elem pozitív, ezért a felső $m - 1 \times m - 1$-es minor determinánsa is pozitív, így a peremre megszorított áttérés is irányítástartó.

Definíció: Az U, ξ peremhez illő térképen a D reguláris tartomány $U \cap \partial D, \hat{\xi}$ koordinátafüggvényei $\hat{x}^i = z^i \circ \hat{\xi}$. A ∂D perem irányítását az $U \cap \partial D$ metszet pontjaiban meghatározza $(-1)^m dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^{m-1}$ differenciálforma.

M irányított sokaság, D kompakt peremes részsokaság. Legyen $\omega \in \Omega^m(M)$ adott térfogati forma. U_α, ξ_α irányítással kompatibilis térképek, amelyek fedik D-t, ezt kiegészítve $M \setminus D$-vel egy nyílt fedésévé M-nek feszünk egy alárendelt egységosztást úgy, hogy az U_α-hoz tartozó f_α tartója kompakt.

Az integrált teljesen hasonlóan lehet definiálni ezek után, visszahúzzuk a térképezés inverzével $f_\alpha\omega$-t, ezzel R^m-en értelmezett kompakt tartójú térfogati formát, amit kiintegrálunk utána.

13.

R^m-beli térfogati forma integrálja egy résztartományon

V nyílt R^m-ben, $\omega \in \Omega^m(V)$, a K tartója kompakt.

$\omega = hdu^1 \wedge \dots \wedge du^m$, $h \in F(V)$. $\tilde{V} \subset V$ zárt legyen.

Definíció: Az ω integrálján a $\tilde{V}$ résztartományon a $\tilde{V} \cap K$-n vett Riemann integrált értjük

$$\int_{\tilde{V}} \omega = \int_{\tilde{V} \cap K} h(\underline{u}) d\underline{u}$$

Állítás: Legyen M irányított sokaság, $\omega \in \Omega^m(M)$ kompakt tartójú térfogati forma, és D egy reguláris tartomány. U, ξ és V, η kompatibilis térképek, melyekre $K \subset U \cap V$, ahol $K = supp\,\omega$. Ekkor $\int_{\xi(U\cap V)} \tilde{\xi}^* \omega = \int_{\eta(U \cap V)} \tilde{\eta}^* \omega$ teljesül.

Térfogati forma integrálja egy kompakt reguláris tartományon

ω térfogati forma, D kompakt. Lefedjük véges sok térképtartománnyal. Veszünk egy ehez alárendelt f_α egységosztást. Ekkor $p \in D$-re persze $\omega(p) = \sum_\alpha f_\alpha \omega(p)$.

Definíció: Az ω térfogati forma M-en. Az integrálján a D kompakt tartományon az

$$\int_D \omega = \sum_\alpha \int_{\xi_\alpha(U_\alpha \cap D)} \tilde{\xi}_\alpha^* (f_\alpha \omega)$$

formulával definiált számot értjük.

💡 Ez az integrál nem függ a térkép és az egységosztás választásától. Ezért kedvünk szerint választhatjuk hogy milyen térképekkel fedjük le D-t. Például a pereméhez illő, illetve a peremtől diszjunkt térképeket választhatunk (∂D egy $m-1$ dimenziós irányítható részskoaság).

Az irányítást úgy választjuk, hogy $\xi_\alpha(U_\alpha \cap D)$ a zárt felső féltérbe képződjön. A $\pi : R^m \to R^{m-1}$ természetes projekciónál $\pi \circ \xi_\alpha$ egy térképezése lesz a peremnek, nevezzük ezt ζ_α-nak.

$\hat{U}_\alpha = \partial D \cap U_\alpha, \zeta_\alpha$ térképezés a peremhez. ∂D-n van egy kitüntetett irányítás, melyet az M irányítása határoz meg a $(-1)^m dz_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dz_\alpha^{m-1}$ formula szerint. Az első bázisvektor "kifelé" mutat D-ből, a többi pedig a perem érintőtere.

<u>Stokes-Tétel</u>: Legyen D reguláris kompakt tartomány M-ben, $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$, $\iota : \partial D \to M$ természetes injekciója a peremnek M-be. Ekkor

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \iota^* \omega$$

teljesül.

Speciális térképtartományok alkalmazásával történik a bizonyítás. U_α, ξ_α peremhez illeszkedő kompatibilis térképek. Még véges sok további térkép V_β, η_β, melyek lefedik $int\ D$ esetleg kimaradó részeit, hogy együtt lefedjék D-t. $\int_D d\omega$ egy megfelelő alárendelt egységosztással f_α, h_β, melyek tartója kompakt. Az integrál

$$\sum_\alpha \int_{\xi_\alpha(U_\alpha \cap D)} \tilde{\xi}^*(f_\alpha d\omega) + \sum_\beta \int_{\eta_\beta(V_\beta)} \tilde{\eta}^*(h_\beta d\omega)$$

alakban áll elő. $\hat{U}_\alpha, \zeta_\alpha$ véges sok térkép a peremhez, $\hat{f}_\alpha := f_\alpha \circ \iota$ függvények egy alárendelt egységosztást adnak a peremen.

$$\int_{\partial D} \iota^* \omega = (-1)^m \sum_\alpha \int_{\zeta_\alpha \hat{U}_\alpha} \tilde{\zeta}_\alpha^*(\hat{f}_\alpha \iota^* \omega)$$

R^m-beli eset

Legyen V nyílt részhalmaz R^m-ben, ω egy $m-1$ fokú kompakt tartójú differenciálforma. $V \cap \mathbb{H}^m$ legyen reguláris tartomány V-ben. Ezen tartomány peremének természetes beágyazását jelöljük el ρ-val.

$\rho^*\omega$ térfogati forma a peremen.

<u>Állítás</u>: $\int_{V \cap \mathbb{H}^m} d\omega = \int_{\partial(V \cap \mathbb{H}^m)} \rho^* \omega$

ω előáll $\sum_i h_i du^1 \wedge ... \wedge du^m$, ahol az $i.$ tagból du^i-t kihagytuk, valamely $h_i \in F(V)$ függvényekkel. A differenciálformákra vonatkozó számolásokból látjuk hogy $d\omega = \sum_i dh_i \wedge ... \wedge du^m$, ahol megintcsak az $i.$ tag kimarad. Továbbá $dh_i = \sum_r \partial_r h_i du^r$, eszerint mivel függvény differenciáljának önmagával vett ékszorzata nulla $d\omega = \sum_i (-1)^{i-1} \partial_i h_i du^1 \wedge ... \wedge du^m$, ez már egy térfogati forma, minden du^i szerepel a szorzatban. $V \cap \mathbb{H}^m \cap supp\ \omega$ kompakt, befoglalhatjuk egy kompakt téglába, ezáltal kiterjesztve $d\omega$-t. Most definíció szerint kiszámítjuk az integrált. $T = [t_1^1, t_2^2] \times ... \times [0, t_m^2]$ legyen ez a tégla.

$$\int_{V \cap \mathbb{H}^m} d\omega = \int_T \sum (-1)^{i-1} \partial_i h_i(u_1, ..., u_m) du_1 ... du_m$$

alakú az integrál definíció szerint. Ha $j \leq m-1$, akkor a téglán vett Riemann integrál nulla a szukcesszív integrálás módszeréből könnyen látható módon. A fennmaradó lapokon az integrál $\int_{t_1^1}^{t_2^1} \ldots \int_{t_1^{m-1}}^{t_2^{m-1}} (-1)^m h_m(u_1, .., u_{m-1}, 0) du_1 \ldots du_{m-1}$. $z^i = u^i \circ \rho : \partial V \cap \mathbb{H}^m \to R^{m-1}$ koordinátafüggvények a peremhez. Itt $\rho^*(du^j) = d(u^j \circ \rho) = dz^j$ ha $j < m$, ha pedig pont m, akkor $\rho^*(du^m) = 0$, hiszen a kompozíciójuk konstans. Ezek szerint $\rho^* \omega = (h_m \circ \rho) dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^{m-1}$, ezt definíció szerint átírva pont ugyanazt az integrált látjuk, kivéve hogy a $z^1 \wedge \ldots$ ékszorzat nem biztos hogy a megfelelő irányítást reprezentálja, ezért még módosítunk egy $(-1)^m$-el.