1.

Rezolúció

Sok különböző változatok, múlt szemeszterben láttunk már egyet, de máskor még az egzisztencia sem világos.

$X \subset \mathbb{P}^n$ vagy esetleg $\mathbb{C}^n$

1. $X \subset CP^n$ projektív algebrai
2. $X \subset C^n$ affin algebrai
3. $(X, o) \subset (C^n, o)$ algebrai vagy holomorf csira

Tétel: létezik $\hat{X}$ sima (proj/qproj/...) algebrai/holomorf és $\hat{X} \xrightarrow{\phi} X$ proper holomorf és

$$\phi^{-1}(X \setminus SingX) \xrightarrow{\phi|_{\dots}} X \setminus SingX$$

izomorfizmus!

$\mathbb{C}^n$ eset, és a csira eset

$X = \{f_1 = \dots = f_k = 0\}$ polinomokkal, mi $SingX$?

A Jf Jacobi mátrixot tekintjük, az f érintőleképezését. létezik egy x ahol a rang maximális, azon pontok halmazát, ahol a rang maximális sima pontoknak nevezzük, ha kisebb, akor szingulárisnak. $\dim X = n - r_{max}$

Megjegyzés: $codimX = n - \dim X = r_{max} \leq k$, ha a kodimenzió pontosan k, azt mondjuk hogy X *teljes metszet*.

Példa

$$\mathbb{C}^4 =< x_1, \dots, x_4 >, \ X = \{x : rk(x_1, x_2, x_3; x_2, x_3, x_4) \leq 1\} =$$
$$= \{x_1x_3 - x_2^2 = x_1x_4 - x_2x_3 =_2 x_4 - x_3^2 = 0\}$$

$x_1x_3 = x_2^2, x_2x_4 = x_3^2$ és ebből $x_1x_2x_4 = x_1x_3^2 = x_3x_2^2$, ergo $x_2(x_1x_4 - x_2x_3) = 0$, ez majdnem a harmadik definiáló egyenlet. A másik esetben ha $x_2 = 0$ akkor x_3 is nulla. Tehát a harmadik egyenletet eldobva X-et, és egy síkot kapunk.

> Algebrai geometriailag a harmadik egyenlet nullosztó lesz a másik kettővel vett faktorában a polinomgyűrűnek.

A Jakobi mátrix jó randa lesz:

x_3	-x_2	x_1	0
x_4	-x_3	-x_2	x_1
0	-x_4	2x_3	-x_2

Az első aldetermináns $-2x_3^3 - x_4^2x_1 + 3x_2x_3x_4 = 2x_3(x_2x_4 - x_3^2) + x_4(x_2x_3 - x_1x_4) = 0$ X-en automatikusan!, sőt minden 3x3 aldetermináns nulla lesz, ergo $r_{max} < 3$.

2x2?

x_4	-x_3
0	-x_4

Az egyik aldetermináns, x_4^2 nem automatikusan nulla X-en! Állítsuk $x_4 = 1$-et, és ki tudjuk fejezni és megoldani a definiáló egyenleteket, vagyis $r_{max} = 2$, a dimenzió 2, és a kodimenzió is.

$SingX = ?$ kellene hogy az összes 2x2 minor nulla, ezekből rengeteg van ☹. Például $x_1 = x_4 = 0$ kell teljesüljön a ba alsó és jobb felső minorokból. Most a definiáló egyenletekből következik hogy $x_3 = x_2 = 0$, tehát csak egy szinguláris pont van.

(Veronese leképezés) $P^1 \hookrightarrow P^3$ beágyazás. $v: \; [s:t] \mapsto [s^3 : s^2t : st^2 : t^3]$ a harmadfokú homogén monomokkal. Milyen egyenlet írja le ezt a parametrizálást?

- [ ] HF: hogy ez pont az előző számolás projektivizálása.

Vegyük észre hogy harmadik egységgyökkel forgatva ugyanazt a képet kapjuk v-nél. Z_3 szabadon hat $C^2 \setminus (0,0)$-n, ebből tehát $X = C^2/Z_3$ faktortér, $C^2 \setminus (0,0) \to X \setminus (0,0,0,0)$ reguláris Galois fedés.

$C^2 \xrightarrow{Z_3} X$ elágazó fedés, origón kívül reguláris. Origó körüli gombbel elmetszve egy 3-sokaságot kapunk, így van egy $S^3 \to X \cap S^7$ fedést, ez az $L(3,1)$ lencsetér!

$(s,t) \sim (s\xi, t\xi)$.

Kérdés, létezik-e $\mathbb{C}^2 \to X$ rezolúció? **Nem lehet**, mert $\pi_1(X \setminus 0) = Z_3$ viszont $\pi_1(C \setminus 0) = 0$. Naiv módon nincs, máshogy kell nekiállni.

Rezolúció szerkesztése ebben az esetben:

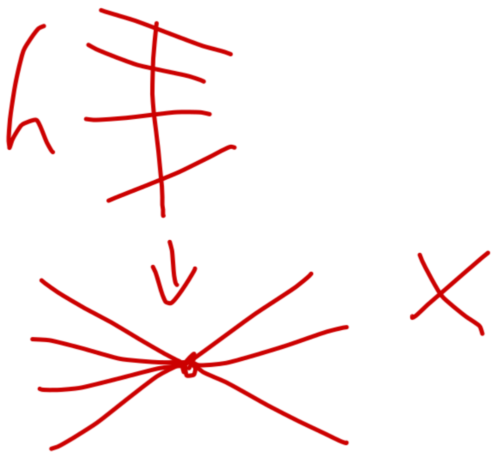
Emlékeztető a P^1 feletti vonalnyalábokra. $P^1 = C_x \sqcup C_y / \{x = 1/y\}$.

$C_x \times C_u$ egy térkép, $C_y \times C_v$ a másik, a ragasztást végezzük el $u = y^3 v$ szerint, ez ugye u, v-ben lineáris, konkrétan az $O(-3)$ vonalnyaláb, hívjuk $\mathcal{L}$-nek.

> 💡 Hogy határozzuk meg az Euler számot? Adunk egy szelést, az x-es térképen legyen s(x)=1, u=1. Ezt a másik térképre lefordítva s(y)=y^{-3}, nullhelye nincs, egy harmadfokú pólusa van, így az Euler szám -3, összeadva a gyököket és pólusokat.

Állítjuk, hogy ez a rezolúció $\mathcal{L} \xrightarrow{\phi} X$. Megadjuk a leképezést a két térképen külön külön X-be úgy, hogy kompatibilisak maradjanak. Az (x,u) térképen $(x,u) \mapsto (u, ux, ux^2, ux^3)$, ennek a képe világos hogy X-be képez. A másik térképen a ragasztóleképezést használjuk $(y,v) \mapsto (vy^3, vy^2, vy, v)$, könnyen láthatóan ez a két leképezés tényleg átmegy a faktoráláson ($u = y^3 v, ux = vy^2$, stb).

- [ ] HF: hogy ez szürjektív.



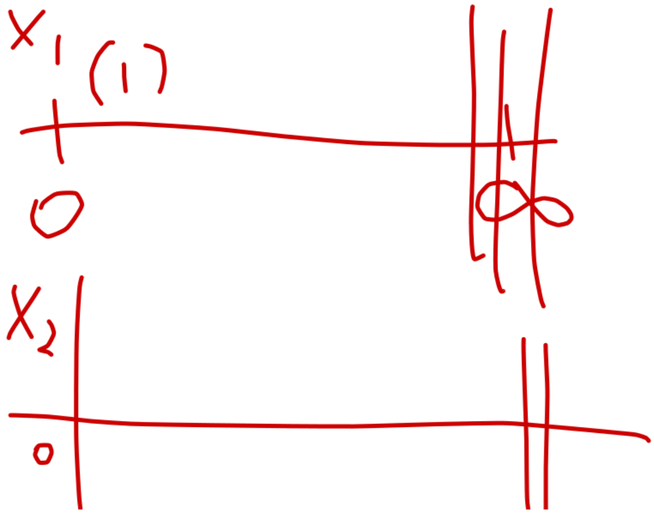
Az origó őse a nyaláb nullszelése lesz,

- [ ] HF $\mathcal{L} \setminus P^1 \to X \setminus 0$ izomorfizmus.

Itt is forog a csigalépcső, csak hármat mire végigér, a közepe roppan össze a rezolúcióval.

*Kivételes halmaz*nak nevezzük azokat a helyeket $A \subset \tilde{X}$, ahol $\dim \phi(A) < \dim A$ (ekvivalensen, ahol esik a rang megintcsak). Esetünkben egy kivételes görbét látunk a nyalábban, egy P^1-et.

Megjegyzés: Az x_1 függvényt $\mathcal{L}$-re visszahúzva az első térképen egyszeres nullhelye van, és a másikon háromszoros pólusa (x_1-et visszahúzva az egyik térképen u-t látunk, egyszeresen eltűnik a divizoron, a másikon pedig háromszoros pólusa van még).

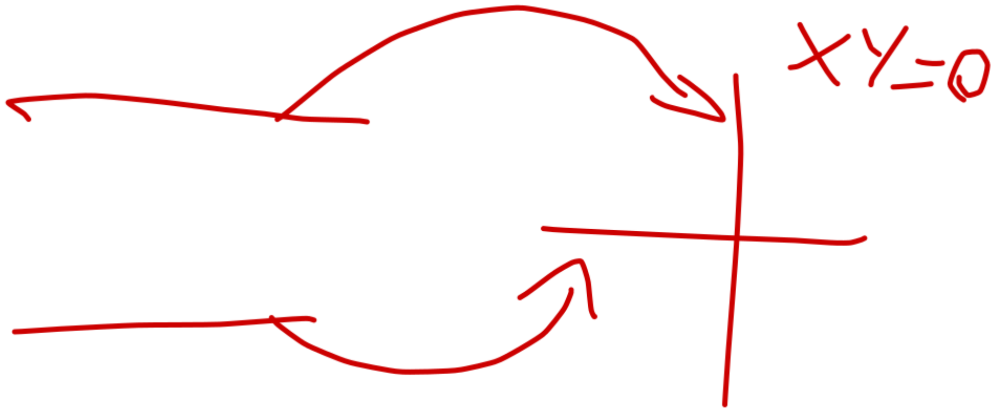


- [ ] HF: $X_{n,1}$ ami a $rk(x_1 \dots x_n; x_2 \dots x_{n+1}) \leq 1$ egyenlet definiál 2dim felület és $O(-n)$ lesz egy rezolúciója. Pl. n=2-re $x_1 x_3 = x_2^2$

Megjegyzés: Ha X-et egy egyenlet vágja ki, akkor $\dim X = n - 1$, és a szinguláris pontok éppen azon pontokból állnak ahol minden parciális derivált eltűnik.

Példa: cusp, paraméterezés bijektív, origón kívül reguláris, ez egy rezolúció.

Példa: xy=0, a rezolúció két egyenes uniója, egyik fedi az egyiket, másik a másikat.



2.

Előző óra 1.

1. Felfújásnál mit is akarunk szétszedni? Mik az obstrukciók amiket ki akarunk kerülni? Mit akarunk gazdagítani?
2. Mi a technka? Hogyan fújunk fel?
3. Hogyan értelmezem amit kapok felfújás után?

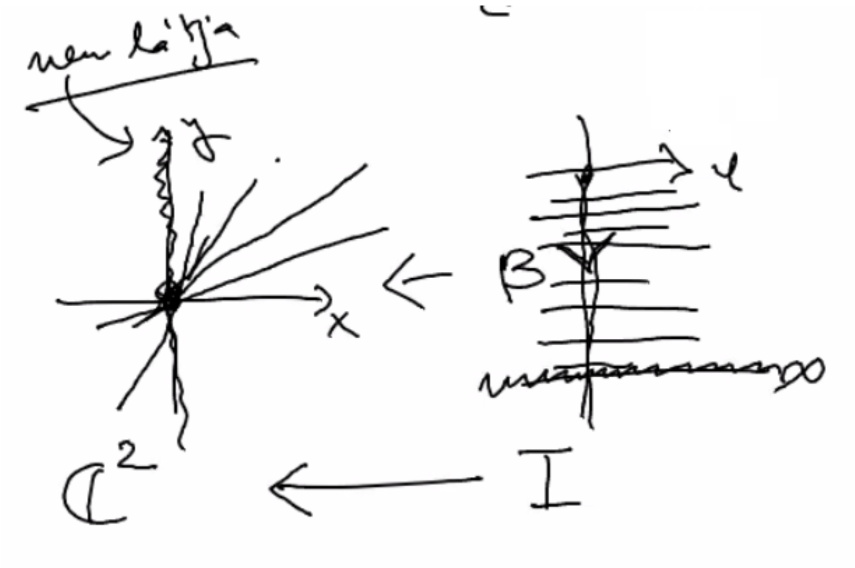
$0 \in \mathbb{C}^2$ felfújása. Szét akarjuk szedni az egyeneseket amikt az origóba befutnak.

$\{L \subset C^2 | 0 \in L\} = P^1$ a projektív egyenes. Incidenciasokaság $C^2 \times P^1$ része I, a tautologikus vonalnyaláb. Két természetes projekció, minket az első koordinátára vett érdekel. Ez mindenütt szürjektív, hiszen minden ponton van őt az origóval összekötő egyenes. Egy nem null a pont ősképe egy pontól áll, hiszen egyértelmű egyenes van ami rajta és az origón átmegy. Azonban a nulla őse kiad egy teljes projektív teret. Ergo $I \setminus P^1 \xrightarrow{\cong} C^2 \setminus 0$ izomorfizmus. Van az $E = p^{-1}(0)$ kivételes görbe, hogyan van ez beágyazva I-be?

Tekintsük a másik vetítést. Ez egy vonalnyaláb a CP^1 felett, minden (projektív) pont őse az őt reprezentáló egyenes C^2-ben.

A tautologikus vonalnyaláb Euler osztálya -1, a vonalnyalábok tenzorszorzásra egy csoportot alkotnak, ez az osztály ad egy izomorfizmusát ennek a csopotnak Z-vel.

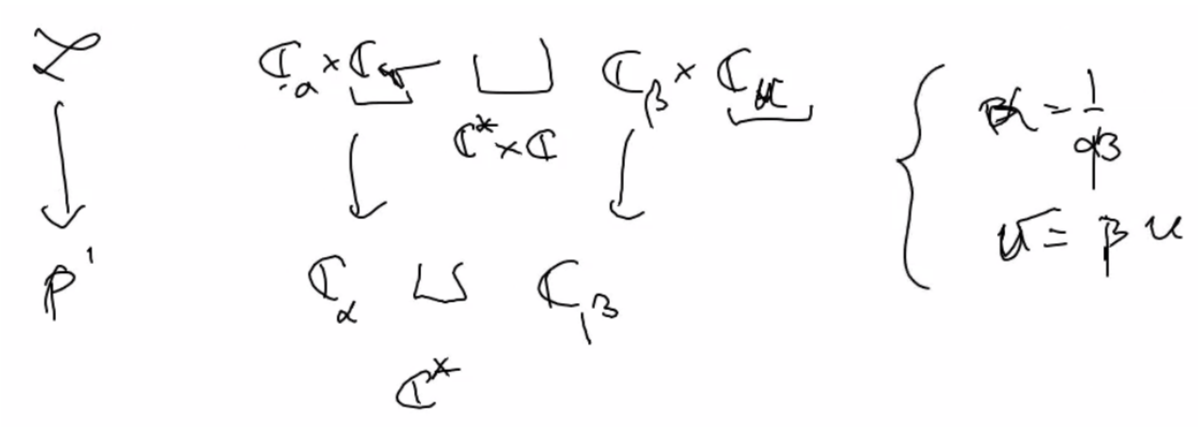
$P^1 = C_\alpha \cup C_\beta$, az egyiken $[1 : \beta]$, a másikon $[\alpha : 1]$ a térképezés, a reciprok mentén ragasztva mint mindig. $(x, y), [\alpha : \beta]$ pár egy pontot határoz meg az incidenciasokaságon pontosan akkor, ha $x\beta = y\alpha$ hiszen a pontnak rajta kell lennie az egyenesen. Az első térképen ez $x\beta = y$-ként esik össze. Ezen a térképen az $x = 0$ egyenesből csak egy pontot látunk, minden mást teljesen.



Az incidenciasokaság, és az egyik térképezése az $x = u; y = \beta u$ térképekkel.

A másik érképen persze szimmetrikusan történik mindez. (y, α) a szabad paramétereink, $x = y\alpha$ adja meg a pont másik koordinátáját. $x = v\alpha; y = v$ a koordinátázása ennek a térképnek.

Hogy térünk át egyik térképről a másikra? $\alpha = 1/\beta$, és $v = \beta u$ ha $(\beta, v) \in C^* \times C$.



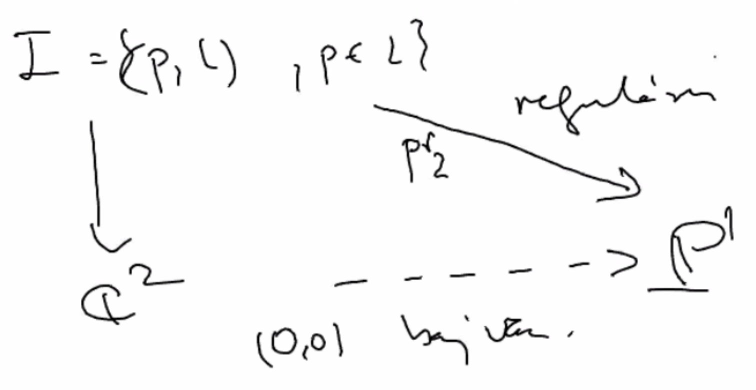
A ragasztások sematikus diagramja.

Az Eulerosztályt egy szeléssel számítjuk ki, mint minden vektornyalábban mindig van a nullszelésünk, kellene egy másik, ami csak véges sok pontban metszi/van pólusa.

- [ ] HF a triviális nyaláb osztályának kiszámítása.

Az első térképen vehetjük a $v = 1$ függvényt szelésnek, hogy ragad ez a másik térképre. $\alpha \mapsto (\alpha, 1)$, a másik térképen $u = 1/\beta$-nak kell lennie. Nullhelye nincs, egy pólusa van, ergo a szám -1. Másik szelés a $v = \alpha$, ez az első térképen ad egy $+1$ kontribúciót az Euler számhoz. A másik térképen $u = v/\beta = \alpha/\beta = 1/\beta^2$, ez egy 2 rendű pólus, ergo megintcsak $1 - 2 = -1$ az Euler szám.

Más értelmezés ugyanazon feladatnak. C^2-en vannak racionális függvényeink, pl. x/y, ez az x-tengelyen nem értelmes persze. $C^2 \dashrightarrow P^1$ függvényként is értelmezhetjük, ergo $(x, y) \mapsto [x : y]$, hol nem értelmes ez? Csak az origóban nincs. Felfújás után viszont már mindenhol értelmessé tehetjük, áthúzhatjuk a projekción C^2-re.



Üzenet, ha van egy, nem az egész C^2-n értelmezett függvényünk mondjuk P^1-be, akkor esetleg sokszor felfújva kiterjeszthetjük reguláris függvénnyé!

> 💡 Szórakozás: $(x, y) \mapsto [x^2 : y^3]$ függvényt fújjuk fel, hogy reguláris legyen valamely T felületről P^1-be. $\alpha x^2 = \beta y^3$ görbék mentén a leképezés konstans, de különböző helyekre ér be, ezeket kell szétszedni.

Példák pont felfújására: Egy, vagy akár minden pontot kicserélek az érintőterére.

C^n origóban vett felfújása. $P^{n-1} = \{L \subset C^n | 0 \in L\}$ mint az előbb, és $C^n \times P^{n-1}$-ben az incidenciasokaság $I = \{(p, L) | p \in L\}$. A C^n-re vett projekciónál az ős vagy egy pont, vagy a teljes projektív tér (az origó felett). A projektív térre vett projekció pedig megintcsak egy vonalnyaláb, ez a P^{n-1} feletti -1 osztályú vonalnyaláb (a tautologikus vonalnyaláb), hasonló számolással, csak több térképpel.

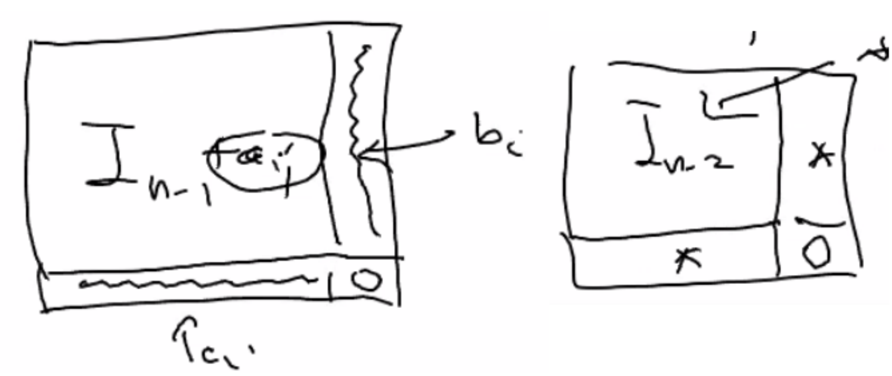
C^4-ben vesszük az $\{xy = zt\} = X$ sokaságot. Ez egy homogén halmaz a definiáló egyenlet szerint. A nullában felfújva visszahúzhatjuk az X-et, a vetítést megszoríthatjuk, ezzel magát az X-et gazdagítottuk. Az origóban a sok szétválasztott irány összeroppan.

- [ ] HF: Lássuk be, hogy a megszorítás $\tilde{X} \to \tilde{X} \cap P^3$ is nyaláb, $\tilde{X}$ sima, és micsoda $\tilde{X} \cap P^3 = P^1 \times P^1$

P^{n-1} tautologikus hipersíknyalábja: $T \to P^{n-1}$, a fibrum pedig C^{n-1}. $\{H \subset C^n \,|\, \dim H = n-1 \text{ lin}; 0 \in H\} = P^{n-1}$ megintcsak a normálirányokat tekintve. $C^n \times P^{n-1} \supset I = \{(v, H) | v \in H\}$, a vetítés a második koordinátára egy $n-1$ dimenziós C-nyaláb P^{n-1} felett.

Példa: $M_n \sim End(C^n) \sim C^{n^2}$ a mátrixgyűrű. Legyen $X = \{M | \det M = 0\}$ egy homogén tér egy egyenlettel megadva. $singX = ?$ $n = 2$-ben pont az $xy = zt$ egyenlet vágja ki. Általában? $singX = \{M | rangM \leq n-2\}$ fog teljesülni. Parciálisan kell deriválnunk minden koordinátafüggvényt. $singX = \{\det M = \partial \det / \partial a_{ij} = 0\}$. Fejtsük ki mondjuk az első sor szerint, ebből azonnal kapjuk, hogy $\partial \det / \partial a_{11} = \det M_{11}$, ahol a jobb oldalon az alsó $n-1 \times n-1$-es aldetermináns értéke áll a kifejtési tétel szerint, és pont ezt álítottuk.

$\dim X = n^2 - 1$, mennyi $\dim singX = ?$ A jobb felső részmátrix egy kis környezetét hozzávehetjük, a megfelelő sor és oszlop is tetszőleges lehet, a bal alsó elem kénytelen 0 lenni, hogy a rang ne legyen n, ez $(n-1)^2 + 2(n-1) = n^2 - 1$ dimenzió valóban. A szinguláris helyeken egy $n-2 \times n-2$-es almátrix környezetét vehetjük hasonlóan, és két sor+oszlopnyi helyünk van még, a bal alsó 2*2-es részmátrixba nullát kell tenni, hogy a rang ne ugorjon. Ez $(n-2)^2 + 2 * 2 * (n-2) = n^2 - 4$ dimenzió, ha a rang csak egyet esik. Általában vannak kisebb dimenziós sztátumok is (ahol a rang nem kettőt, hanem hármat, stb esik).



Az X, és a $singX$ dimenzióját megadó mátrixalakok.

A rang pontosan azt jelenti, hogy mint lineáris leképezés $\dim ImM \leq n-1$, a mátrixtérre megint mint endomorfizmusokra gondolunk. Tekintsük a "duális" projektív terét a hiperfelületeknek. $I = \{(M,H)|rkM \leq n-1; ImM \subset H\}$ lesz az incidenciasokaságunk, és ezt projektáljuk vissza az X-be. Ha $M \in X \setminus singX$, akkor felette csak egy pont lesz, hiszen a képe pont maximális rangú (már abból amit megengedtünk), ergo $\pi^{-1}(X \setminus singX) \to X \setminus singX$ izomorfizmus. Ha $M \in singX$ generikus, akkor $rkM = n-2$, és $\pi^{-1}(M) = P^1$ lesz, egy egyparaméteres családja lesz hipersíkoknak amik tartalmazzák a képterét, s így tovább magasabb dimenziókban.

Innen áthúzva sima már a $\det$? Úgy nézünk az incidenciasokaságra, hogy $M = \phi : C^n \to H$ alakú lineáris leképezésekből áll, a leképezést elég koordinátánként megadni $\oplus\phi : C < e_i > \to H$, és ez pont a teutologikus hipersíknyaláb.

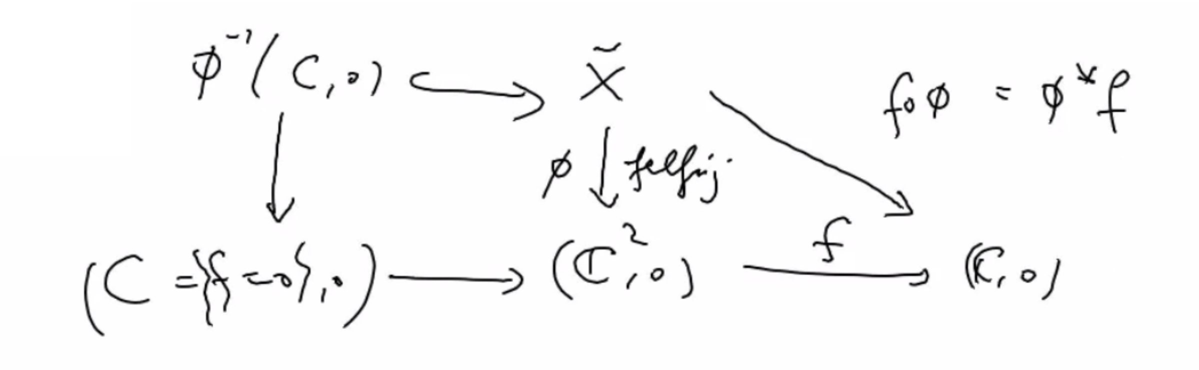
3.

Síkgörbe szingularitások, feloldás, rezolúciós gráf

$(C,o) \subset (C^2,0)$ analitikus/algebrai csira, egy függvénnyel megadva $\{f=0\}$, ahol f egy lokális algebrai/analitikus csira. $O_{C^2,o}$ UFD, felírhatjuk $\prod f_i^{\alpha_i}$ alakban, ahol a tagok irreducibilisek.

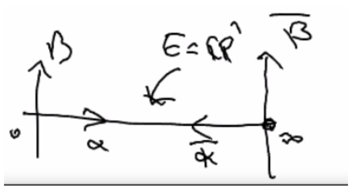
$Sing(C,o) = \{\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0\} \subset (C,o)$ a szinguláris hely. Ha létezik $\alpha_i \geq 2$, akkor $f_i = 0$ szinguláris. Ha minden $\alpha_i = 1$ azt mondjuk, hogy a görbe redukált, és ha része a maximális ideálnak akkor csak az origó szinguláris. Ha nem része a maximális ideálnak a lokális gyűrűben, akkor nincs szinguláris helye, ez ekvivalens azzal, hogy f lokálisan egy vetítés.

Célunk: Felfújni C^2, o-t, hogy sima függvényént tudjuk áthúzni a görbénket.

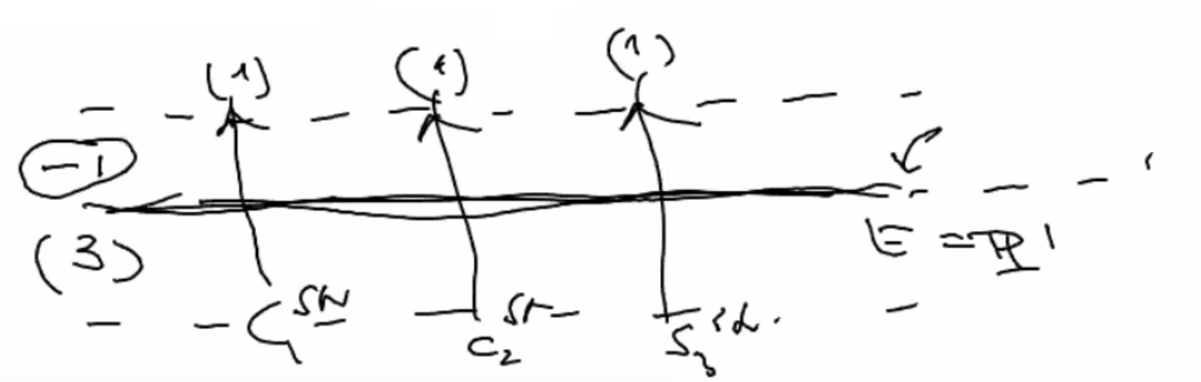


Ahol $\tilde{X}$ sima. Ezt a visszahúzottat hívjuk C totál transzformjának. Az origó őse $E_1 \cup \cdots \cup E_v$ a kivételes divizorok, ezek mind projektív egyenesek a visszahúzás miatt. $cl(\phi^{-1}(C_i \setminus 0))$ lesz a C_i komponens strict transformja. Addig csináljuk ezt, amíg C^{tot} normal crossing divisor nem lesz, vagyis $\forall p \in \tilde{X}$ létezik (u, v) lokális koordináta p körül, hogy $\phi|_V = u^a v^b$ alakú.

Ehhez: felfújás, metszetindex, multiplicitási rendszer, kompatibilitások. Geometriai értelmezések: algebrai csomók, Milnor fibrum, monodrómia...

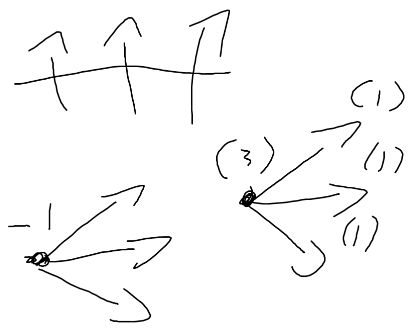


Példa: $f(x, y) = xy(x + y)$, három egyenes, három komponens, $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 0$. $x = \alpha\beta$, $y = \beta$ egy térkép a felfújás után. $\beta = 0$ a kivételes divizor, ez nem látja az $y = 0$ tengelyt. Visszahúzzuk f-et, $\phi^* f = \beta^3 \alpha(\alpha + 1)$, a kivételes divizor hármas multiplicitással jelenik meg, $\alpha = C_1^{str.}$, $(\alpha + 1) = C_3^{str.}$ a két komponens transzformáltja (a harmadikat nem látja a térképünk). A másik térképen $x = \bar{\beta}$, $y = \bar{\alpha}\bar{\beta}$, és a visszahúzott $\bar{\beta}^3 \bar{\alpha}(\bar{\alpha} + 1)$. A két térkép $1/\alpha = \bar{\alpha}$ szerint ragad össze. Ismét megkapjuk a kivételes divizort háromszoros multiplicitással, továbbá $C_2^{str.}$, és $C_3^{str.}$ a két másik tagból.



Egyszerű koordinátacserével látjuk, hogy nem kell tovább menni, minden pontban valóban a megfelelő alakú koordinátázást látunk. Tehát az E_v-k, és a $C_i^{str.}$-ek simák és transzverzálisak.

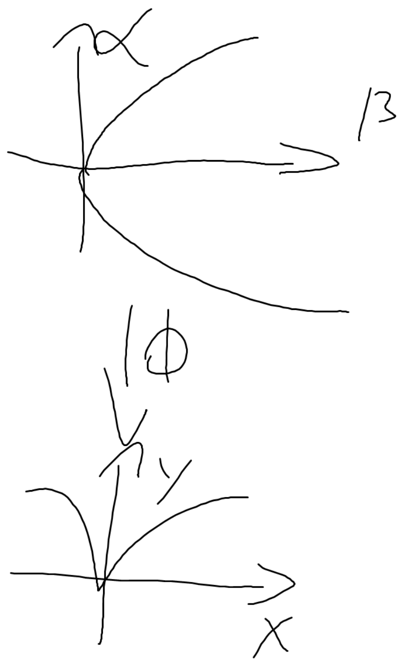
Ehhez rendelünk egy gráfot (duális/beágyazási gráf). A kivételes divizorok lesznek a csúcsok $E_v \subset \phi^{-1}(o)$, a $C_i^{str.}$-ek nyilak, és a metszéspontok az élek. Kétféle dekoráció, az algebrai multiplicitás zárójelben, és az Euler-szám, ami $c_1(N(E_v \subset \tilde{X}))$-vel egyenlő (tehát az önmetszési száma a normálnyalábnak).



A duális gráf felépítése.

Példa: cusp, $f = x^2 - y^3$. Az érintőkúp homogén lineáris d-fokú, hasad egyenesek szorzatára, esetünkben $\{x^2 = 0\}$ az érintőkúp. Térképezés $x = \alpha\beta,\ y = \beta$. Most $\phi^* f = \beta^2(\alpha^2 - \beta)$ lesz a visszahúzott. $\{\beta = 0\} = E_1$ a kivételes divizor, látszik kettes multiplicitással, és $C_1^{str.}$ a másik komponens. $C_1^{str.} \cap E = p$, ez pont az érintőkúp iránya!

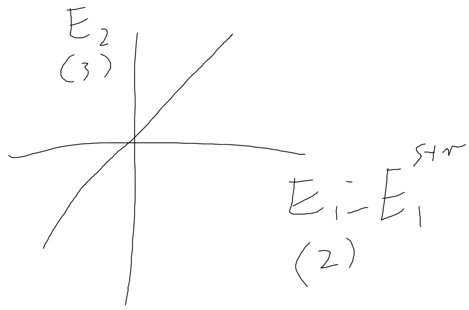
A másik térképen $x = \bar{\beta},\ y = \bar{\alpha}\bar{\beta}$. A felemelt $\phi^* f = \bar{\beta}^2(1 - \bar{\alpha}^3\bar{\beta})$ lesz, megint látjuk a kivételes divizort kétszeres multiplicitással, a strict transform $C_1^{str.}$ nem metszi a kivételes divizort, itt minden térképünk jó lesz már, monomnak választható. Az első térképen meg nem transzfervális a metszés, ott még fújni kell.



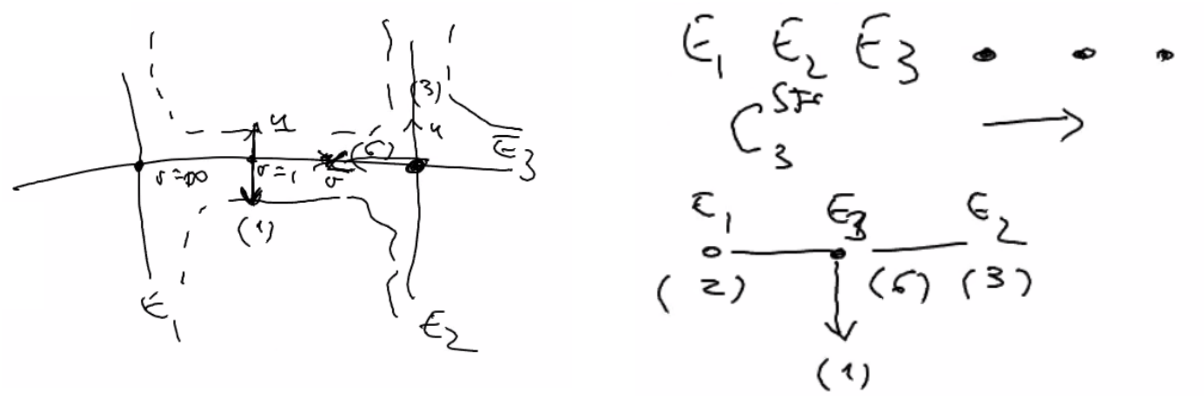
> 💡 Vegyük észre, hogy már most is sima a strict transzform, de még nincs szépen beágyazva, ezért megyünk tovább.

Azt szeretnénk, hogy a fibrálás diszknyalábjának legyenek fibrumai astrict transzformok, akkor látjuk jól, ezért fújunk tovább.

$\beta = st, \ \alpha = s$ a következő felfújás egy térképezése. $\{s = 0\} = E_2$ a következő kivételes divizor. $\phi_2^* \phi_1^- f = s^3 t^2 (s - t)$ a második visszahúzott. A második divizor háromszoros multiplicitással, és megmarad a régi E_1 kettes multiplicitással, végül a második strict transzform.



Mégegyszer felfújunk, mert három tengely fut be egy pontba. $s = uv, \ t = u$, a visszahúzott $u^6 v^3 (v - 1)$

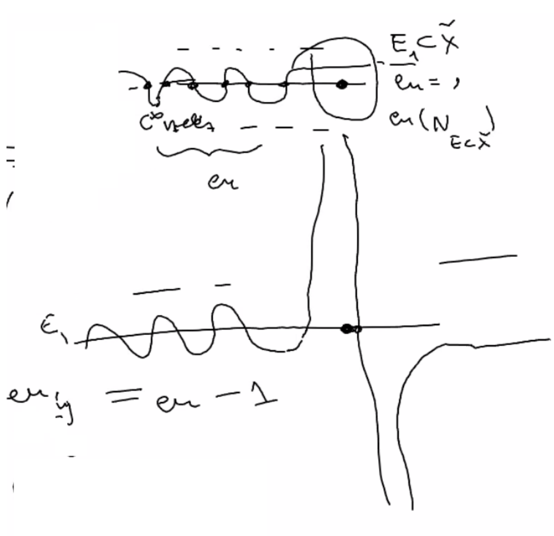


A cusp rezolúciója

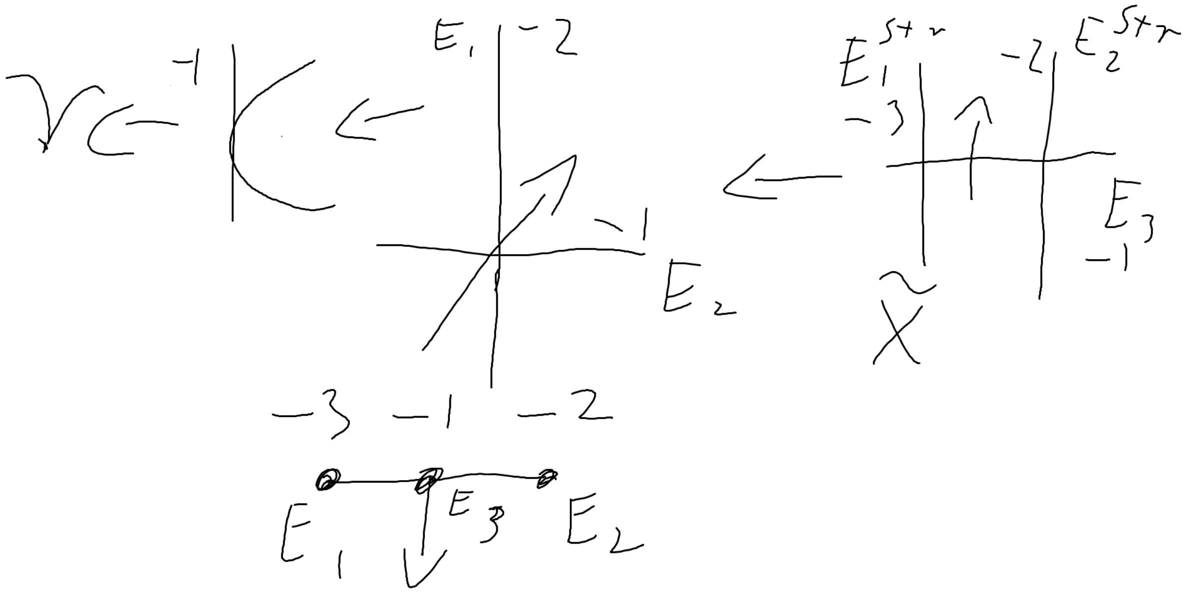
A felfújás után megjelenik egy Hopf-fibrálás, vagyishogy a tautologikus nyaláb, a -1-es Euler-számmal. Ha a kivételes divizor egy pontját felfújjuk, a kivételes divizor egy tubuláris környezete változik, hiába megy fel izomorfan az E_1 maga!

Ha $E \subset \tilde{X}$, az euler szám egy a nullszelésre transzverz szelés metszéseinek algebrai száma. Ha fel akarunk fújni egy újabb pontot ezen az E-n, a régit áthúzva kapunk egy pólust, kimegy a tubuláris környezetből! Az új Euler szám emiatt a régi-1 lesz!

Alternatívan, ha a felfújandó pontban nullhelye van a szelésnek, és a meredekség valami korlátos ϵ, akkor áthúzva az új térképre is látjuk, hogy egyel csökken a metszetszám.



- [ ] HF $O(-n)$-ben $(x,u),\ (y,v)$ ragad az $y=x^{-1},\ v=x^{-n}u$ képletek szerint., fújjunk fel egy pontot a kivételes divizoron, és lássuk be, hogy a korábbi P^1 normálnyalábjának Euler száma n-1.



A cusp felfújásai, és rezolúciós gráfja a metszési indexekkel.

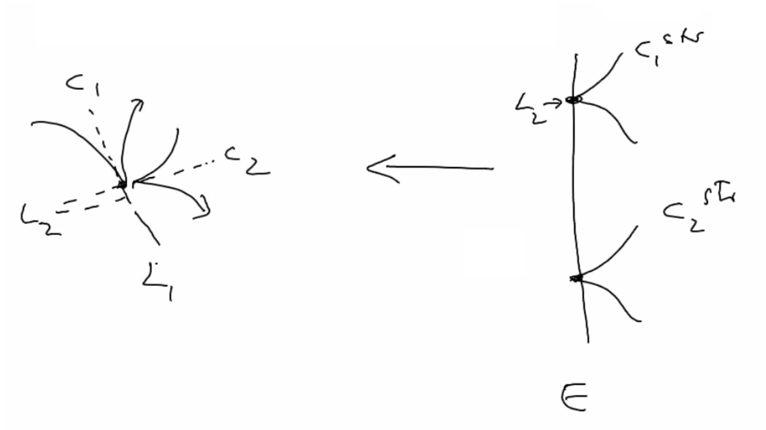
Valójában diszknyalábokat nézünk CP^1 felett, de az Euler-osztály itt is osztályoz, akár vonal, akár diszk, akár környalábokat nézünk. Az Euler-osztály $H^2(C,Z)=Z$-ben izo. Ha nem CP^1-ünk van, hanem valami más görbe felett nézzük, sima típus erejéig akkor is működni fog ez a projekt, a kivételes divizor a nullszelés, és kis diszk*diszk környezetek mentén ragasztunk vonalnyalábokat.

Metszetmátrix: az eddigi információt elkódolhatjuk a metszetekkel, mint a $H^2(\tilde{X},Z)$ -ben a metszet, mivel $\tilde{X}$ egy 4-sokaság. $(E_i,E_j)=1$, ha $i\neq j$, és nemüres metszetük van, 0 ha ugyanezen esetben üres a metszetük, és $(E_i,E_i)=eu(N(E_i\hookrightarrow\tilde{X})$.

- [ ] HF A rezolúciós gráf Γ valójában egy fa (öf, körmentes)! ötlet: indukció.
- [ ] HF Az I metszetmátrix negatív definit forma (Sylvester kritérium: az átlós minorok felváltva -1,1,-1,...)
- [ ] HF $\det(-I)=1$, vagyis a metszetforma unimoduláris.

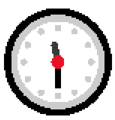
Az induktív lépés: az egyik divizoron felfújunk egy pontot, akkor csak belőle ágazunk le egy újabb levéllel, tehát öf marad, fa marad, meg kéne gonolni, hogy negatív definit is marad. Ha két divizor metszetét fújom fel szétválnak, és bekerül közéjük egy -1-es új divizor, öf, fa megmarad, a definitséget megint meg kell gondolni.

Állítás: C érintőkúpjának egyenlete megfelel az $E \cap C^{str.}$ metszet pontjainak.



$C = \{f = 0\}$, és $f = f_d + f_{d+1} + \dots$, ahol f_i homogén i.fokú. $f_d = 0$ az érintőkúp, álljon $L_1 \cup \dots \cup L_t$ egyenesekből. $x = \alpha\beta,\ y = \beta$, visszahúzzuk f-et: $f(\alpha\beta, \beta) = \beta^d(f_d(\alpha, 1 + \beta f_{d+1}(\alpha, 1) + \dots)$, a $C^{str.}$ pont az $f_d(\alpha, 1) + \beta \dots$ lesz. A kivételes divizor a $\beta = 0$, tehát csak az f_d éli túl, a metszet az $f_d(\alpha, 1) = 0$ pontokból áll, vagyis az érintőkúpnak megfelelő irányokra esik szét a görbe a kivételes divizoron.

Gyakorlatok: $x^3 - y^4,\ x^4 - y^6,\ (x^2 + y^3)^2 + yx^5$.



4.

Gráf tubuláris környezete, 4,3, whatever sokaságok.

Plumbing szerkesztés

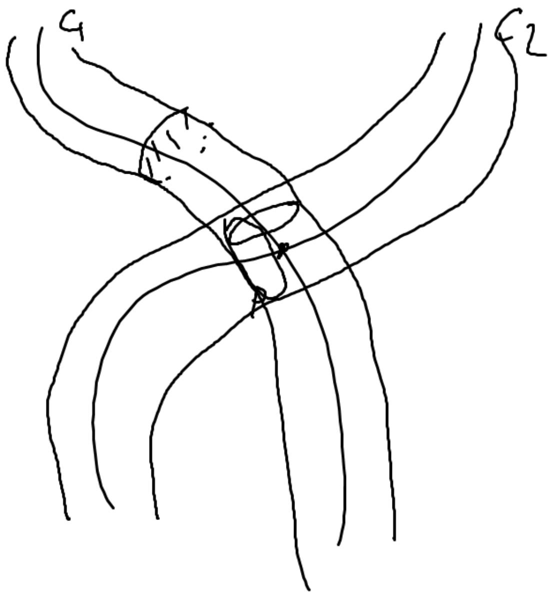
Egy plumbing gráf áll egy gráfból (fából) ami összefüggő. Minden csúcs dekorálva van, minden csúcson van egy $e_v \in Z$ az Euler szám, és egy $g_v \geq 0$ génusz.

> X egy topologikus tér, ezen osztályozni akarjuk a C-vonalnyalábokat. A klasszifkiáló térbe menő leképezések osztályozzák, a $BS^1 = CP^\infty$, ez a $K(2, Z)$, tehát igazából a $H^2(X, Z)$ elemei adják meg a különböző vonalnyalábokat.

A mi esetünkben $X = C$ kompakt irányítható 2 valós dimenziós felület, $H(C, Z) = Z$ az irányítás generálja, ez az euler szám. A múltkor megszerkesztettük CP^1 felett az összes nyalábot. Ez tovább megegyezik az önmetszési számával a nullszelésnek a totális térben.

A zérószelés normálnyalábja C^∞ izomorf magával a nyalábbal (illetve a totális terével).

$C_1^2, C_2^2 \subset X^4$ transzverzálisak $N_{C_1 \subset X}$-hez tatozik egy euler szám, és egy génusz. A $D_{C_2 \subset X}$ diszknyalábot is beazonosíthatjuk, a metszetben pedig megválasztható a trivializáció úgy, hogy kompatibilisek legyenek mindkét nyaláb struktúrájával, ennek az elkészítése lesz a plumbing szerkesztés, amikor gráfból rekonstruáljuk a szituációt.



Van egy gráfunk tehát, minden csúcson Euler szám, és génusz, és élek közöttük. Ebből szeretnénk egy 4-sokaságot $X(\Gamma)$, és egy $\partial X(\Gamma)$. Minden v csúcshoz tekintünk egy diszknyalábot $T_v \xrightarrow{D} C_v$, ahol $g(C_v) = g_v$, és $e(T_v \xrightarrow{D} C_v) = e_v$. Ha adott egy $e = (v, w)$ él, válasszunk egy $p_e \in C_v$ és $q_e \in C_w$, és választunk egy $p_e \in U_e \subset C_v$, és $q_e \in V_e \subset C_w$ trivializáló környezeteket. Ekkor $\pi^{-1}(U_e) = U_e \times D_v^1$, és hasonlóan V_e-re. Most ragasztunk, $T_v \sqcup T_w$ és $U_e \times D_v^1$ összeragad $V_e \times D_w^1$-vel “keresztbe” $(x, y) \sim (y', x')$ szerint. Ezt elvégezzük minden élére a gráfnak. Ebből kapjuk a a plumbed 4-sokaságot Γ-hoz, a pereme a 3-sokaság, amit a gráfhoz rendelünk.

Példa e=0, g génusszal: ez $C_g \times D$. Ha e=1, g=0 egypontú gráf az $N(CP^1 \hookrightarrow CP^2)$ nyalábnak felel meg.

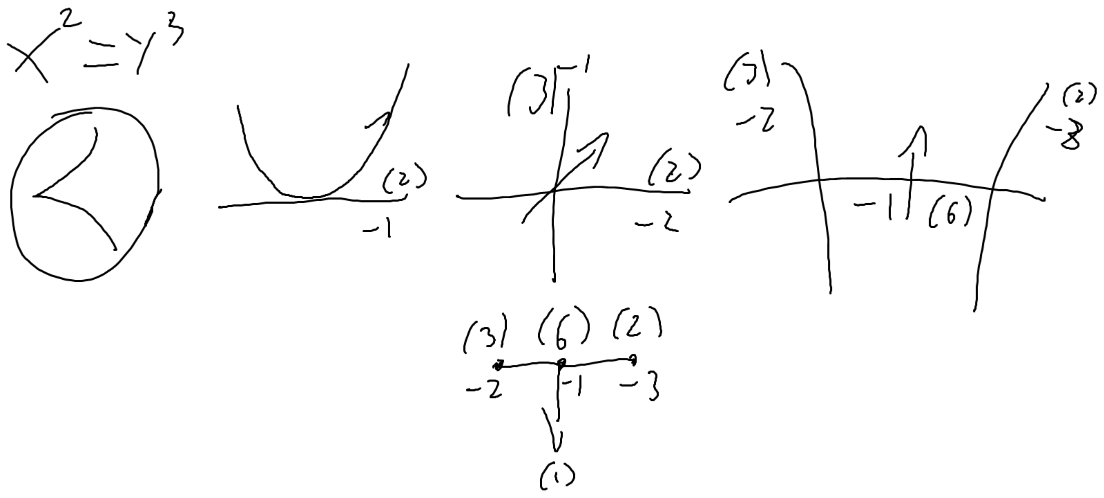
Γ-hoz kaptuk az $X(\Gamma)$-t. Ebben a 4-sokaságban benne van $\cup C_v$, a csúcsokhoz tartozó bázisok uniója transzverz metszésekkel. Ebből a homolgiája $H_i(X(\Gamma), Z) = H_i(\cup C_v, Z)$. $H_0 = Z$, mert a gráf összefüggő, $H_1 = Z^{b_1(\Gamma)+2\sum g_v}$, és $H_2 = Z^{|V|}$.

- [ ] HF A gráf minden köre generál egy homológiaelemet, lássuk be a H_1-re vonatkozó állítást.

A metszetforma $(C_v, C_v) = e_v$ persze, továbbá $(C_v, C_w) = \#élek\ (v, w)$. Az előző példában pl látunk degenerált metszetformát.

Hasonlóan tekintsük a $H_2(X, \partial X, Z)$-t. Tétel, látezik egy másik metszerforma $H_2(X, Z) \otimes H_2(X, \partial X, Z) \xrightarrow{<,>} Z$, ami nemdegenerált. Ez a Lefschetz tétel. Következik továbbá, hogy $H_2(X, \partial X, Z) = (Z^{|V|})^*$, generálják a D_v-k, a nem plumbolt részen a fibrum diszkjei, $< C_v, D_w >= \delta_{vw}$.

$(C, o) \hookrightarrow (C^2, o)$ izolált síkgörbe szingularitás. $C = \cup_1^r C_i$. Fújjuk fel elég sokszor, kapunk egy X-et. Kapunk kivételes divizorokat, és a $\tilde{C}_i$ strict transformokat, transzverzálisan a kivételes divizorokra. Vegyük észre, hogy a rezolúciós gráf pont a plumbing gráf speciális esete, mindegyik génusz 0, az Euler szám lehet más, azt fel is írtuk. Ha izolált a szingularitás, akkor minden multiplicitás nulla, visszahúzva tekinthetjük a $\sum m_v E_v + \sum \tilde{C}_i \in H_2(X, \partial X, Z)$ osztályt, mint a függvény visszahúzottját.



A cusp rezolúciója hatszázadszorra is.

$div(\phi^* f) = 6E_3 + 3E_2 + 2E_1 + \tilde{C}$. Állítjuk, hogy ez a homológiaosztály a nulla! Ehhez kellene, hogy minden abszolút homológiagenerátorral elmetszve nullát ad. $< div(\phi^* f), E_1 >= 6 + 0 + 2(-3) + 0$ például, és hasonlóan a többi generátorral. Ha tekintjük az $\{f = \epsilon\} \leftrightarrow \{f = 0\}$ homotópiát, emeljük fel az $f = \epsilon$ görbét, ez lokálisan $u^{m_v} = \epsilon$ alakú, m_v darab pont fut be a középső fibrumba. $< div(\phi^* f, E_v >=< \phi^*(f = \epsilon), E_v >= 0$ mert a metszet konkrétan üres, a kivételes divizorok mellett lesz multiplicitás sok darab szál.

$div\phi^* f = \sum_V m_v E_v + \sum_V \sum_{Ind_v} \tilde{C}_{v,i}$ alakú a principiális divizor izolált szingularitás esetén, láttuk, hogy ez elmetszve bármelyik kivételes divizorral elmetszve nullát ad. Bilinearitásból mit látunk? $\sum m_v(E_v, E_w) + \#Ind_w = 0$, ezt minden w csúcsra felírva kapunk egy mátrixegyenletet, ezt megoldva a multiplicitásokból kiszámolhatóak az Euler számok és az indexek, stb.

Példa folyt. $3E_2 + 6E_3 + 2E_1 + C'$-t szorozzuk a különböző divizorokkal, pl E_2-vel, $3e_2 + 6 * 1 + 2 * 0 + 0 = 0$, ezt megoldhatjuk e_2-re. E_3-al szorozva $3 * 1 + 6e_3 + 2 * 1 + 1 = 0$. Ha az Euler számokat tudjuk, és a nyilak helyét, invertálnunk kell a metszetformát megadó mátrixot.

💡 Az $I =< E_v, E_w >$ metszetforma unimoduláris és negatív definit.

Vegyük észre, hogy rezolúciónál végig S^3 marad a perem, mindig belső pontot fújunk fel. $\cup \tilde{C}_i \cap \partial \tilde{X} \hookrightarrow \partial \tilde{X}$ a szingularitás csomója beágyazva S^3-ba.

5.

$(f=0,0) \subset (C^2,0)$ csira, $f:(C^2,0)\to(C,0)$. $(\tilde{X},E)\xrightarrow{\phi}(C^2,0)$, a kivételes divizor komponensekre hasad. $\phi^{-1}(f=0)=E\cup St(f=0)$, mint oly sokszor már eddig is. Ha $f=f_1\dots f_r$, akkor az algebrai halmaz is felbomlik r komponensre, és a Strict transzform is szétesik a kivételes divizorokra transzverz körlapokra. $\tilde{C}_i=\bar{\phi}^{-1}(C_i\setminus 0)$, az $E=\cup E_v$ és $\cup\tilde{C}_i$ mind simák, transzverzek, minden metszéspontot csak kettő megy át.

Duális rezolúciós gráf: $E_v\mapsto\cdot$, $\tilde{C}_i\mapsto(\to)$, és $E_v\cap E_w$-k lesznek az élek a pontok között, ez a Γ gráf. Három dekoráció, $E_v\mapsto[g(E_v)]$, illetve $m_v=\phi^*f$ multiplicitása E_v mentén, végül pedig a $e(\nu(E_v\hookrightarrow\tilde{X}))$ metszésszámok, a divizor beágyazásához tartozó normálnyaláb euler száma. $\tilde{C}_i\mapsto m_1=1$, ha izolált a szingularitás (ergo f felbontásában minden tag különböző).

I metszetmátrix a gráfot kódolja, a multiplicitást nem. $I_{v,w}=(E_v,E_w)$ az Euler szám ha $v=w$, illetve a két kivételes divizor metszeteineka száma (ergo az élet száma Γ-ba közöttük). f-ből kapunk ide egy $div(\phi^*f)=\sum m_vE_v+\sum 1\tilde{C}_i$ a $H_2(\tilde{X},\partial\tilde{X})$ relatív homológiacsoportban. Ez homologikusan triviális, mint a múlt órán megbeszéltük. Tehát $(\sum m_vE_v+\sum\tilde{C}_i,E_u)=0$ a metszetformában minden generátorra (hiszen $H_2(X)$-et generálják a kivételes divizorok, rájuknyomhatjuk a fibrumokat.

Ebből adódik egy mátrixegyenlet $I\cdot(m_1,...,m_n)+(\#\{i,\tilde{C}_i\cap E_1\},...)=(0,..,0)$. A multiplicitás szigorúan pozitív mindig. Meg akarjuk mutatni, hogy az I mátrix negatív deifnit.

Van egy dekorált összefüggő gráfunk (minden csúcshoz az önmetszés e_v), ehhez le tudjuk gyártani az előbi módon az I mátrixot. Létezzen továbbá egy $D=\sum d_vE_v$ nem azonosan nulla ciklus, hogy $(D,E_v)\le 0\ \forall\ v$, és létezzen egy olyan v_0 : $(D,E_{v_0})<0$.

> 💡 A $(\cdot,\cdot)$ az I mátrix által megadott bilineáris formát jelöli.

Ha mindezek teljesülnek, I negatív definit.

> Ha I negatív definit, az pontosan azt jelenti, hogy minden z ciklusra ha $z^2 \geq 0$, akkor $z = 0$. Írjuk fel $z = z_1 - z_2$, ahol $z_1 = \sum_{z_v>0} z_v E_v$, és hasonlóan negatív esetben a másik tag. $z_1^2 + z_2^2 - 2(z_1, z_2)$. A vegyes tagban csak pozitív számokat látunk, tehát a minusz egyszerese negatív, és a négyzet $\leq z_1^2 + z_2^2$, és feltehetjük, hogy $z = z_1$, vagyis minde együtthatója nemnegatív. Indukció a nem nulla tagok darabszámára. Ha ez nulla, akkor $z = 0$, és kész. Ha 1, akkor $0 \geq (z, D) = (z_v E_v, D) > z_v d_v E_v^2$, ha $z_v \neq 0$, feltevés szerint. Ugyanakkor $z^2 = z_v^2 E_v^2 \geq 0$, ergo $z_v = 0$, elletmondás.
>
> $Z = \sum z_v E_v$, ahol $z_v > 0$. Nézzük azt a részgráfot, aminek a nem nulla együtthatójú csúcsúk felelnek meg. Szorítsuk meg D-t erre a részgráfra, állítjuk, hogy ez is teljesíti a feltételeket, ez persze világos, tagok elhagyásával csak csökkenthetjük, mint az előbbi számolásban ??????
>
> Tehát feltehetjük, hogy minden v-re $z_v > 0$. Nézzük $z - aD$-t, ezt a kellően kicsinek választva még ennek a különbségnek még nemnegatív együtthatói lesznek. Legyen ez a z'. $(z')^2 = (z', z - aD) \geq (z', z) = (z - aD, z) \geq z^2 \geq 0$, tehát találtunk egy kevesebb tagú ciklust aminek még mindig pozitív a négyzete, indukcióból kapjuk, hogy ő nulla, vagyis $z = aD$, vagyis $0 \leq z^2 = a^2 D^2 < 0$, következik, hogy $a = 0$.

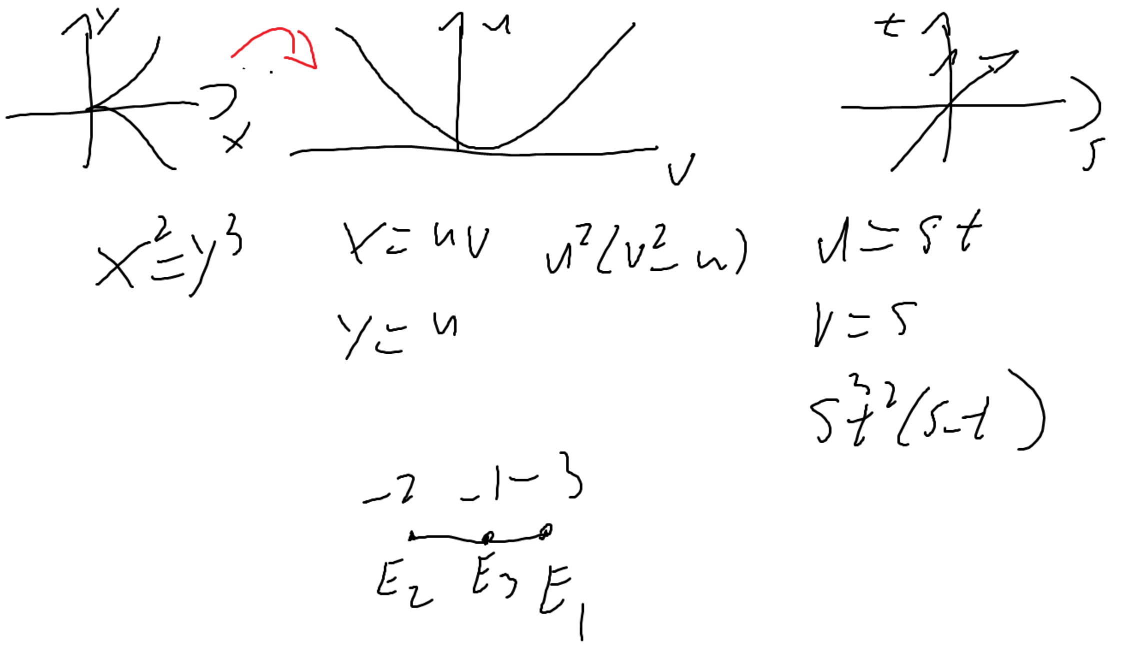
> 💡 Negatív deifnitség ugyanaz Z és Q felett, ezért használhatjuk a folytonossági érveléseket.

Következik, hogy $\det I \neq 0$ például. $H_2(\tilde{X}) \xrightarrow{i} H_2(\tilde{X}, \partial\tilde{X})$ előbbit a kivételes divizorok generálják, a másikat a "duális" transzverz körlapok az egyes kivételes divizorokhoz. $i(E_v) = e_v D_v + \sum_{v,w \text{ él}} D_w$ képlettel fogja elvinni ez a természetes leképezés a generátorokat, ez pont a metszetmátrixszal való szorzás., róla tudjuk, hogy nemdegenerált, speciálisan tehát injektív.

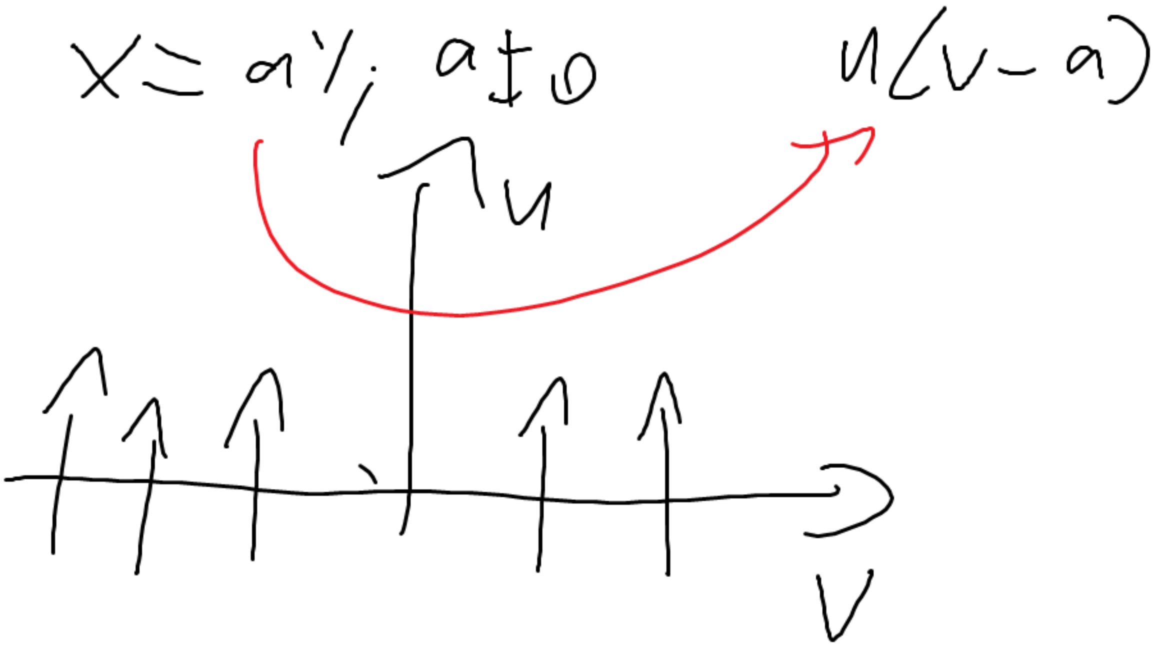
Folytatva a sort, $H_2(\tilde{X}, \partial\tilde{X}) \to H_1(\partial\tilde{X})$, ha a perem nem S^3, hanem valami etwas, a $H_1(\tilde{X})$ szabad Abel, tehát a perem első homológiája felbomlik mint $coker I \oplus Z^{b_1(\Gamma)+2\sum g_v}$ alakban, tehát a perem (ami izomorfan mozog, tehát megegyezik ∂X-el) első homológiáját megkapjuk torzió+szabad alakban.

$H_2(\tilde{X}) \otimes H_2(\tilde{X}, \partial\tilde{X}) \xrightarrow{<,>} Z$ Lefschetz dualitás miatt nemgenereált bilineáris. Például az E_v, D_v bázisban a mátrixa pont az identitás. $H_2(\tilde{X}) \otimes H_2(\tilde{X}) \xrightarrow{(,)} Z$ a mi általunk vizsgált I metszetforma, a második koordinátában vett i beágyazással kapunk egy kommutatív háromszöget.

Nézhetjük, hogy a felfújás nem csak a kedvenc görbénket, hanem az összes többit is hogyan változtatja, szétbontjuk a lokális algebrát.



Hova visszük a lineáris függvényeket? Már az első lépés szétválasztja őket, az első divizoron lesznek ők a transzverzi körlapocskák.



Minek felelnek meg az $u = bv$ alakú görbék eredetileg a másodfokúak voltak, $y^2 = bx$ (megintcsak $b \neq 0$). Következőleg ők lesznek a második kivételes divizoron lesznek ők a transzverz körlapocskák.

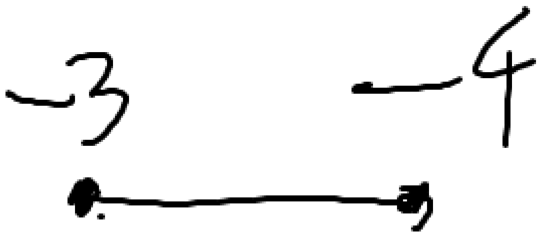
A harmadik térképen $t = cs, c \neq 0$, akkor $u = cv^2$, és visszatérve $y^3 = cx^2$, cuspok paraméteres családja. Például $y^2 = cx^2$ egyenespárokból áll, az első divizoron lesz, $y^2 = cx^3$ pedig a harmadik másik térképén fog látszani.

Hogyan függ össze a gráf szerkezete a felfújt függvények terével?

$(\tilde{X}, E) \xrightarrow{\phi} (C^2, 0) \xrightarrow{g} (C, 0)$, visszahúzunk egy *valamilyen* üggvényt, ehhez tartozik egy $div(\phi^* g) = \sum m_v E_v + str(g)$ divizor. Erre mindig teljesül, hogy $(div_E(\phi^* g), E_v) \leq 0 \; \forall \; E_v$. Az ilyen $\forall v : (D, E_v) \leq 0$ alakú divizorok terét nevezzük Lipman kúpnak, egy félcsoport. C^2 felett általában minden ilyen divizorhoz létezik is egy függvény ami őt adja.

7.

Érdekelne minket a következő plumbing gráf által megadott tér.



Lánctörtekkel fogunk foglalkozni, $[a_1, \ldots, a_n] = a_1 - \frac{1}{(a_2 - \frac{1}{\ldots})}$ ilyen fura minuszos alakban, ez a Hirzebruch lánctört, nem lefelé, hanem fölfelekerekítéssel képezzük. A fenti gráfhoz $3 - 1/4 = 11/4 = n/q$, ez a (11,4), ehhez a duális lánctört az $n/(n-q)$, a konkrét esetben ez $11/7$ ennek a Hirzebruch felbontása $[2, 3, 2, 2]$. Ha fordított sorrendben írjuk fel a lánctörtet (n, q')-t kapunk, ahol $qq' \equiv 1 \mod n$. (fel van téve $0 < q < n, (n, q) = 1$)

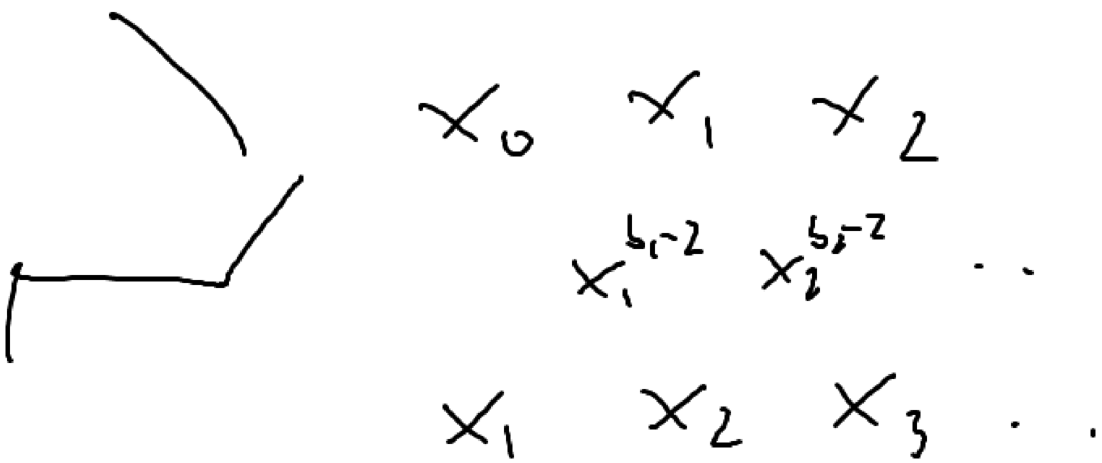
Ez valahogy analóg a lencseterekkel...?

💡 A $\sigma\check{}\ (R_{\geq 0} < (0,1),(1,0) >$ kúphoz hoz a $C[\phi] = C[x,y] \leftrightarrow C^2$ tartozik pl. Második példa, ha a kúpot $(0,1),(1,1)$ generálják, akkor is a síkot kapjuk, hiszen ez csak egy átkoordinátázás.

*Reguláris kúp*nak hívunk egy kúpot, ha a v_1, v_2 generátoraira $det(v_1, v_2) = \pm 1$, ekkor a félcsoportalgebra spektruma mindig C^2 lesz.

Algebra

Z^2-ben vesszük a $(4,11)$ rácspontot, és az origót vele összekötő egyenest. Ehhez tartozik egy $\sigma\check{}$ duális félcsoport, amit $\mathbb{R}_{\geq 0} < (4,11),(1,0) >$ feszít, ehhez $\phi = \sigma\check{} \cap Z^2$-t vesszük, és a hozzá tartozó $\mathbb{C}[\phi]$ félcsoportalgebrát. Ez egy végesen generált $\mathbb{C}$-algebra, tehát ő pontosan megfelel egy X affin varietásnak. Számoljuk meg hány rácspont van a kúpban, a lenti tétel szerint leolvashatjuk a generátorokat: $(1,0),(1,1),(1,2),(2,5),(3,8),(4,11)$ pontok generálják, betűzzük el őket $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \mu$-vel. A $C[\alpha \ldots \mu] \to C[\phi]$ leképezés magját a félcsoport relációiból leolvashatjuk, a konkrét esetben például az első három generátorból leolvashatjuk hogy $\alpha\gamma = \beta^2$. Általában a 2-vel eltolt szomszédok összege a közöttük levő elem valahányszorosa, ez pont a duális lánctörtet fogja visszaadni!!! Ergo $\beta\delta = \gamma^3, \gamma\eta = \delta^2, \delta\mu = \eta^2$ a többi reláció a szomszédos generátorok között, az elsővel együtt $[2,3,2,2]$ pont a duális lánctört felbontás! De ez nem az összes generátor, a Veronesehez hasonló elcsúsztatott mátrixot csinálunk, és még a lánctört b_i multiplicitásaival beírunk egy középső sort amit csak a negatív irányban veszünk bele az aldeterminánsok számításában.



Része a csúsztatott mátrixnak, a középső sorral és a kétfajta szorzásiránnyal ami a minorokban kell.

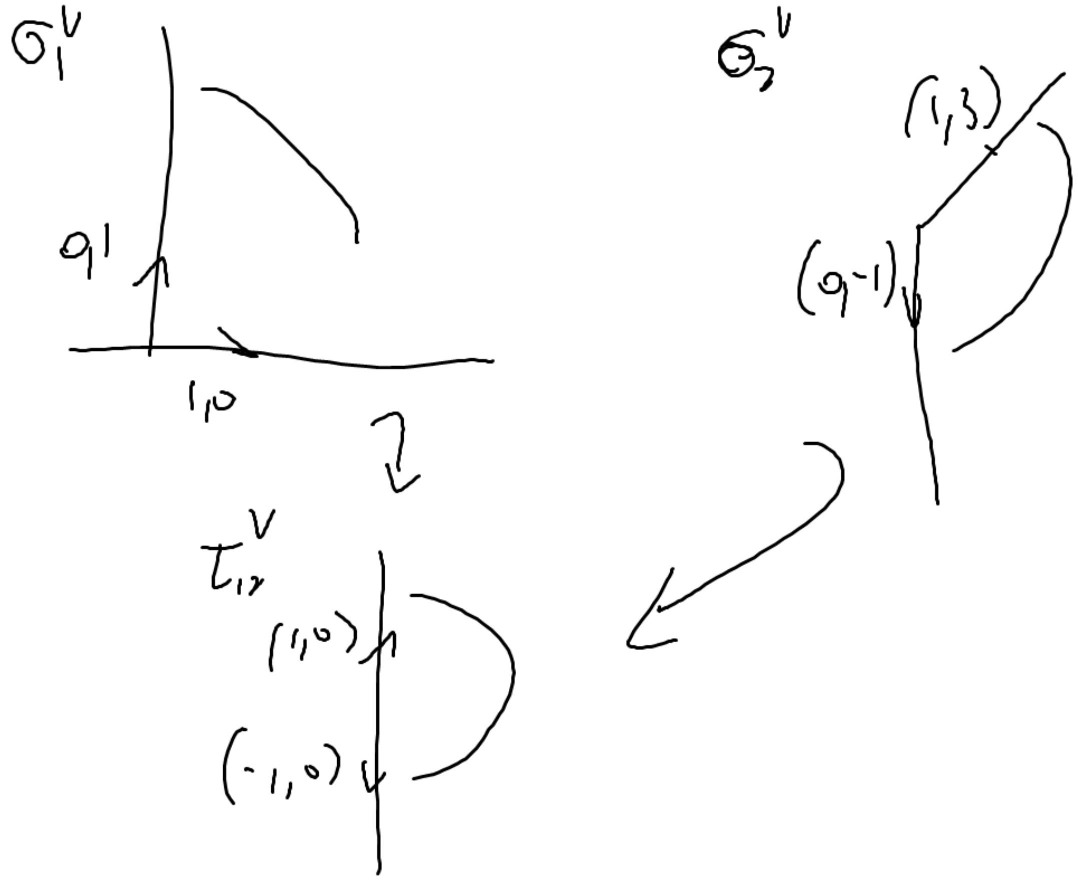
> Tétel: $\phi = \bar{\sigma} \cap Z^2$ generátorai: $\partial conv(\phi \setminus 0)$ halmaz pereme szakaszokból/(fél) egyenesekből áll, a kompakt komponensein fekvő rácspontok minimális generátorrendszert alkotnak.

Topológia

Duális kúp $\sigma = \{v : (v, w) \geq 0 \forall w \in \sigma\check{}\}$ formulával van definiálva. A mi konkrét kúpunknak a duális generátorai a $(0, 1), (11, -4)$ lesznek. Fel akarjuk osztani reguláris részkúpokra. Ezt a duális kúpot $(0, 1), (1, 0), (3, -1), (11, -4)$ generálják. Ezekből az egymásmellettiek fogják megadni a reguláris felosztást, jelölje ezeket rendre $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. $\det(0, 1; 1, 0) = -1$, stb. Vegyük észre továbbá, hogy a 2-szomszédok összegéből 3,4-et kapunk ($(0, 1) + (3, -1) = 3(1, 0)$, stb), ez pont a fenti n, q! Ahol ragadnak az egy egyenes, ennek a duálisa egy félsík lesz, az ehhez tartozó algebra $C[x, y, y^{-1}]$, ami $C \times C^*$-nak felel meg, pont ementén ragasztunk a plumbingban.

τ_{12} jelölje a $\sigma_1 \cap \sigma_2$ közös peremegyenest.

Dualizáljuk σ_1-et, $\sigma_1\check{} = R_0^+ < (1, 0), (0, 1) >$ lesz, ehhez persze $C[\phi] = C[x, y] \leftrightarrow C^2$ tartozik. $\sigma_2\check{} =< (1, 3), (0, -1) >$-ként áll elő, ehhez $C[\phi] = C[xy^3, y^{-1}]$ "polinomgyűrű" tartozik. A metszetben $\tau_{12}\check{}$-hez tartozó gyűrű a $C[x, y, y^{-1}]$ tartozik pont, ehhez $C_x \times C^*$, mint az előbb megállapítottuk.



A jelen álláspont

Az indukált beágyazásoknál $C_x \times C_y^*$ identikusan ágyazódik be, a másik tagban pedig $C[\phi\check{\sigma_2}]$-höz $C[xy^3, y^{-1}] = C[v, u]$ tartozik. Ehhez persze úgy ragasztunk hogy $u = y^{-1}, v = xy^3$. Adunk egy szelést, $x = 1, v = u^{-3}$, tehát egy $O(-3)$-at látunk. σ reguláris darabkái benne vannak, tehát duálisan a reguláris felbontás darabjairól vannak kompatibilis leképezések $\sigma\check{\ }$-ba, tehát ezek összeragadnak és ez lesz a rezolúciós leképezés. $C[\alpha, \dots] \hookrightarrow C[\phi\sigma_1\check{\ }]$ $\alpha \mapsto x, \beta \mapsto xy$ és így tovább, leolvassuk az együtthatókat, és ezek automatikusan teljesíteni fognak minden összefüggést a ragasztáshoz. A másik térképen $C[\alpha, \dots] \hookrightarrow C[v, u] = C[\phi\sigma_2\check{\ }]$, itt kifejezzük x-et v, u-val, vu^3 lesz, ebből $\alpha \mapsto vu^3, \beta \mapsto vu^2$, stb.

8.

Azért hívjuk tórikus esetnek, mert mindig lesz egy $(C^*)^n$ hatás a megszerkesztett sokaságon.

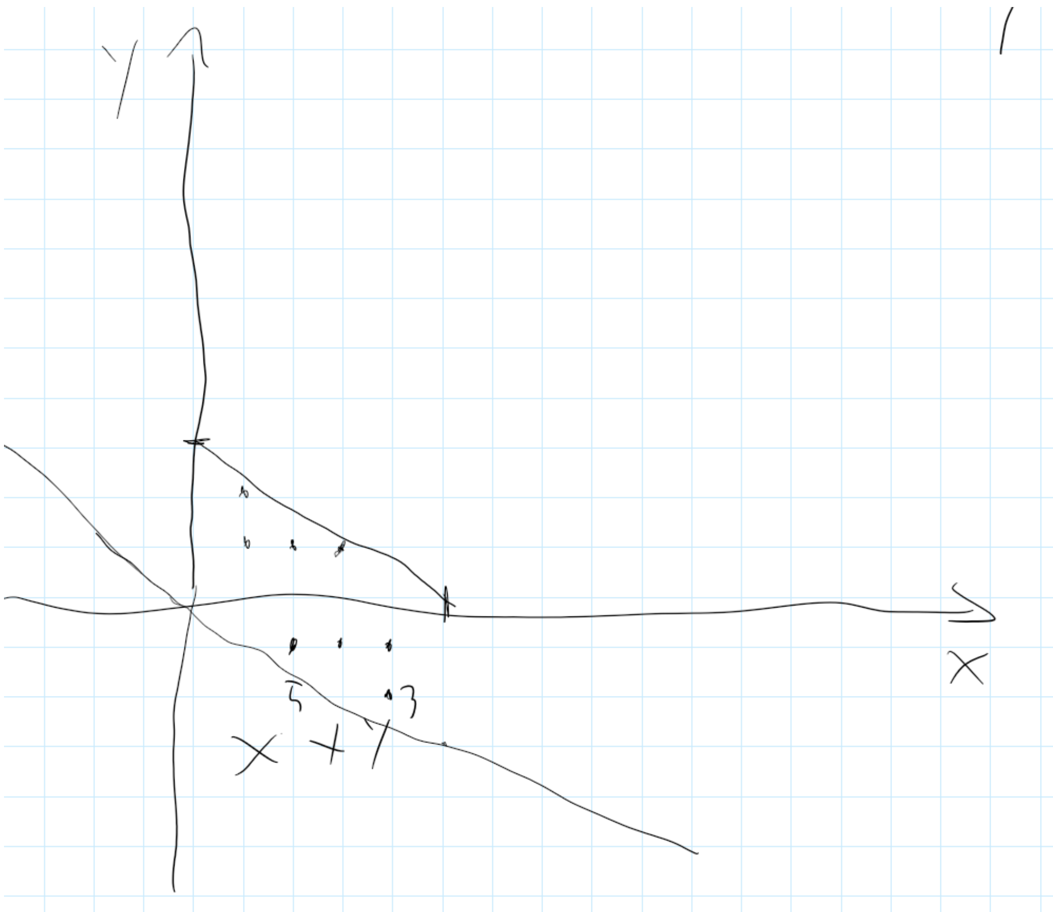
$O_{C^2,0} = C\{x, y\}$ a befogadó tér lokális gyűrűje, adott rajta egy csira $x^5 + y^3$, $f = 0$ a görbe. A lokális gyűrű $C\{x, y\}/(f)$ lesz. Normláis gyűrűnek hívunk *valamit* lol. $QC_{C,0} = Q_{C,0}$ a hányadostest. $O_{C,0} \hookrightarrow Q_{C,0}$ persze be van ágyazva. Itt tekintsük a $q^n + a_1 q^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ alakú $q \in Q_{C,0}$ elemek halmazát, ahol $a_i \in O_{C,0}$ nevezzük $\bar{O}_{C,0}$-nak. Többek között például tudunk gyököt vonni. Kb olyan függvényeket veszünk a görbe gyűrűjéhez, amik a sima helyeken holomorfak, a szingulárisokban pedig csak folytonosak.

<u>Példa:</u> A mi konkrét esetünkben $x^5 + y^3 = 0$, tehát a racionális testben $x^2 + y^3/x^3 = 0$ teljesül, tehát az y/x függvény belekerül ebbe az algebrai egészekkel való lezárásba, tehát ennek a függvénynek a lokális gyűrűje a 0-ban nem normális. Akkor bővítünk ezzel a $z = y/x$ elemmel, ellenőrizzük, hogy ez a gyűrű nomrális-e? Nem lesz az, $x^y + z^3 = 0$-ból $(x/z)^2 + z = 0$, vagyis $t = x/z$-vel is kell bővíteni. A végén kodimenzió 2-ben $C\{t\}$-nek kellene kijönnie, ez a normális gyűrű, a sima pontok lokális gyűrűje. $t^2 + z = 0,\ x = zt$, ebből $t^2 + z = 0$, és visszahelyettesítve kapunk egy paraméterezést $x \mapsto t^3$ és $y \mapsto -t^5$ alakban. Ez $C \setminus 0 \to \mathbb{C} \setminus 0$ izomorfizmus, és $C \to \mathbb{C}$ homeomorfizmus.

<u>HF</u>: Ha $O_{C,0}$ egy UFD, akkor ő normális (vagyis $O_{C,0} = \bar{O}_{C,0}$).

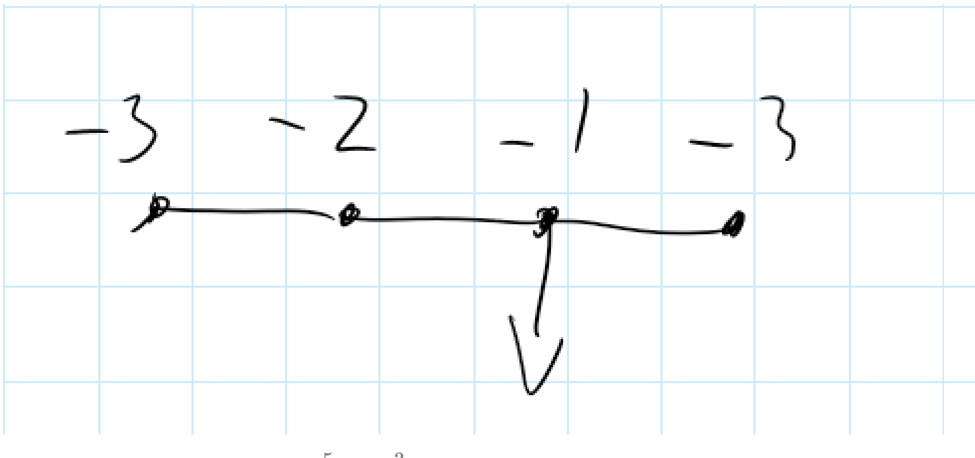
$O_{C,0} \hookrightarrow \bar{O}_{C,0}$ kodimenziója mint vektortér véges $\mathbb{C}$ felett. Az előző példában világos, a kép a $g(t^3, -t^5)$ alakú polinomok. Így nem kaphatjuk meg $t^{\{1,2,4,7\}}$-et. Ez lesz a delta invariáns, $\delta = \dim_{\mathbb{C}} \bar{O}/O$, vagy máshogy a félcsoporttal kifejezve $\#\{\mathbb{N} \setminus \mathcal{S}\}$, ahol $\mathcal{S} = \mathbb{N} < 3, 5 >$.

Az eredeti kérdéshez kapcsolódva a görbe Newton diagramja alatt meg kell számolnunk a rácspontokat.



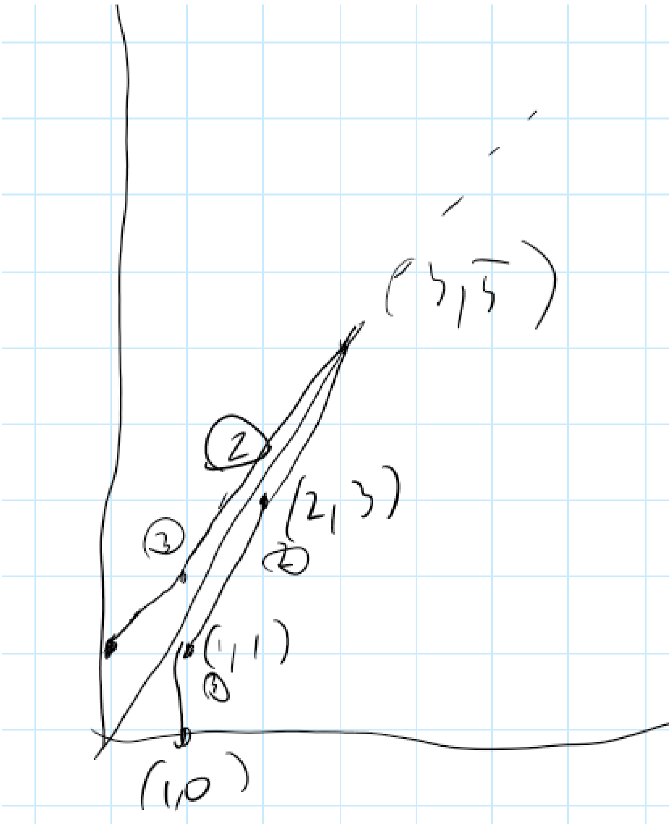
Behúzzuk a paraméterezésnek megfelelő egyenest, $(3, 5)$ normálissal, ezen egyenesek mentén mindegyik rácspont azonos kitevőt ad, azok a rossz pontok, amiknek nincsen a pozitív negyedsíkban reprezentánsa, ami pont megegyezik a Newton diagram alatti pontok számával.

Vehetjük a duális kúpot, itt a normálisból irányvektor lesz. Lánctörtbe fejtjük $\frac{5}{3} = 2 - \frac{1}{3}$, illetve $\frac{3}{5} = 1 - \frac{1}{3 - \frac{1}{2}}$. Ebből a rezolúciós gráf



$x^5 + y^3 = 0$ rezolúciós gráfja.

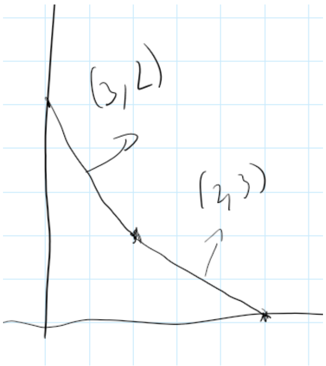
lesz. Lentről fölfelé elolvassuk a lánctört elemeit, csak az egész komponenst nem, és -előjellel ezek lesznek a dekorációk, plusz középen egy -1, amire a Strict transform csatlakozik. Itt a $\frac{5}{2}$ van jobbra, és a $\frac{3}{5}$ van balra a középső -1-es divizortól.



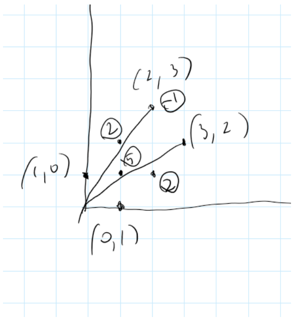
A duális kúp generátorai, és a multiplicitások, felbontása reguláris kúpokra (ergo C^2-ekre).

Ebből a duális kérdésre is választ kaphatunk, hogy egy adott polinom melyik divizorra emelkedik fel, például az $x = 0$ a hosszabbik ág -3-áról lóg le. $\alpha x + \beta y$-t paraméterezi $[\alpha : \beta]$, ez mondja meg, hogy pont hova emelődik fel ezen a divizoron. A $(2, 3)$-as ponthoz a duálisban tartozik a -2 és -3 közötti rész a felfújásban, vesszük az $\alpha x^3 + \beta y^2+$magasabb tagok (amik a megfelelő $2, 3$ normálisú newton diagram felett vannak) emelkednek fel az $[\alpha : \beta]$ paraméterezéssel mint az előbb. A -1-esen az $\alpha x^5 + \beta y^3$-ak élnek, a másik szélső -3ason pedig az $\alpha x^2 + \beta y$ alakú dolgok.

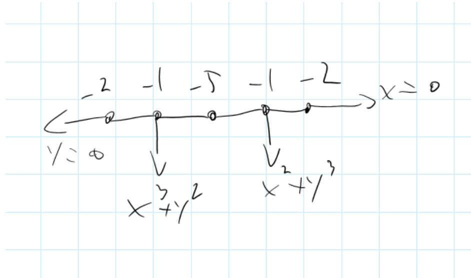
Az $(y^3 + x^2)(x^2 + y^3)$-nél kicsit bonyolultabb, két komponens lesz a Newton diagramban.



Az OG newton diagram



Duális Newton diagram, és a konvex burok perempontjai.



A dualizálásból kapott rezolúciós gráf.

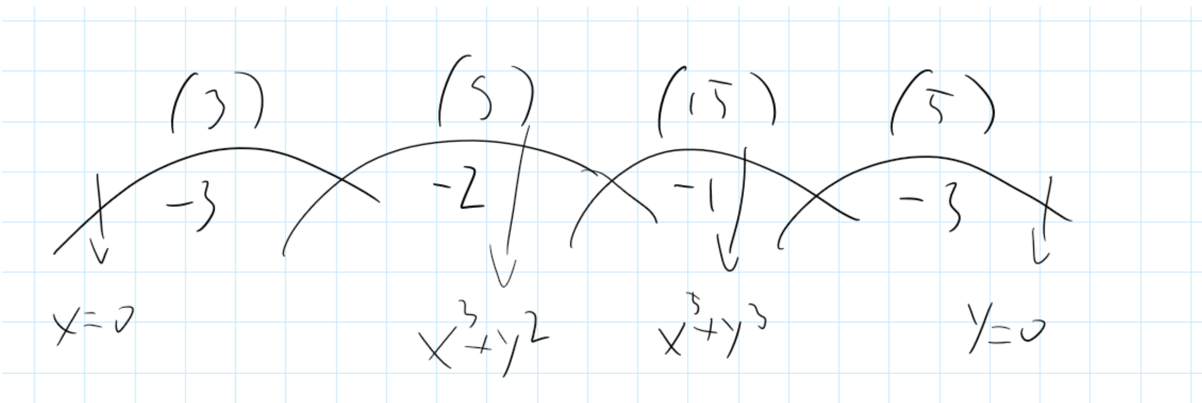
Eddig mindig a C^2-et fújtuk fel, S^3-on csináltunk plumbing szerkesztést. A különböző komponensek peremén különböző algebrai csomók jelennek meg, evidens kérdés, hogy szomszédos csomóknak mi a linking száma.

Tavaly volt, hogy $lk(L(f_1), L(f_2)) = i(F_1, f_2)_0$. Hogyan lehet ezt a rezolúciós gráfból számolni? Rezolóciós gráfban v-hez tartozik egy-egy f_α görbesereg, ehhez pedig egy-egy csomó $L(f_v) = L(f_\alpha)$. A rezolóciós gráf megadja az I metszetmátrixot, az állítás az, hogy $i_0(f_u, f_v) = lk(L(f_u), L(f_v)) = -I^{-1}_{uv}$.

HF: Negatív definit $\det = 1$ mátrix inverzében minden elem szigorúan negatív

Egy adott függvény felfújása után kapunk multiplicitásokat, régebben volt az $Im + (\text{nyíl}) = 0$ principiális divizorra vonatkozó képlettel. Az állatorvosi lovunk -2-es divizorán élnek az $\alpha x^3 + \beta y^2$ alakú függvények. $-I^{-1}_{43} = [m(f_4)]_3$, a négyes függvény multiplicitása a hármas divizoron.

Például $i_0(x, x^5 + y^3) = 3$, $i_0(y, x^5 + y^3) = 5$, végül $i_0(x^3 + y^2, x^5 + y^3) = 9$ következik.



A rezolúció sematikus képe dekorálva az Euler számokkal és a multiplicitásokkal.

Ezek a dolgok csak a bambuszokra működnek.

9.

$f : (C^2, 0) \to (C, 0)$ csira, $f^{-1}(0) = C$, $(C, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$.

Beágyazott rezolúcióval feloldhatjuk a szingularitást $(C, 0) \subset (X, 0)$, a csomók itt is ugyanazok, mintha csak C^2-ben néznénk a görbét. $\tilde{X} \xrightarrow{\phi} (C^2, 0)$ a felfújások kompozíciója, ebben van egy csomó extraság, az E_v irreducibilis kivételes divizorok, mindegyik P^1 lesz. És a $\phi^{-1}(\bar{C} \setminus 0)$ a strict transform, ez is bomlik C_i irreducibilis komonensek szerint. Addig fújjuk, amíg $str(C) \cup \bigcup E_v$ normal crossing divizor lesz. Ehhez vettük a beágyazot rezolúciós gráfot, az E_v-khez csúcsok, strict transformokhoz nyilak, és az $E_v \cap E_w$ metsztekhez élek. Ez a $\Gamma(X, f)$, egy összefüggő fa lesz. A csúcsokat dekorlájuk a génusszal, most P^1-eink vannak, ezek mind nullák, nem írjuk. Aztán az önmetszéssel is dekoráljuk a csúcsokat, az Euler számmal. A teljes metszetforma leolvasható mostmár a gráfról, beláttuk már, hogy ez negatív definit lesz. Még a multiplicitás dekoráció $\tilde{X} \xrightarrow{\phi} C^2$, a felfújással visszahúzzuk az f-et, és megnézhetjük, hogy az $E = \cup E_v = \phi^{-1}(0)$ egyes tagjain hányszorosan tűnik el, s ezt ráírhatjuk minden csúcsra.

Izolált szingularitás esetén a strict transform multiplicitása 1 lesz.

Algebrai kompatibilitás

Adott Γ, $v \mapsto E_v^2 = e_v$, $v \mapsto m_v$, visszahúzzuk $div(\phi^*(f = 0)) = \sum_v m_v E_v + m_i str(C_i) \in H_2(\tilde{X}, \partial\tilde{X}, Z)$, ez egy principiális divizor, vagyis a homológiában (vagy $Div(\tilde{X})$-ben) nullát reprezentál, továbbá $div(\phi^*(f = 0), E_v) = 0$, eszerint $m_v e_v + \sum_{(v,w) \text{ él}} m_w + \sum_{\text{nyíl } E_v\text{-n}} 1 = 0$.

Topológia

$X, 0$ izolált felületszingularitás valamilyen $C^N, 0$-ban, elvágjuk valamilyen kis ϵ sugarú gömbbel, állítjuk hogy ez egy transzverzális metszet lesz, és kapjuk a metszetben az L_X valós 3-dimenziós irányított zárt sokaság.

Példa: $X = C^2$, akkor $L_X = S^3$.

Ha $C, 0 \subset X, 0$ egy görbe a felületben, akkor elvágva $L_C \subset L_X$, kapunk egy 1-dimenziós zárt sokaságot, ergo egy linket L_X-ben. Felfújás után $\partial\tilde{X} = L_X$, mivel a felfújás az origón kívül izomorfan megy, és hasonlóan a felületi görbék visszahúzásával kapjuk benne a linkjét felfújás után.

Példa: $x^2 = y^2 z$, az egész z tengely szinguláris, de ő beágyazva sima a felületben. Attól még hogy egy felületnek szingularitása van nem biztos, hogy minden görbe benne is szinguláris!

$f:(C^2,0)\to(C,0)$, most $L_X = S^3$, az egész befoglaló teret tekintjük, ekkor az L_C-k lezsnek az algebrai csomók. megmozgatjuk kicsit, $f=\delta$-t elmetszük a golyóval egy sima 2-sokaság lesz $\{f=\delta\}\cap B^4_\epsilon = F_{\epsilon,\delta}$. Mivel a peremre transzverzálisak vagyunk, az Ehresmann tétel miatt ennek is a pereme L_C lesz. Sőt! $f^{-1}(S^1_\delta)\cap B^4_\epsilon$ egy fibrálás S^1_δ felett, a fibrumok felületek a csomón. Ebből megkérdezhetjük, hogy $m_{geom}: F_{\epsilon,\delta}\to F_{\epsilon,\delta}$ hogyan is néz ki.

Ez az $F_{\epsilon,\delta}$ körök csokrával homotopikusan ekvivalens, az első homológia rangja μ leírja őt teljesen. Meg szeretnénk érteni a geometriai monodrómia hatását ezen a homológián. Ez a H_0án identitás lesz persze, a H_1-en érdekel minket. Ez egy h_1 lineáris operátor lesz, a legegyszerűbb invariáns amit hozzá tudnánk rendelni az például a karakterisztikus polinomja. Múlt szemeszterben megjegyeztük, hogy ez pont az Alexander polinm lesz.

Á Campo formula

f izolált szinguláris csira. Vegyük a beágyazott rezolúcióját, $E_v \approx CP^1, m_v, e_v$, ehhez a $\Gamma(C^2,f)$ gráf. $m: X\to X$ indukál $h_q: H_q(X)\to H_q(X)$-hez az Euler karakterisztikából kapunk egy $\zeta_m(t)=\prod_q \det((1-th_q))^{(-1)^q}$ függvényt. Mostmár megadhatjuk a formulát.

$$\chi(F)=\sum_v m_v\chi(E_v^\circ)=\sum_v m_v(2-K_v)$$

Legyen E_v° a megfelelő divizor reguláris része (vagyis kidobjuk belőle a metsző részeket, és a strict transformokat). Mostmár kapunk egy multiplicitás rétegszámú fedést a mellettelevő fibrumokkal.

Itt K_v az E_v-re támaszkodó élek/nyilak száma. Hasonlóan $\zeta_m(t)=\prod_v(1-t^{m_v})^{2-K_v}$, így az előzővel összekapcsolva $\zeta(t)=\frac{1-t}{\Delta(t)}$, ahol a nevező az Alexander polinom. Látjuk továbbá, hogy minden gyök, s így minden sajátérték egységgyök kell hogy legyen.

Fix pontok

Ha h egy endomorfizmus V-n, tekinthetjük a karakterisztikus polinomját, $1-a_1t+a_2t^2\mp\ldots$, az első együttható pont a trace, a második $\sum\lambda_i\lambda_j$ $i\neq j$-re. $a_1^2=$

$a_2 + tr(h^2)$ fog kiderülni, vagyis $tr(h)^2 - tr(h^2)$, s így folytathatjuk, $\det(1 - th) = \exp(-\sum_{k\geq 1} tr(h^k)\frac{t^k}{k})$ lesz a formula.

Az analógiát folytatva ha X-en hat valami monodrómia, ehhez legyárthatjuk a megfelelő ζ_m függvén a homológián indukált leképezésekből, és ehhez $\Lambda(m_*) := \sum_q (-1)^q Tr(h_q)$ a tracek gradált összege (ezt hívjuk Lefschetz számnak), összetéve $\zeta(t) = \exp(-\sum \Lambda(h^k)t^k)/k)$.

Ha nincsen fixpont, ez a Lefschetz szám 0. Ez az invariáns valójában $X \times X$-ben számolja a grafikon, és az átló metszésszámát számolja homologikusan. Vigyázat továbbá, a metszésszám lehet nulla, és mégis lesz fixpont.

> 💡 (Kobayashi) X kompakt Riemann sokaság, és m egy izometria önmagára, akkor $\Lambda(m) = \chi(Fix(m))$.

Ezt alkalmazva $\Lambda(m^k) = \sum_{v:m_v|k} m_v \chi(E_v^\circ)$ alakban kapjuk egy monodrómiához a Lefschetz számot.

> 💡 Ha f multiplicitása legalább 2, akkor emiatt kapjuk, hogy minden $m_v \geq 2$ kell hogy legyen. Továbbá következik, hogy ebben az esetben $\Lambda(m) = 0$.

A természetesen adódó kérdésre Le Dung Trang adott választ, létezik $m : F \to F$, amire $Fix(m) = \emptyset$.

$\{f = 0\} \subset C^2$, vesszük hozzá a félcsoportját $\mathcal{S} = \{(f,g)_0 : g : C^2 \to C\} \cup \{0\}$
.

Tétel: $\sum_{s\in\mathcal{S}} t^s = \zeta(t)^{-1}$

10.

Félcsoport

$f : (C^2, 0) \to (C, 0)$ irreducibilis izolált szingularitás. $\mathcal{S}_f = \{i(f,g)_0, g \in \mathcal{O}_{C^2,0}\} \subset N \cup \infty$. A (lokális) reguláris függvények metszetmultiplicitása f-el. Ha a metszet csak az origóból áll, akkor ez a metszetmultiplicitás véges lesz a nullstellensatz miatt.

Példák. $f = x^2 + y^3$, $i(f,x)_0 = 3, i(f,y)_0 = 2, i(f,xy)_0 = 2+3$. Ennek a konkrét példának a félcsoportja $N \setminus 1$, mert nem tudjuk az x-et és az y-t is kigenerálni.

> Azért lesz ez félcsoport, meg a múlt szemeszterben láttuk, hogy $i(f, g_1 g_2)_0 = i(f,g_1)_0 + i(f,g_2)_0$, sőt monoid, mert az 1 is benne van, hiszen $i(f,1) = 0$.

$\mathcal{O}_f$ a lokális gyűrű, az $\mathcal{S}_f$ félcsoport ennek (mint multiplikatív félcsoportnak) egy lebutított verziója.

Újraértelmezés

$i(f,g)_0 = ?$ perturbáljuk meg az egyik függvényt g_t-ként valamilyen monomokkal $g + th_1 + t^2h_2 + \ldots$, kicseréljük $\{g_t = 0\}$-ra a $\{g = 0\}$-t. Igazából bőven elég $g - t$-t venni. Generikusan kapunk valahány darab metszéspontot, mert transzverzális lesz a két függvény. Létezik egy B_ϵ golyó, hogy $\forall |t| << \epsilon$-ra $\# B_\epsilon \cap \{f = 0\} \cap \{g_t = 0\} = i(f,g)_0$. Perturbálhatnánk akár mindkét függvényt, ugyanazt kapjuk.

> $(f,g) : C^2, 0 \to C^2, 0$ lokálisan, s csak az origóban metszenek a nullhelyeik. A C^2 egységgömbjéből mehetünk a céltér egységgömbjébe átosztva a normával mivel mindkét függvény csak az origóban nulla, az pedig nem része a kiinduálsi gömbünknek. Állítás, hogy $deg((f,g)) = i(f,g)_0$. Egy kis perturbáció után a homologikus fok megmarad, a transzverz metszéspontok pedig mind $+1$ fokúak lesznek.

Emlék: $\{f = 0\} \cap S^3_\epsilon = K_f$ a szingularitás csomója, hasonlóan megkaphatjuk a g csomóját is. Ezeknek van egy hurkolódási számuk, $lk(K_f, K_g)$, és ez is megegyezik a metszésszámmal.

A hurkolódási szám hártyák metszéspontjával való deiníciójából kapjuk, hogy mivel $\{f_t = 0\}$ és $\{g_t = 0\}$ két hártya a megfelelő csomókon (a Milnor fibrum), egyszeres metszésekkel, és kis perturbációval a hurkolódási szám nem változik, látjuk, hogy valóban megegyezik ez a szám a metszetmultiplicitással.

Újraértelmezés

$f : C^2, 0 \to C, 0$ rögzített. Volt már, hogy lehet minden görbét paraméterezni. $f(x(t), y(t)) \equiv 0$. Ha $n_f : C \to \{f = 0\}$ a paraméterezés, a $t \mapsto g(n_f(t))$ egy

$C \to C$ leképezés, felíjuk a hatványsorát, a rendje $n_f^* g$-nek is az $i(f,g)_0$ metszésszám lesz, s a félcsoport is ezen visszahúzott függvények rendjeiből fog állni.

Újraértelmezés

$f = 0$ rezolúciójával való kapcsolat. Feloldjuk a szingularitást, kapjuk a gráfot, a negatív definit metszetmátrixot stb. Visszahúzhatjuk a g tetszőleges üggvényt is, és kapunk egy nyilat valahol a rezolúcióban. Ekkor $(str(g), Div(f)) = i(f,g)_0$, ha fent metszük el ugyanazt kapjuk, mintha lent. Ez azért van, mert az könnyebben látszik, hogy $(Div(f), Div(g)) = i(f,g)_0$, mert a nullán kívül izomrfan jön fel a függévny, kis perturbálással csak a metszetpontokat látjuk a nullán kívül, majd felhasználjuk, hogy $(E_v, Div(f)) = 0$, csak a strict transform marad.

A visszahúzott függvényt, a strict transformot könnyű paraméterezni, egy adott divizoron mindig $\alpha = t, \beta = 0$ alakú lesz, majd ezt előrelökhetjük a rezolúció vetítésével, az előrelökésnél $\phi^* f$ multiplicitásaként hatványozódik a megfelelő koorináta, ami pedig pont a rend definícióját adja. Ha a g-nek nem rezolúciója még a mi X-ünk, akkor lokálisan el kell metszeni, és a komponensekre ezeket összeadni.

Rögzítjük f-et, irreducibilis legyen, a rezolúciója X. $\phi^* f$ a p pont egy környezetében $\beta\alpha^{m_v}$ alakú, ugyanezen pontban veszünk egy $\alpha^c + \beta$ alakú görbét a rezolúcióban, ezt előrelökhetjük, és kapunk egy görbét (csak mert C^2 sima, amúgy nem biztos, hogy egy egyenlet vágja ki!). $i(f,g)_0 = i_p(\phi^* f, st(g)) = i_p(\beta\alpha^{m_v}, \alpha^c + \beta) = i_p(\beta, \alpha^c + \beta) + m_v i_p(\alpha, \alpha^c + \beta)$, és kapunk $c + m_v$-t. Következik, hogy egy idő után minden természetes szám benne van a félcsoportban, azonban m_v általában nem minimális ehhez!

Állítás: $m_v(f) + Z_{\geq 0} \subset \mathcal{S}_f$

Következmény: $\#\{Z_{\geq 0} \setminus S_f\} < \infty$, ezt a számosságot hívjuk $\delta(f)$-nek.

Definíció: A $min\{c \in \mathcal{S}_f : c + Z_{\geq 0} \subset \mathcal{S}_f\}$ számot *konduktor*nak nevezzük. Általában $m_v(f) > c$

A delta invariáns mindig csökken rezolúciónál ha a multiplicitás nem 1, ezzel lehet belátni, hogy a rezolúció tényleg véges sok lépés után kisimul.

Delta invariáns másképp

$n_f : C_t, 0 \to \{f = 0\}$, megnézhetjük $n_f^*(O_{C^2,0})$-t, ezzel $n_f^*(O_C) \hookrightarrow C\{t\}$ beágyazást kapunk, a kép kodimenziója is a delta invariáns.

$F \to S^2 \setminus K_f \to S^1$ a csomó, felírtuk hozzá a zeta függvényt. Állítás, hogy $\sum_{\mathcal{S}} t^s = \zeta_f^{-1}(t)$.

A félcsoport tulajdonságai miatt tudjuk, hogy ez a hatványsor $p(t) + \sum_N^\infty t^s$ alakú, vagyis $Q(t)/(1-t)$ alakú lesz a zeta függvény.

11.

X sima d dimenziós algebrai/holomorf, Ω_X^d a top differenciálformák vonalnyalábja $\Omega_X^d(U)\{f(x_i)dx_1 \wedge ... \wedge dx_d | f \in O_X(U)\}$a hol U nyílt, $O_X(U)$ a struktúrakéve rajta, a reguláris/hlomorf függvények rajta.

d=1 esetben a függvények a koordinátaáttéréssel prekomponálva ragad. $x = \phi(x')$, akkor $f(x) = f(\phi(x'))$, a differenciálformák azonban a Jakobi mátrixszal ragadnak, $\omega = f(x)dx = f(\phi(x'))(d\phi/dx)dx'$.

Kétváltozóban ha $x = \phi(x', y'), y = \psi(x', y')$ a koordinátaáttérés, akkor $dx \wedge dy = d\phi \wedge d\psi$, és tovább $(\partial\phi/\partial x' dx' + \partial\phi/\partial y' dy') \wedge (\partial\psi/\partial x' dx' + \partial\psi/\partial y' dy')$, és egyszerűsítve, hiszen a keresztben vett differenciálok nullák $(\partial\phi/\partial x' \partial\psi/\partial y' - \partial\phi/\partial y' \partial\phi/\partial x')dx' \wedge dy'$, itt is a Jakobi determinánssal kell szorozni, ezzel összeragad a top diferenciálformák tere egy vonalnyalábbá X felett.

Ezt a nyalábot jellemezhetjük a szelései által megadott divizorokkal, bármely kettő ilyen lineárisan ekvivalens lesz, a múltkor nézegettük, hogy a Picard csoport izomorf a CaDiv/Princ csoporttal. Egy ilyen reprezentánst nevezzünk K_X-nek.

A Picard csoportból létezik egy leképezés $H^2(X; Z)$-be, ami a Chern osztályt rendeli hozzá, sőt egy csoporthomomorfizmus.

Ha X projektív, ergo zárt sokaság, akkor a H^2-je egy Z, kiértékelhetjük a fundamentális osztályon, és kapunk egy számot.

Meg szeretnénk érteni ezt a K_X-et, előbb a topologikus osztályát adjuk meg a Chern osztállyal.

Ha X izolált felület szingularitás, akkor $X \setminus 0$ sima, nem világos hogy az itt kapott nyalábstruktúra hogy terjedne ki a nulla fölé. Legyen $\tilde{X} \xrightarrow{\phi} X$ egy rezolúció, tehát sima, $\phi^{-1}(0) = \cup E_i$, ezek projektív irreducibilis görbék, és minden máshol izomorfan vetül. Mostmár tekinthetjük $\Omega_{\tilde{X}}^2$-t, ezt megszorítva a kivételes divizorra információt kapunk a szinguláris helyről.

Meg akarjuk érteni tehát $Pic(\tilde{X})$-t. Felületi szingularitás lokálisan kúp, felemelve a vektormezőt ami befolyatja a rossz pontba, kapjuk hogy $\tilde{X} \sim E$, tehát a homológiák megegyeznek, E pedig transzverzális diszkrét pontokban metsző Riemann felületekből áll, Mayer-Vietorisból kapjuk hogy $H^2(\tilde{X}; Z) = Z^v$, ahol $E = E_1 \cup$

$\ldots \cup E_v$. Eszerint ha van egy nyalábunk, ezt megszorítva az E_i-kre kiszámolhatjuk az első Chern osztályt az Euler osztállyal.

Emlék: a két bilineáris függvény $L, (.)$ az abszolút homológián a metszetekkel, illetve az L',, ami a relatív homológiákon amit pont a kohomologikus metszést adja vissza.

$c_1(\Omega^2_{\tilde{X}})$ tehát mond nekünk valamit, mert a divizorát megtalálni, az analitikus/algebrai osztályozáshoz nem annyira reális.

Példa: Egy blowup (CP^1), -2es önmetszéssel. u, α és v, β a két térkép. $\alpha = \beta^{-1}$ a bázis ragasztása, a projektív tér standard koordinátázásával. $u = \beta^2 v$ a fibrumban, hogy pont a -2es Euler számot kapjuk. Összeroppantjuk a bázist, ezzel megadjuk X-et (kicsit visszafelé indultunk el, előbb a felfújás, utána a szingularitás amit felfújtunk). $x = \alpha^2 u, y = \alpha u, z = u$ három függvény az egyik térképen, $x = v, y = \beta v, z = \beta^2 v$ a másikon, ezek összeragadnak egy globális függvénnyé $\xrightarrow{\phi} X \subset C^3$, továbbá a kivételes divizort látványosan összeroppantja.

HF: A többi helyen izomorfan képződik.

A kép egyenlete az $xz = y^2$, ez segít a háziban is. Például $dx \wedge dz$ megszorításának a felemeltjének sima helyen is lesz szingularitása. $d(\alpha^2 u) \wedge du = 2\alpha u d\alpha \wedge du$ az egyik térképen, a divizora az $\alpha = 0$, illetve az $u = 0$ persze. A másik térképen $dv \wedge d(\beta^2 v) = 2\beta v dv \wedge d\beta$, tehát hasonlóképpen itt is a nulla feletti fibrum, és a kivételes divizor a nullás, összességében $div \phi^*(dx \wedge dz) = D_1 + D_2 + CP^1$, észrevesszük, hogy ez pont $div\ y$, tehát ez a divizor nulla. Következésképpen $\Omega^2_{\tilde{X}} = O_{\tilde{X}}$.

Példa: $f(x, y, z) = 0 \subset C^3$ egy izolált szinguláris hiperfelület.

Állítás: $X \setminus 0$ felett az $\Omega^2_{X \setminus 0}$ nyaláb analitikusan triviális.

> Meg kell adnunk egy globális differenciálformát, ami sehol sem tűnik el, és pólusa sincs, ergo egy nem nulla szelést. Vesszük a $(dx \wedge dy)/\partial_z f$ differenciálformát, és a másik két ciklikus permutáltját a koordinátákban, állítás hogy ezek megszorítva X-re összeragadnak. $f|_X = 0$, akkor $df|_X$ is nulla, ebből $\partial_x f dx + \partial_y f dy + \partial_z f dz = 0$, összeszorozzuk mondjuk dz-vel, kapjuk hogy $\partial_x f dx \wedge dz + \partial_y f dy \wedge dz = 0$, ez mutatja hogy az imént megadott differenciálformák valóban összeragadnak X-en és készen vagyunk.
>
> Ezt a formát nevezzük a hiperfelület Gorenstein formájának.

Példa: $x^d + y^d + z^d = 0$, ha $d = 2$ ez pont az előbbi alak, báziscserével $y^2 = xz$-re hozható. A Gorenstein úgy néz ki, hogy $(dx \wedge dy)/(dz^{d-1})|_X = \ldots$, kellene a rezolúció. Ez nem nehéz, az origóban van szingularitásunk, és mivel homogén a polinom a teljes egyeneseket bele kell venni, ez pont a CP^2 tautologikus nyalábja lesz. A szokásos koordinátázással $x = \alpha\beta, y = \alpha\gamma, z = \alpha$, a kivételes divizor ezen a térképen $\alpha = 0$, a teljes kivételes divizor persze pont a komplex projektív sík lesz. A függvény visszahúzása pont a projektivizálása lesz, $\tilde{X}$ a tautologikus nyaláb erre való megszorítása lesz. A génusza mint projektív görbe $(d-1)(d-2)/2$, önmetszése $-d$, a multiplicitásrendszerből amit a görbékhez tanultunk kiszámolható.

Visszahúzzuk a függvényt, $(\alpha\beta)^d + (\alpha\gamma)^d + \alpha^d = 0 = \alpha^d(\beta^d + \gamma^d + 1)$. Megjelenik dE és a strict transzform, azon görbe felett triviális a nyaláb. $\phi^*\omega_G = dz \wedge dx/dy^{d-1} = d\alpha \wedge d(\alpha\beta)/(d\alpha^{d-1}\gamma^{d-1}) = \alpha d\alpha \wedge d\beta/(d\alpha^{d-1}\gamma^{d-1}) = 1/(d\gamma^{d-a})d\alpha \wedge d\beta/\alpha^{d-2}$, ebből látjuk hogy $div\ \phi^*\omega_G = -(d-2)E$, ez nem tud globális függvény nullhelye lenni, ahhoz tartozna fibrumirány is, egy nyíl.

Definíció: $\Omega^2_{\tilde{X}}(\tilde{X} \setminus E)$ az $\tilde{X} \setminus E$-n értelmezett globális differenciálformák, aminek ezen a komplementumon csak nullása lehet (pólus csak E-ben engedtetik meg). Képezzük a faktort $\Omega^2_{\tilde{X}}(\tilde{X})$-el, e zegy véges dimenziós vektortér, és ennek a dimenzióját hívjuk geometriai génusznak, $p_g(X, 0)$-vel betűzzük. (tétel hogy ez független a rezolúció választásától.

Valami hermitikus metrikát választva értelmezhetünk L^2 differenciálformákat $X \setminus 0$-n, és pont ezek lesznek azok, amik kiterjednek sima módon a rezolúcióra való felhúzás után, így lehet látni a függetlenséget.