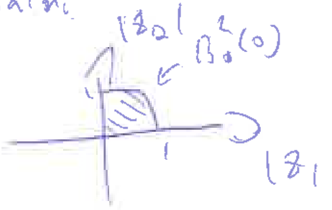
gömb: $B_1^n(0) \subset \mathbb{C}^n$

policilinder: $D_1^n(0) \subset \mathbb{C}^n$

↑ körlapok szorzata

hatvány sorok többféle helyen tudnak konvergálni

$n=2$

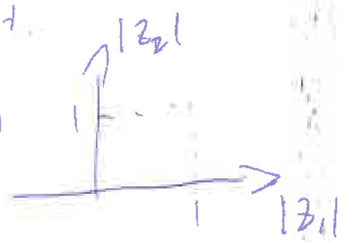


ha $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, és $(z_1, z_2) \in B_1^2(0)$

ekkor $(\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2) \in B_1^2(0)$, tehát

a csak hosszokból álló ábra leírja a halmazt.

$D^2_{(1,1)}(0)$



ez itt is teljesül. (0-középpontú)

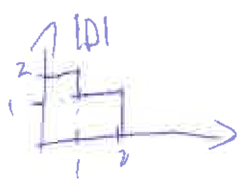
Def.: $D \subset \mathbb{C}^n$ tartomány Reinhardt tartomány, ha $(z_1, \dots, z_n) \in D$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$

$|\lambda_j| = 1 \Rightarrow (\lambda_1 z_1, \dots, \lambda_n z_n) \in D$

$|D| := \{(|z_1|, \dots, |z_n|) \mid (z_1, \dots, z_n) \in D\}$

↑ D Reinhardt diagramja.

Példa: $D = D^2_{(1,2)}(0) \cup D^2_{(2,1)}(0)$

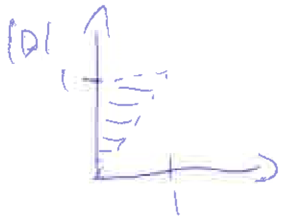


tetsz. sok policilinder is Reinhardt

Def.: (Hartogs háromszög)

$D = \{(z,w) \mid |z| < |w| < 1\}$, ez is Reinhardt

$\cap$ $\mathbb{C}^2$



Feladat: bbh D biholomorf $\{z : |z| < 1\} \times \{w : 0 < |w| < 1\}$-vel.

emlékeztető: $n=1$ Cauchy-integrálformula

Van egy Jordan görbék γ, f folytonos $\gamma \cup \operatorname{int}\gamma$-n, és $\operatorname{int}\gamma$-n holomorf $\Rightarrow$

$$\forall z \; f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

$\frac{1}{\zeta - z}$ — holomorf z-ben, — független γ-tól.

na $n > 1$-re ilyen nincs!

Áll. (Cauchy formula policilinderen)

$D \subset \mathbb{C}^n$ tart., $f \in \mathcal{O}(D)$

$\overline{D}_{(r_1, \dots, r_n)}(a) \subset D \Rightarrow$

ekkor $$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{|\zeta_1 - a_1| = r_1} \dots \int_{|\zeta_n - a_n| = r_n} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)}\, d\zeta_n \dots d\zeta_1$$

$z \in D_{(r_1, \dots, r_n)}(a)$-ra

Biz.: $n=2$, $a=0$ z_2 fix paraméter, ez z_1-ben holomorf.

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1| = r_1} \frac{f(\zeta_1, z_2)}{\zeta_1 - z_1}\, d\zeta_1 =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1| = r_1} \frac{1}{\zeta_1 - z_1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_2| = r_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_2 - z_2}\, d\zeta_2 \right) d\zeta_1$$

□

Megj.: elég, hogy f folytonos és parciálisan holomorf

Köv.: $D \subset \mathbb{C}^n$ tart., f folyt. D-ben, és parciálisan holomorf $\Rightarrow f \in C^\infty(D)$, és f holomorf

Biz.: feltevésből következően $\forall$ D-beli policilinderre igaz a Cauchy formula. Ebből a Leibniz-tétel szerint $f \in C^\infty$, kiszedve az integrandus simán függ z_i-től

$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = 0$, mert bederiválunk $\Rightarrow$ komplex diffható $\square$

Köv.: $f \in \mathcal{O}(D)$, akkor $\exists\ \frac{\partial f}{\partial z_i} \in \mathcal{O}(D)$

Biz.: $\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y_j} \in C^\infty(D)$, a holomorfsághoz kell, hogy $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\left(\frac{\partial f}{\partial z_k}\right) = 0$.

$$\text{Young-tétel} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z_k}\Bigg(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}}_{=0 \text{ mert } f \in \mathcal{O}(D)}\Bigg) = 0 \quad \square$$

Def.: $k_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k = (k_1, \dots, k_n)$, $|k| = \sum k_j$

$$\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k} = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}}, \quad x^k = \prod x_i^{k_i}, \quad k! = \prod k_i!$$

Köv.: $f \in \mathcal{O}(\bar{D}_r(a)) \Rightarrow$

1) $\forall z \in D_r(a)$ $f(z) = \sum_k c_k (z-a)^k$, ahol

$$c_k = \frac{1}{k!}\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\times\{|\xi_i - a_i| = r_i\}} \frac{f(\xi)}{\prod(\xi_i - a_i)^{k_i+1}}\, d\xi$$

2) ez a hatványsor $\forall$ kompakton egyenletesen konvergens $D_r(a)$-ban.

Biz.: $n=2$, $a=0$, $(z_1, z_2) \in D_r^2(0)$

$$f(z_1,z_2) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{|\xi_1|=r} \int_{|\xi_2|=r} \frac{f(\xi_1,\xi_2)}{(\xi_1 - z_1)(\xi_2 - z_2)}\, d\xi_2\, d\xi_1$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma \frac{f(\xi_1,\xi_2)}{(\xi_1 - z_1)(\xi_2 - z_2)}\, d\xi$$

Innen u.a. mint egyváltozóban, kiemelés + mértani sor

$$\frac{1}{\xi_1 - z_1} = \frac{1}{\xi_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_1}{\xi_1}} = \sum_0^\infty \frac{z_1^k}{\xi_1^{k+1}}, \text{ mivel}$$

$|\xi_1| = r_1$ a sorok abszolút és egyenletesen is konvergens, kiszorozzuk a tagokat, és kicseréljük az összegzést az integrállal $\Rightarrow$

$$f(z_1,z_2) = \sum_{k,l=0}^\infty \Bigg(\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma \frac{f(\xi_1,\xi_2)}{\xi_1^{k+1}\xi_2^{l+1}}\, d\xi}_{\text{integrálformula szerint ez pont a jó } c_{(k,l)}}\Bigg) z_1^k z_2^l$$

egyenletes konvergencia megoldható.

Köv. (Cauchy-becslés) $f \in \mathcal{O}(\bar{D}_r(a))$, $M = \max_{\xi \in \Gamma} |f(\xi)| \Rightarrow |c_k| \le \frac{M}{r^k} = \frac{M}{r_1^{k_1} r_2^{k_2} \dots r_n^{k_n}}$

Biz.: triv.

Megj.: Unicitás tétel nincs !!

$f(z_1, z_2) = z_1$:'(

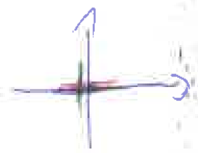
tétel; $D \subset \mathbb{C}^n$ tart., $f, g \in \mathcal{O}(D)$, ha $\exists U \subset D$ nyílt: $f|_U = g|_U \Rightarrow f = g$.

Biz.: $\left\{ z \in D \;\middle|\; \frac{\partial^{|k|} f-g}{\partial z^k} = 0, \forall k \in \mathbb{N}^n \right\} \supset U$

ez egy nyílt halmaz a sorbafejtési tétel ~~...~~ miatt, nem üres mert U benne van. $f-g$ holomorfsága miatt ez a halmaz zárt is D-ben. □

Áll. (maximum elv): $D \subset \mathbb{C}^n$ tart., $f \in \mathcal{O}(D)$ $a \in D$-ben $|f|$-nek lok. max.-a van $\Rightarrow f \equiv$ konst.

Biz.: $n=2, a=0$



$f(z,0)$-nak lok max, ezért kis körny-ben konstans, a másik irányban is $\Rightarrow$ unicitás. □

Áll. (Liouville): $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ korlátos $\Rightarrow f \equiv c$.

Biz.: vetítsük f-et egy koordinátára, itt az 1-dim tétel miatt állandó, stb. □

Áll. (Weierstraß): $f_j \in \mathcal{O}(D)$, $D \subset \mathbb{C}^n$ tart. $f_j \to f$ lok.e. $\Rightarrow f \in \mathcal{O}(D)$, és a deriváltak is lok. e. konvergálnak.

Biz.: $f_j \to f$ lok.e. $\Rightarrow f \in C^0(D)$

1-változós Weierstraß miatt f parc. holomorf $\Rightarrow f$ holomorf.

elég, hogy $\frac{\partial f_j}{\partial z_k} \to \frac{\partial f}{\partial z_k}$ lok.e. □

tétel: $f \in C(\Gamma)$, Γ a $D^n_r(a)$ policilinder váza $\Rightarrow$ ebből a Cauchy formula gyárt egy holomorf F-et $D^n_r(a)$-n.

Biz.: □

megj.: $n=1$

$n=2$ $D^2_{(1,1)}(0,0)$, $f \in C^0(\Gamma)$ holomorf lesz

$\Omega_1 = D^2_{(1,1)}(0,0)$, $\Omega_2 = \{(z_1,z_2) : |z_1|<1, |z_2|>1\}$

$\Omega_3 = \{(z_1,z_2) \mid |z_1|>1, |z_2|<1\}$

$\Omega_4 = \{(z_1,z_2) \mid |z_1|>1, |z_2|>1\}$

Feladat: $f \equiv 1$, mi lesz a fenti 4 tartományon F? $1, 0, 0, 1$ ...

Analitikus folytathatóság

$\frac{1}{z-c}$ nem terjed ki

további: $D = \{z : |z|<1\}$, akkor $f(z) = z + z^2 + z^4 + z^8 + \ldots$ nem terjed ki az egységkörvonal egyetlen pontjára sem! 2^k. egység. gyök + lok. ...

Feladat: ezt lássuk be!

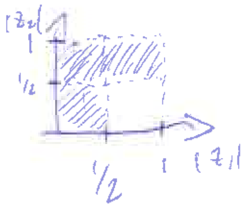
geometriai módon Jordan görbe C^∞, de sehol sem valós analitikus. Ennek a belsejére képezzük az egységkört konformon. A C^∞ Carathéodory tétel kiterjeszti a határra, de ennél tovább nem terjedhet (analitikusan paraméterezhető a görbe)

$n \geq 1$: Hartogs alakzat

$H = \{(z_1,z_2) \mid |z_1| < \frac{1}{2}, |z_2| < 1\} \cup \{(z_1,z_2) \mid \frac{1}{2} < |z_2| < 1, |z_1| < 1\}$

$D_{\frac{1}{2},1}(0)$

Ez egy Reinhardt tartomány.



Tétel (Hartogs): $f \in \mathcal{O}(H) \Rightarrow f$ holomorfan kiterjed $D_{1,1}(0)$-ra.

Biz.: legyen $\frac{1}{2} < \delta < 1$; $\{(z_1, z_2) \mid |z_1| = |z_2| = \delta\}$

Γ $\quad$ H

és ez a $D_{\delta,\delta}(0)$ cilinder váza, Γ

f folytonos Γ-n, és a Cauchy integrál-formula definiál egy folyt. fv-t $D_{\delta,\delta}(0)$-n:

$$F(z_1, z_2) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{|z_1|=\delta} \int\limits_{|z_2|=\delta} \frac{f(\zeta_1,\zeta_2)}{(z_1-\zeta_1)(z_2-\zeta_2)} \, d\zeta_2 \, d\zeta_1,$$

sőt, holomorf is lesz. Állítjuk, hogy $\delta < \delta'$-re a δ'-höz tartozó F kiterjeszti a kisebbet.

Legyen $|z| < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < |w| < \delta$, ekkor $F =$

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta_1|=\delta} \frac{1}{\zeta_1 - z} \underbrace{\int\limits_{|\zeta_2|=\delta} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_2 - w} \, d\zeta_2}_{f(\zeta_1, w)} \, d\zeta_1}_{f(z,w)}$$

tehát az $\underbrace{|z| < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < |w| < \delta}_{U}$ tartományon minden δ-ra ugyanazt állítja elő az integrál, az unicitás tétel értelmében készen vagyunk, hisz az U nyílt része H-nak $\overset{\vee}{\text{és}}$ $D_{\delta,\delta}(0)$-nak $\square$

interpoláció

ha $z_n \in \mathbb{C}$ nem torlódik, különbözőek, és w_n tetszőleges $\Rightarrow \exists f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) : f(z_n) = w_n$

$n = 2$-re $\Omega = H$, $P_n = (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}) \in H$, $w_n = (-1)^n$-választással nincs interpolációs megoldás
($\mathbb{C}$-ben ha a határérték torlódunk mindig van).

Tétel (Hartogs): $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ korlátos, $\partial\Omega$ öf, f holomorf $\partial\Omega$ egy környezetében, akkor f holomorfan kiterjed Ω-ra.

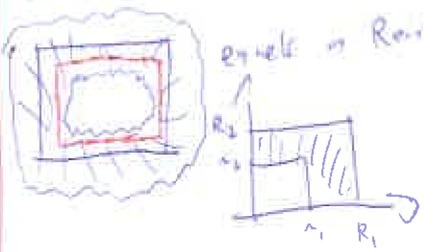
megj.: fontos hogy $\partial\Omega$ öf

Feladat: ellenpélda

Biz (spec. eset): 2-dim bicilinderre.

elég belátni, hogy $0 < r_1 < R_1$ esetén, ha $0 < r_2 < R_2$

$f \in \mathcal{O}(D_{R_1,R_2}(0) \setminus \overline{D_{r_1,r_2}(0)}) \Rightarrow f$ kiterjed



előzőhöz hasonlóan vesszük $r_1 < \delta_1 < R_1$-t, és $r_2 < \delta_2 < R_2$

Cauchy integrálunk, és unicitás tétel. $\square$

Köv.: $n > 1 \Rightarrow$ az izolált szingularitások mind megszüntethetőek ($\frac{1}{z} : 0$)

Köv.: $n > 1$, $\underset{a}{\Omega} \in \mathbb{C}^n$, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$

$\{z \in \Omega : f(z) = f(a)\}$-nak nincs izolált pontja
ha $\exists$ ilyen lenne, akkor $\frac{1}{f(z) - f(a)}$ betejedne ζ-ban

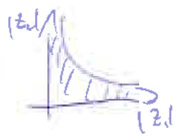
Hatványsorok

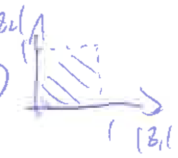
$n=1$-re  ; $\not\subset$

$D_r(a)$; $\subset$

$n>1$-re gazdagabb:

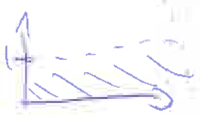
Példa: $\sum_{j=0}^{\infty}(z_1 z_2)^j$ ez ugye $|z_1 z_2|<1$-re

konvergens 

$\sum_{j,k=0} z_1^j z_2^k \to |z_1|<1, |z_2|<1 \Rightarrow$ 

$\sum_{j,k=0}^{\infty} z_1^j z_2^{k!} \to$ 

X tengely és $|z_2|$... lesz.

d) $\sum_{j,k=0} \frac{z_1^j}{j!} z_2^k \to$ 

elég a 0 kp-ú hatványsorokat nézni.

$\sum_{|\alpha|\geq 0} c_\alpha z^\alpha$, $B=\{z\in\mathbb{C}^n \mid \{c_\alpha z^\alpha\}$ korlátos$\}$

$C=\{z\in\mathbb{C}^n \mid \sum |c_\alpha z^\alpha|$ konvergens$\}$

tétel: $\mathrm{int}\,B=\mathrm{int}\,C$ *

def: $\mathrm{int}\,B$ a hatványsor konvergenciatartománya.

megj: 1 fv. (...) mindig a diagonálja

lemma (Abel): tfh $\exists \zeta\in\mathbb{C}^n$, hogy $\forall j$ $\zeta_j\neq 0$, és $\zeta\in B$, $r_j=|\zeta_j|$, akkor $D_r(0)\subset C$, sőt konvergens egyenletes

biz.: $n=2$; $0<\rho_j<r_j$, $c_{j,k} z^j w^k$ $(z,w)\in \overline{D}_{\rho_1\rho_2}(0)$

$= \left(\frac{z}{r_1}\right)^j \left(\frac{w}{r_2}\right)^k \underbrace{|c_{j,k} r_1^j r_2^k|}_{c_{j,k}\zeta_1^j\zeta_2^k} < \underbrace{\left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^j \cdot \left(\frac{\rho_2}{r_2}\right)^k \cdot M}$

egyenletesen korlátos összegzés után $\Rightarrow$ Weierstrass krit. ✓

***Biz.:** világos, hogy $C\subset B$, ezért $\mathrm{int}\,C\subset \mathrm{int}\,B$,

fordítva, ha $z\in \mathrm{int}\,B$, egy környezete B-ben választunk egy ζ-t, hogy $|z_i|<|\zeta_i|$ legyen, a lemma szerint $D_{|\zeta_1|,\dots,|\zeta_n|}(0)\subset C$, vagyis $z\in \mathrm{int}\,C$, hiszen ebben z is benne van. □

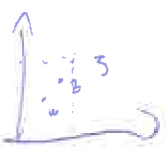
Def.: $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 0 közepű teljes Reinhardt tartomány, ha $\forall z\in\Omega$ és $\zeta_j\in\mathbb{C}: |\zeta_j|\leq 1$ $(\zeta_1 z_1,\dots,\zeta_n z_n)\in\Omega$.

megj.: Ω telj. Reinh. tart. $\Leftrightarrow (z\in\Omega;$ ha $|w_j|\leq|z_j|$ $\forall j \Rightarrow w\in\Omega)$

Áll.: Ω konvergenciatartomány $\Rightarrow$ tRt

Biz.: $z\in\Omega=\mathrm{int}\,C=\mathrm{int}\,B$

$|w_j|<|z_j|$ $\forall j$. z-től kicsit kijjebb lépünk megint, az ekkora polidiszkben w is benne lesz. □



Áll.: Ω teljes Rt $\Rightarrow$ 0-közepű policilinderek uniója.

Def.: Ω tRt, $\log\Omega=\{(\log|z_1|,\dots,\log|z_n|) \mid z\in\Omega, z_i\neq 0\}$

ez nyílt része $\mathbb{R}^n$-nek.

tétel (Hartogs): Ω egy hatványsor konvergenciatartománya $\Rightarrow \log\Omega$ konvex. *

Áll.: Ω hatv. sor konvergencia tartománya
$\Rightarrow f(z)=\sum c_\alpha z^\alpha$ holomorf

Biz.: Ω nulla középpontú policilinderek uniója,

Abel lemma + Weierstrass tétel
($\forall$ kompaktban egyenletesen konvergens)

Áll.: Ω tRt, $f\in \mathcal{O}(\Omega)$, akkor

$f(z)=\sum c_\alpha z^\alpha \quad \forall z\in\Omega$

Biz.: 0-középpontú policilinderek $\cup$, D_β egy ilyen. Ezen $f|_{D_\beta}=\sum \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z}(0)\frac{1}{\alpha!}$, ez

csak a 0-beli deriválttól függ $\Rightarrow$ megegyezik $\forall D_\beta$-n.

*Biz.: $B=\{z\in\mathbb{C}^n \mid c_\alpha z^\alpha \text{ korl.}\}$
$C=\{z\in\mathbb{C}^n \mid \sum |c_\alpha z^\alpha| \text{ konvergens}\}$

$\Omega=\operatorname{int} B=\operatorname{int} C$

észrevétel, ha $0\le a, b\le M \Rightarrow 0\le a^t\cdot b^{1-t}\le M$

$z, w\in B$, $\exists M\ge 0$ amire $|c_\alpha z^\alpha|\le M$, $|c_\alpha w^\alpha|\le M$ $\forall\alpha$

$|c_\alpha|\,|z_1|^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot|z_n|^{\alpha_n}\le M$
$|c_\alpha|\,|w_1|^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot|w_n|^{\alpha_n}\le M$, észrevételből

$|c_\alpha|\,|z_1|^{\alpha_1 t}\cdot\ldots\cdot|z_n|^{\alpha_n t}\cdot|w_1|^{\alpha_1(1-t)}\cdot\ldots\cdot|w_n|^{\alpha_n(1-t)}\le M$

$|c_\alpha|\cdot\left(|z_1|^t|w_1|^{1-t}\right)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\left(|z_n|^t|w_n|^{1-t}\right)^{\alpha_n}\le M$

$\Rightarrow a_t = \left(|z_1|^t|w_1|^{1-t},\ldots,|z_n|^t|w_n|^{1-t}\right)\in B$

$\exists s>1$: $sz, sw\in\Omega=\operatorname{int}B \Rightarrow s\cdot a_t\in B$

$\Rightarrow$ Abel lemma $D_{s\cdot a_t}\subset C$
$a_t \in D_{s\cdot a_t} \subset \Omega$

$\Rightarrow \log a_t \in \log\Omega$

Köv.: Ω tRt, $f\in\mathcal{O}(\Omega)$, $\log\Omega$ nem konvex
$\Rightarrow f$ holomorfan kiterjed Ω log konvex burkára.
$\square$

Def.: $D\subset\mathbb{C}^n$ tartomány, $D\subset G\subset\mathbb{C}^n$ holomorf bővítése D-nek, ha $\forall f\in\mathcal{O}(D)\ \exists g\in\mathcal{O}(G)$: $g|_D=f$.

Áll.: G holomorf bővítése D-nek, $f\in\mathcal{O}(D)$, $F\in\mathcal{O}(G)$ a kiterjesztés, akkor $f(D)=F(G)$.

Biz.: Tfh $z_0\in G\setminus D$: $F(z_0)=\zeta_0$, ezt f nem veszi fel!

$\Downarrow$

$\frac{1}{f(z)-\zeta_0}$ holomorf D-n, vagyis kiterjed

G-re. $(F-\zeta_0)\cdot H\equiv 1$ D-n, ellentmondás, mert z_0-ban 0. $\square$

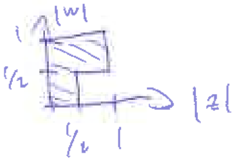
Köv.: D korlátos, G hol. bővítés $\Rightarrow G$ is.

Biz.: $f(z_1,\ldots,z_n)=z_1$, ennek a képe korlátos $\Rightarrow G$ is korlátos v.a. a korláttal.
$\square$

Megj.: $D\subset\mathbb{C}^n$ tart., akkor van legbővebb holomorf bővítés.

Példa: D policilinder $\Rightarrow$ önmaga max. kiterjesztése

Példa: Hartogs

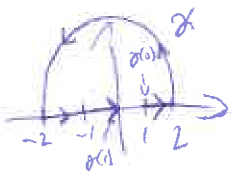


legyen $D = H \cup D_{\frac{1}{4},\frac{1}{4}}(1,0)$ ez nem ö.f.,

a betűjosítással látott, hogy van egyedük meg a határon.

konkrétan:

$D = H \cup D_{\frac{1}{4},\frac{1}{4}}(1,0) \cup W$, ahol W a



$W = \{(z_1, z_2) \mid d(z,\gamma) < \frac{1}{4}\}$

Feladat: D-nek nincs max holomorf bővítése

mint $\sqrt{z_1 - i}$

megj.: Riemann felület már van maximális

Def.: $D \subset \mathbb{C}^n$ tart. existencia tartomány, ha

$\exists f \in \mathcal{O}(D)$, és $\forall a \in D$, $d(a, \partial D) = r$

$\|z\| = \max(|z_i|)$ maxnorma

vagyis $D_{r,r,\dots,r}(a) \subset D$, hogy $f|_{D_r(a)}$ nem

terjed ki semmilyen nagyobb polidiszkre,

Def.: $\zeta \in \partial D$ sorompópont, ha $\forall K \subset D$ kompakt, $\varepsilon > 0$-ra $\exists f \in \mathcal{O}(D)$: $\sup_K |f| \leq 1$,

de $\exists z \in D: |z - \zeta| < \varepsilon$, de $|f(z)| > 1$

Áll.: $f \in \mathcal{O}(D)$, $\exists q_i \in D$, $q_i \to \zeta$, $f(q_i) \to \infty$

akkor ζ sorompó.

Biz.: K kompaktra $\frac{f}{\sup_K |f|} = g$ jó lesz. $\square$

Def.: akkor azt mondjuk, hogy f nem korlátos ζ-ban.

Tétel: $D \subset \mathbb{C}^n$ tart., $E \subset \partial D$, minden pontján sorompó

$\Rightarrow \exists f \in \mathcal{O}(D)$, ami E egy pontjában sem korlátos.

Biz.: $\tilde{E} \subset E$ megsz. sűrű részhalmaz, és

erre $\tilde{E} = \{e_1, e_2, \dots\}$, $\zeta = \{e_1, e_1, e_2, e_1, e_2, e_3, \dots\}$

és egy f, amire $f(z_i) \to \infty$, $d(z_i, \zeta_i) \to 0$

z_i

$K_1, K_2, \dots \subset D$ kompaktok, z_i pontok, és $f_i \in \mathcal{O}(D)$

hogy:

1) $K_1 \subset K_2 \subset \dots$, $\bigcup K_i = D$, $\forall K \subset D$ $\exists j: K \subset K_j$ kompakt z_a

2) $z_1, \dots, z_{j-1} \in K_j$

3) $\|f_j\|_{K_j} \leq 1$, $|f_j(z_j)| > 1$, $|z_j - \zeta_j| < \frac{1}{j}$

induktívan konstruáljuk: K_1-et választhatjuk

úgy, $|z_1 - \zeta_1| < 1$, $\varepsilon = 1$-hez választjuk f_1-et.

~~tfh~~ $j-1$-ig: $K_j = K_{j-1} \cup \{z_{j-1}\} \cup \{z \in D \mid d(z, \partial D) \leq \frac{1}{j}\}$,

$\cap \overline{B}_j(0)$ erre 1, 2 ✓

ζ_j sorompó, ehhez a K_j-hez, és $\varepsilon = \frac{1}{j}$-hez

vesszük az f_j-et és z_j-t. ✓

Legyen $P_i \in \mathbb{N}$. f-et $\sum \frac{f_j^{P_j}}{j^2}$ alakban

keressük. $\exists i_0: K \subset K_{i_0} \subset K_{i_0+1} \dots$ tetszőleges K

kompaktra, vagyis $z \in K$-ra $|f_i(z)| \leq 1$ $i > i_0$-ra,

konvergens majoráns van $\Rightarrow$ lok. e. konvergencia

vagyis f holomorf D-n. P_i választható úgy,

hogy $f(z_i) \to \infty$.

$f(z_j) = \sum_{i=1}^{j-1} + \frac{f^{P_j}(z_j)}{j^2} + \sum_{i \geq j+1}$

$$\frac{f_j(z_j)^{p_j}}{j^2} \leq |f(z_j)| + \sum_{i\leq j-1} 1\cdot 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$$

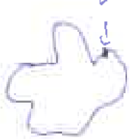
induktíve megválasztják ezt a becslést, a p_j-t, hogy $|f(z_j)| > j$ legyen, felhasználva hogy $|f_j(z_j)| > 1$. $\square$

Feladat: $\Omega = \mathbb{C}^3 \setminus \{(z_1, 0, 0) : z_1 \in \mathbb{C}\}$, bbh $\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$ kiterjed holomorfan $\mathbb{C}^3$-ra.

$\Omega = \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2$, bbh $\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$ kiterjed $\mathbb{C}^2$-re.

Megj.: nem triviális, hogy $\exists$ olyan f, ami szimultán nem korlátos $\forall$ határpontban

Köv.: $\Omega \subset \mathbb{C}$ tartomány $\Rightarrow \Omega$ egzisztencia-tartomány.



$\frac{1}{z-\zeta}$ mutatja, hogy $\forall$ határpont szorompópont $\mathbb{C}^1$-ben

láttuk, hogy biholomorfiára invariáns rögtön

$n=1$-re $\forall D \subset \mathbb{C}$ egzisztenciatart

$n>1$-re $\mathbb{B}_1^n(0) \subset \mathbb{C}^n$

$\|z\|^2 < 1$, $\sum z_i \bar{z}_i$, legyen $f(z) = \sum z_i \zeta_i = (z, \zeta)$

$|f(z)| \leq \|z\| \cdot \|\zeta\| < 1$ C.S.B. miatt

$\Rightarrow \frac{1}{1-f(z)}$ nem korl. ζ-ban $\Rightarrow$ ő szorompó.

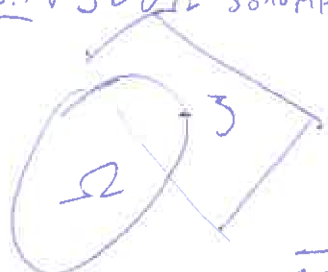
$\Rightarrow \mathbb{B}_1^n(0)$ egzisztenciatart, ~~[illegible]~~ $\exists f \in \mathcal{O}(\mathbb{B})$

ami ezt mutatja: $\mathbb{B}_1^n(0)$ TRT, vagyis

$\exists f = \sum c_k z^k$ konvergenciatart. pontosan $\mathbb{B}_1^n(0)$

Áll.: $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ konvex $\Rightarrow$ egzisztenciatart.

Biz.: $\forall \zeta \in \partial\Omega$ szorompó:



hip.sík egyik oldalán van Ω, normálvektora n, $\frac{1}{(n, \zeta - z)}$ megfelelő lesz,

nem 0 Ω-n, ζ-ban elszáll. ✓

$(n, \zeta - z)$

Megj.: konvexitás nem biholomorf invariáns

Holomorf konvexitás?

Valós konvex burok: ∩H félsík: $K \subset H \} = \mathrm{conv}(K)$

affin fv-ek: $\ell(x) = \sum a_j x_j + b$

másképp: $\{x \in \mathbb{R}^n : \forall \ell$ affin leképezésre $\ell(x) \leq \sup_{y\in K} \ell(y)\} = \mathrm{conv}(K)$

Tény: $D \subset \mathbb{R}^n$ tart. konvex $\Leftrightarrow \forall K \subset D$ kpkt $\mathrm{conv}(K) \subset D$

Def. (Cartan, Thullen '32): $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ tart, $K \subset \Omega$,

$\hat{K}^{\Omega} = \{z \in \Omega : |f(z)| \leq \sup_{w\in K} |f(w)|\ \forall f \in \mathcal{O}(\Omega)\}$ *

Megj.: 1) $\hat{K}^{\Omega}$ rel. zárt Ω-ban

2) $\hat{\hat{K}}^{\Omega\,\Omega} = \hat{K}^{\Omega}$

$\hat{K}^{\Omega}$ függ Ω-tól: $K = \{|z| = 1\}$, $\Omega = \mathbb{C}$-re

$\hat{K}^{\mathbb{C}} = \bar{D}_1(0)$, viszont ~~$K$~~ $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$-ra

$\hat{K}^{\Omega} = K$!!

Feladat: $\hat{K} \subset \mathrm{conv}(K)$

$\hat{K}^{\Omega}$ nem feltétlen kompakt, kompakt K esetén se:

Hartogs lesz Ω, $K = \{(\frac{3}{4}, w) \mid |w| = \frac{3}{4}\}$

$f \in \mathcal{O}(H)$ holomorfan kiterjed max. elvből $\{(\frac{3}{4}, w) \mid |w| \le \frac{3}{4}\} \cap H \subset \hat{K}^H$, sőt = vele ⟹ ez a $\hat{K}^H$ nem kompakt !!

* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ holomorfan konvex, ha $\forall K \subset \Omega$ kompaktra $\hat{K}^\Omega$ kompakt.

Ekvivalens def: Ω-ra $\exists K_1, \ldots \subset \Omega$ kpkt, $K_j = \hat{K}_j^\Omega$

$K_j \subset \operatorname{int} K_{j+1}$, $\bigcup K_j = \Omega$

Feladat: bb h ekvivalens

Feladat: F = véges, K kompakt $\widehat{F \cup K} = F \cup \hat{K}$

Tétel (Cartan–Thullen): Ω holomorfitási tartomány ⟹ Ω holomorfan konvex. *

Tétel: Ω holomorfan konvex ⟹ Ω egzisztenciatart. △

Def.: Ω nem holomorfitási tartomány pontosan akkor, ha $\exists \Omega_1$ tart, $\Omega_0 \subset \Omega_1 \cap \Omega$, nyílt, hogy

$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)\ \exists g \in \mathcal{O}(\Omega_1)$:

$f|_{\Omega_0} = g|_{\Omega_0}$

Lemma: $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ tart, $L \subset \Omega$ kompakt, $a \in \hat{L}^\Omega$, $d_\square(a, \partial\Omega) \ge \tilde{\rho}$

$d_\square(L, \partial\Omega) = \rho \Rightarrow \forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f|_{D_\rho(a)}$ holomorfan kiterjed $D_{\tilde\rho}(a)$-ra. *

* Biz.: Ω holom. tart., $K \subset \Omega$ kompakt, $\hat{K}^\Omega$ rel zárt. $a \in \hat{K}^\Omega$, $L = K$-val lemma $f|_{D_\rho(a)}$ kiterjed $D_{\tilde\rho}(a)$-ra, de ez nem lehet Ω_1 nagyobb benne van:

$\Rightarrow d_\square(a, \partial\Omega) \ge d_\square(K, \partial\Omega) > 0$ minden a-ra, vagyis $d_\square(\hat{K}^\Omega, \partial\Omega) \ge d_\square(K, \partial\Omega) > 0$, tehát el van határolva a határtól, koord. fvek miatt $\hat{K}$ mindig korlátos ⟹ $\hat{K}$ kompakt. □

Biz.: $K \subset \Omega$ kompakt, $\varepsilon > 0$, $\zeta \in \partial\Omega$

$\hat{K}^\Omega$ kompakt. $B_\varepsilon(\zeta) \setminus \hat{K}^\Omega \neq \emptyset$
$\ni z$

$|f(z)| > \|f\|_K$ a holomorf konvexség def-je miatt.

⟹ ζ sorompó □

* Biz. $D_\rho(a)$-n $f(z) = \sum_{|k| \ge 0} c_k (z-a)^k$, ez kell konv. legyen $\tilde\rho$-val

elég, hogy $\forall r < \rho$-ra konv. $c_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a)$ posszeb.,

és ez holomorf fv a-ban. $\Rightarrow |c_k| \le \frac{1}{k!} \left\| \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k} \right\|_L$,

vegyük L-nek r-környezetét Ω-ban, ez kompakt, vagyis $\|f\|_{L_r} < \infty$ (korlátos) $= M_r$. Triviális integrálbecslésből:

$\frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(b) = a_k \Rightarrow |a_k| \le \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \frac{M_r}{r^{|k|+n}} \cdot (2\pi r)^n = \frac{M_r}{r^{|k|}}$

$\forall b \in L$-re, $\left| \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(b) \right| \le k! \frac{M_r}{r^{|k|}}$, ez becsli tehát

$\left\| \frac{\partial^k f}{\partial z^k} \right\|_L$-et is.

$\forall z \in D_r(a)$-ra $|c_k (z-a)^k| \le \frac{1}{k!} \cdot k! \frac{M_r}{r^{|k|}} \cdot r^{|k|}$, vagyis

$z \in B$, és $D_r(a) \subset B$ nyílt, ezért itt konvergens is □

Tétel: $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ tart, ekvivalensek:

1) Ω holomorfitási tartomány

2) Ω holomorf konvex.

3) $\forall \zeta \in \partial\Omega$ sorompó

4) $\forall K \subset \Omega$ kompaktra $d_\square(K, \partial\Omega) = d_\square(\hat{K}^\Omega, \partial\Omega)$

5) Ω egzisztenciatartomány

Biz.: 1) ⟹ 2) ⟹ 3) ⟹ 5) volt tétel

CT, CT2 biz △

$\exists f \in \mathcal{O}(\Omega)$ nem korlátos $\partial\Omega$-ra

4)

mindig, ha nem ⟹ az előbbi lemmából nem lehetne egz. tart.

4) ⟹ 2) $\hat{K}^\Omega$ rel zárt Ω-ban, = miatt el van szeparálva $\partial\Omega$-tól ⟹ kompakt.

$5) \Rightarrow 4)$ szintén lemma miatt. Látjuk, hogy $2) \Leftrightarrow 3) \Leftrightarrow 4) \Leftrightarrow 5) \Leftarrow 1)$, kell $3) \Rightarrow 1)$ pl.

indirekt: Ω holomorf kiterjeszthetőségi tartomány, ergo $\exists\, \Omega_1, \Omega_0$ $\Omega_1 \not\subset \Omega$, $\Omega_0 \subset \Omega_1 \cap \Omega$ nyílt, hogy $\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$ $f|_{\Omega_0}$ hoz $\exists g \in \mathcal{O}(\Omega_1)$: $f|_{\Omega_0} = g|_{\Omega_0}$.

$p \in \Omega_0$, $q \in \Omega_1 \setminus \Omega_0$ p-q törött vonal Ω_1-ben γ.

$\gamma \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ $\exists$ „legelső" metszéspont, ez $w \in \partial\Omega$.

Tehát a $\widehat{pw} \cup \subset \Omega$, minden pontjához vesszünk kis környezetet Ω-ban, uniójuk G, p környezete Ω_0-ban is legyen benne. G tartomány!

$h_1, h_2 \in \mathcal{O}(\Omega \cap \Omega_1)$, $h_1|_{\Omega_0} = h_2|_{\Omega_0}$ akkor a G-n is megegyeznek, mert $p \in \Omega_0$, és unicitás tétel.

Volt tétel, hogy $\exists f \in \mathcal{O}(\Omega)$ nem korlátos w-ben! Választható úgy, hogy G-ben is legyen sorozat ami mentén ∞-be tart.

Ehhez az f-hez $\exists g \in \mathcal{O}(\Omega_1)$, amire $f|_{\Omega_0} = g|_{\Omega_0}$ emiatt $f|_G = g|_G$ és a g holomorf fv. felrobban egy belső pontban. ↯

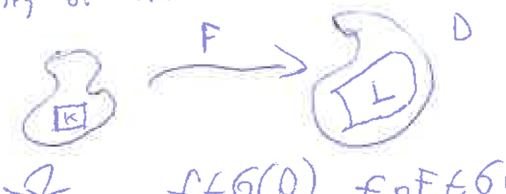
Megj.: $\Omega_1, \ldots, \Omega_N \subset \mathbb{C}^n$ holom. konvex $\Rightarrow$ $\Rightarrow \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_N$ komponensei hol. konvexek.

Feladat: $\Omega_\alpha \subset \mathbb{C}^n$ hol. konv. tartományok, $\operatorname{int}(\cap\, \Omega_\alpha)$ komponensei holom. konvexek.

Áll.: $\Omega, D \subset \mathbb{C}^n$ tart. $F: \Omega \to D$ holom., $K \subset \Omega$ kompakt, $F(K) = L \subset D \Rightarrow F(\hat{K}^\Omega) \subset \hat{L}^D$.

köv.: Ha F biholom. Egyenlőség, és a holomorf konvexség biholomorf invariáns.

Biz.:



$f \in \mathcal{O}(D)$, $f \circ F \in \mathcal{O}(\Omega)$, $a \in \hat{K}^\Omega$ $|(f \circ F)(a)| \le \|f \circ F\|_K = \|f\|_L$

tehát $F(a) \in \hat{L}^D$

Tétel: $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ hol. konvex $\Leftrightarrow \forall \{p_i\}_1^\infty \subset \Omega$ nem torlódó pontsorozatra $\exists f$: $\sup |f(p_i)| = \infty$

Biz. $\Leftarrow$) $K \subset \Omega$ $\hat{K}^\Omega$ rel. zárt Ω-ban, legyen $p_i \in \hat{K}^\Omega$. $\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$: $|f(p_i)| \le \|f\|_K$ $\forall i$, tehát p_i-nem lehet elszálló hol. fvt. megadni, vagyis $\exists$ torlódási pontja $\Rightarrow$ $\Rightarrow \hat{K}^\Omega$ sorozat kompakt.

$\Rightarrow$) $\{p_i\} \subset \Omega$ nincs Ω-ban t.p. ja, tehát $p_j \to \zeta$ határponthoz tart, ez sorozatpont lesz.

Ismét a $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ ε_i, ξ_i-s tételt szabjuk át, p_i egy részsorozatára. K_i helyett $\hat{K}_i^\Omega$ is kompakt p_i kilép belőle, így konstruálunk. □

Sejtés (Wiegerinck): $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ holom. konvex, $\{f \in \mathcal{O}(\Omega) : \int |f|^2 d\lambda < \infty\}$ vektortér vagy 0 vagy ∞ dimenziós.

példa: $n = 1$ W. tétele ✓

Ω korlátos ∞-dim, polinomok ott vannak.

W konstruált TRT-t, ami nem log-konvex, $\mathbb{C}^2$, és $\dim \mathcal{O}L^2(\Omega) = k$ $\forall k = 1, 2, \ldots$

Tétel: $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ekvivalens

1) Ω TRT, log konvex

2) Ω 0-körüli hatv. sor konv. tartománya

3) Ω TRT és $\forall L \subset \Omega$ kompaktra $\hat{L}^{\mathcal{M}} \cap \Omega$ kompakt.

Def.: $\mathcal{M} = \{z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n} \mid \alpha_i \in \mathbb{N}\}$ monomok halmaza

$\hat{L}^{\mathcal{M}} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \forall m \in \mathcal{M}\ |m(z)| \le \|m\|_L\}$.

Biz.: $3) \Rightarrow 1)$ ✓

$3) \Rightarrow 2)$: $K \subset D$ kpkt: $\hat{K}^D \subset \hat{K}^{\mathcal{M}} \cap D$, ergo K holomorf burka kompakt, ergo D holomorfan konvex tartomány $\Rightarrow D$ egzisztencia tartomány $\Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{O}(D)$ nemkorl. $\forall$ határpontban.

ezt az f-et sorba fejtjük:

$f(z)=\sum a_\alpha z^\alpha$ az egész D-n igaz! (TRT)

$D\subset\Omega$, és nem lehet bővebb, mert az f-et kiterjesztené.

$\Leftarrow$ $\exists$: $K\subset D$ kompakt, $\exists\,\xi\in D$
$\xi_i\neq 0$, $|z_i|<|\xi_i|$ $\forall i$

$D_\xi=\{w: |w_i|<|\xi_i|\ \forall i\} \Rightarrow \overline{D}_\xi\subset D$ mert TRT.

ilyenekből véges fedés K-nak. $\xi^1,\xi^2,\dots,\xi^N\in\mathbb{C}^n$ a megfelelők.

$$K\subset\bigcup D_{\xi^i}\subset\underbrace{\bigcup\overline{D}_{\xi^i}}_{=L}\subset D$$

$D\cap\hat{K}\subset\hat{L}\cap D$, tehát ezekre elég belátni, hogy kompakt.

$\overline{G}$ 0-közepű zárt policilinder, m monom $\Rightarrow$

$\Rightarrow \|m\|_G=\|m\|_\Gamma=|m(z)|$, ergo elég, hogy
Γ: G váza, $z\in\Gamma$

$\hat{L}\cap\partial D=\emptyset$. $\exists\, b\in\hat{L}\cap\partial D$, és t.f.

$b_j\neq 0$ $\forall j$. Reinhardt leképezés $\lambda: D_0\to\mathbb{R}^n$
$z\mapsto(\log|z_1|,\dots,\log|z_n|)$

$\lambda(b)\in\partial(\lambda(D_0))$ „könnyű meggondolni"

Támaszhipersík ehhez a határponthoz $\mathbb{R}^n$-ben

$\exists\, \ell(x)=\sum_{j=1}^{n}M_j x_j$ és $\ell(\lambda(D_0))<\ell(\lambda(b))$

$\lambda(D_0)$-nak pedig tudjuk, hogy a belőlük induló negatív ortáns is része $\lambda(D_0)$-nak, világos.
(pontjaiból)

$\Rightarrow \forall j\ M_j\geq 0$, hiszen ha nem lenne, a negatív irányba elindulva túlnőjük $\ell(\lambda(b))$-t.

tehát $\ell(\lambda(\xi^j))<\ell(\lambda(b))$ $j=1..N$

M_j-ket megperturbálva kapjuk $\alpha^j\in\mathbb{Q}$-kat, és
≥ 0

ebből az $\tilde{\ell}(x)$-et.

$\sum\alpha^j\log|\xi^i_j|<\sum\alpha^j\log|b_j|$ $\forall i=1..N$-re

feltehető, hogy $\alpha^j\in\mathbb{N}\Rightarrow$ legyen $m(z)=z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}$

látjuk, hogy $|m(\xi^j)|<|m(b)|$ $j=1..N$, és

$\max_j(|m(\xi^j)|)=\|m\|_L\Rightarrow b\notin\hat{L}$.

Mi van ha b-ben van 0-koordináta?

feltehető, hogy $b=(b_1,\dots,b_\ell,0,\dots,0)$, vetítünk:

$\Pi:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^\ell$, „nem nehéz" hogy $\Pi(D)$ log-konvex

TRT és $\Pi(b)\in\partial(\Pi(D))$ $\square$

<u>biholomorf tartományok</u>

$D,G\subset\mathbb{C}^n$ $\phi: D\to G$ biholo.
tart.

$J\phi$ invertálható $\Rightarrow$ $\det J\phi\neq 0$

$\{\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ biholo$\}=\{az+b\mid a\neq 0\}$ $n=1$-re.

n-re, ha $D=G$ $\{\varphi: D\to D$ biholo$\}$ csoport

$D=\mathbb{C}^{n>1}$-re $n=1$-el ellentétben nagy csoport: $\mathbb{C}$

$n=2$-re pl. $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})\Rightarrow\phi_f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$
$(z,w)\mapsto(z,w+f(z))$

egy biholom. $\mathbb{C}$ ugyanígy az első koordinátára

ψ_f $(z,w)\mapsto(z+f(w),w)$.

$\langle\phi_f,\psi_f\rangle\subset \mathrm{Aut}\,\mathbb{C}^2$
def!
sűrű

Tétel (E. Andersen ~'90) sűrű tartalmazás!
$(z,w)\mapsto(ze^{zw},we^{-zw})$ nincs benne a generátumban.

$F: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ polinomiális $\Rightarrow \det F'$ is polinom

ha F automorfizmus $\Rightarrow \det F' \neq 0 \Rightarrow$ konstans

Jacobi sejtés (Keller): $F: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $\det F' \equiv c \neq 0$

$\Rightarrow F \in \mathrm{Aut}\, \mathbb{C}^n$?

ellenpélda (Pinchuk '94): valósra nem igaz!

$\exists\, (p(x,y), q(x,y)) = P$, $\det P' \equiv c > 0$ de nem diffeom!

10. fokú 40. fokú is

emlék: $n=1$-re kis-Picard: $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $\exists\, a, b$ amit nem vesz fel $\Rightarrow f \equiv c$.

$n>1$-re ugyanez nem igaz: $\exists F: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ biholo $F(\mathbb{C}^n)$-re, $\mathrm{int}(\mathbb{C}^n \setminus F(\mathbb{C}^n)) \neq \emptyset$

(Fatou–Bieberbach)

Riemann-leképezés? $n=2$-re $H = \{(\underbrace{x_1, y_1}_{z}, \underbrace{x_2, y_2}_{w}) : y_2 > 0\}$

egysz. öf., és nem biholomorf korlátos tartománnyal (mert $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^2_+$ alakú)

Tétel (Poincaré): $\mathbb{B}^n$ és $\mathbb{D}^n$ nem biholomorfak.

'70 Royden, Kobayashi

Def: $z \in \Omega \subset \mathbb{C}^n$ tart. $I_\Omega(z) = \{w \in \mathbb{C}^n \mid \exists f: \{|\zeta|<1\} \to \Omega,\ f(0)=z,\ f'(0) = w\}$ a z-beli indicatrix

$0 \mapsto z$

Feladat: $I_\Omega(z) \subset \mathbb{C}^n$ nyílt

Áll: $I_\Omega(z)$ körszerű halmaz, ergo ha $w \in I_\Omega(z)$ és $|\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda w \in I_\Omega(z)$

Példa: 1) $\Omega = \mathbb{C}^n \ni z \Rightarrow I_\Omega(z) = \mathbb{C}^n$

2) $\Omega = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\zeta \mapsto z \cdot e^{\zeta} \Rightarrow I_\Omega(z) = \mathbb{C}$

3) $\Omega = \{|z|<1\} \subset \mathbb{C}$ $I_\Omega(z) = \Omega$

Schwarz

ha $|w|<1 \Rightarrow w \cdot z$ beleképezi az e. körlapot, tehát része, fordítva egy $\overline{D_1(0)} \to D_1(0)$ leképezés deriváltja <1, ha $=1$, akkor forgatás, de akkor nem viszi a zárt körlapot a nyíltba.

$I_D(z)$ teljes körszerű volt mindkor, ezért 1-d-ben az indicatrix $D_r(0)$, vagy maga $\mathbb{C}$.

Feladat: $a \in D_r(0) \Rightarrow I_{D_r(0)}(a)$ véges sugarú körlap, a sugara $r - \frac{|a|^2}{r}$

sőt $D \subset \mathbb{C}$ korlátosra $I_D(a)$ mindig körlap.

$P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{C}$ pontok, $D = \mathbb{C} \setminus \{P_1, \ldots, P_k\}$, $z \in D$-re

$I_D(z)$ korlátos $\Leftrightarrow k \geq 2$.

Áll: $\underset{z}{\Omega} \subset \mathbb{C}^n$, $\underset{z^*}{\Omega^*} \subset \mathbb{C}^m$ akkor

$I_{\Omega \times \Omega^*}(z, z^*) = I_\Omega(z) \times I_{\Omega^*}(z^*)$.

Biz: $\supseteq$: $\xi \in I_\Omega(z)$, $\eta \in I_{\Omega^*}(z^*)$

$f: D_1(0) \to \Omega$; $g: D_1(0) \to \Omega^*$ reprezentánsok, $F = (f, g)$ megfelelő ✓

$\subseteq$: $\zeta \in I_{\Omega \times \Omega^*}(z, z^*)$, F reprezentálja, ezt felbontjuk n és m koordinátákra. □

Köv: $\underset{z}{\Omega} = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$; $\Omega_j \subset \mathbb{C}$

$\Rightarrow I_\Omega(z) =$ „átkigazított policilinder" $\mathbb{C} \times D(\cdot) \times \ldots \times D(\cdot)$

Spec: $\Omega = (D_1(0))^n$, $z = (0, \ldots, 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow I_\Omega(0) = \Omega$.

Áll. $\Omega = B_1^n(0) \subset \mathbb{C}^n$, ekkor $I_{B_1^n(0)}(0) = \Omega$

Biz.: „$\supseteq$": $\xi \in B_1^n(0)$ akkor $\|\xi\| < 1$

$$\overline{D_1(0)} \to B_1^n(0)$$
$$\zeta \to \xi \cdot \zeta \text{ jó leképezés, } \xi\text{-t}$$

reprezentálja. ✓

„$\subseteq$": $\xi \in I_\Omega(0)$; ezt reprezentálja h.

$\eta \in \mathbb{C}^n$, $\|\eta\| = 1$, legyen $f(\zeta) = (h(\zeta), \eta)$ holo ζ-ban

$|f(\zeta)| \underset{\text{C.B.S.}}{\leq} \|h(\zeta)\| \cdot \|\eta\| \leq 1$ ~~és~~, és $f(0) = 0$, Schwarz

lemma $\Rightarrow |f'(0)| \leq 1$ minden η-ra, sőt

$$|f'(0)| = |(\xi, \eta)|$$

szigorúan kisebb mint 1.

ha $h'(0) = 0$ ✓; különben $\eta = \frac{h'(0)}{\|h'(0)\|}$ választással

$1 > |f'(0)| = \left(h'(0), \frac{h'(0)}{\|h'(0)\|}\right) = \|h'(0)\|$. ✓ □

Áll. (kontrakciós tul.): $F: \underset{\mathbb{C}^n}{\Omega_1} \to \underset{\mathbb{C}^m}{\Omega_2}$ holomorf

akkor $F'(z): (I_{\Omega_1}(z)) \subset I_{\Omega_2}(F(z))$

biz.: lánc szabály $f: \overline{D_1(0)} \to \Omega_1$;

$$(F \circ f)'(0) = F'(z) \cdot f'(0). \quad □$$

Áll. (monotonitás) $z \in \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{C}^n \Rightarrow$

$\Rightarrow I_{\Omega_1}(z) \subset I_{\Omega_2}(z)$. (előző-be $F = id$)

Áll. (biholomorf invariancia): $F: \Omega_1 \to \Omega_2$ biholomorf

$F'(z)(I_{\Omega_1}(z)) = I_{\Omega_2}(z)$

Biz.: kontrakciós tul. F-re és F^{-1}-re. □

Tétel (Poincaré): $n > 1 \Rightarrow B_1^n(0)$ és $D_1^n(0)$ nem biholomorf.

Biz.: ∄ $\Phi: B_1^n(0) \to D_1^n(0)$ biholomorf.

feltehető $\Phi(0) = 0$, automorfizmusok szorzatával ~~mástengelyes~~ koordinátánként elvihetünk bármely pontot $D_1^n(0)$-ben az origóba. Ekkor

$$\Phi'(0)\big(\underbrace{I_{B_1^n(0)}(0)}_{B_1^n(0)}\big) = \underbrace{I_{D_1^n(0)}(0)}_{D_1^n(0)}, \text{ tehát egy lineáris}$$

leképezés elviszi a gömböt a policilinderbe, tehát a határt is átviszi,

$$\Phi'(0)\big|_{\partial B_1^n(0)}: \partial B_1^n(0) \to \partial D_1^n(0), \text{ de}$$

ez sima — ez meg nem C^1(!)*

Áll. $U \subset \mathbb{C}$ tart, $f: U \to \mathbb{C}^n$ holomorf, $\|f(z)\| = 1$

$\Rightarrow f \equiv$ konst.

Biz.: $f = (f_1, \dots, f_n) \Rightarrow \sum |f_j|^2 = 1 = \sum f_j \cdot \overline{f_j}$

$$\partial_{\bar z} 1 = 0 = \sum f_j(z) \cdot \overline{f_j'(z)}$$

$$\partial_z \partial_{\bar z} 1 = 0 = \sum f'(z) \overline{f'(z)}, \text{ vagyis } |f_j'(z)| = 0$$

$f_j'(z)$. □

ezért $\partial B_1^n(0)$ peremében nincsenek analitikus korongok, míg $\partial D_1^n(0)$-ban vannak. *

feladat: $\Omega = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |zw| < 1\}$ bbh $I_\Omega(0) = \Omega$.

Tétel (Cartan): D_1, D_2, G_1, G_2 korlátos a síkon ($\mathbb{C}$).

$\Phi: D_1 \times D_2 \to G_1 \times G_2$ biholo. $\Rightarrow$ vagy $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$; ahol

$\varphi_i: D_i \to G_i$ biholo, vagy keresztbe.

Áll.: $A \in GL(2,\mathbb{C})$ ami $A: D_{r_1,R_1}(0) \to D_{r_2,R_2}(0)$ +

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

egynásra visz, akkor vagy $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ 1) vagy $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ 2).

Biz (tétel): $(z,w) \in D_1 \times D_2$, akkor $\phi'(z,w)\left[I_{D_1 \times D_2}(z,w)\right] = I_{G_1 \times G_2}(\phi(z,w))$, korlátosságból az indikatrixok kúpok szorzatai, tehát $\phi'(z,w)$ 1) v. 2) alakú. $F_1 = \{1) \in GL(2)\}$, $F_2 = \{2) \in GL(2)\}$, diszjunkt zártak. Ezen $\phi'(z,w)$ végig F_1-ben, vagy F_2-ben van. (tartomány ösf. miatt) a) b)

a) $\phi = (\phi_1, \phi_2)$; $\phi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} & \frac{\partial \phi_1}{\partial w} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \phi_2}{\partial w} \end{pmatrix} \in F_1$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi_1}{\partial w} \equiv 0 \Rightarrow \phi_1(z,w) = \psi_1(z)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z} \equiv 0 \Rightarrow \phi_2(z,w) = \psi_2(w). \quad \square$$

Tétel: $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ tart. $\forall z \in \Omega$-ra $I_\Omega(z)$ korlátos. $\Rightarrow \forall F: \mathbb{C}^\ell \to \Omega$ holomorf leképezés konstans.

Biz.: Ω ilyen és $F: \mathbb{C}^\ell \to \Omega$ holom.

$F'(w)(\underbrace{I_{\mathbb{C}^\ell}(w)}_{\mathbb{C}^\ell}) \subset I_\Omega(F(w))$ ← korl., tehát

$F' \equiv 0$

Köv. (kis-Picard): $\mathbb{C} \setminus \{a,b\} = \Omega$ ($a \neq b$), kell, hogy $\forall p \in \Omega$-ra $I_\Omega(p)$ korlátos, tehát $\forall$ holom. fv. ami kihagy 2 pontot korlátos

Tétel (Cartan): $q \in D \subset \mathbb{C}^n$ korl. tart., $\phi: D \to D$ holo., $\phi(q) = q$, $\phi'(q) = id \Rightarrow \phi = id$.

ez Cartan unicitási tétele. *

Köv. $D \subset \mathbb{C}^n$ körszerű tart., $\phi \in Aut(D)$ amire $\phi(0) = 0 \Rightarrow \phi$ csak lineáris lehet.

Biz.: elég, h. $\phi'(0) = A$ hogy $\phi(z) = Az$.

$\rho_\Theta(z) = e^{i\Theta} \cdot z$; ez $\in Aut(D)$, mert körszerű.

$\psi(z) = \phi^{-1} \circ \rho_\Theta^{-1} \circ \phi \circ \rho_\Theta \in Aut(D)$, mit látunk

$\psi(0) = 0$; $\psi'(0) = \phi'^{-1}(0) \cdot \rho_\Theta'^{-1} \cdot \phi'(0) \rho_\Theta' = id$

$\Rightarrow$ unicitási tétel miatt $\psi = id \iff \phi \circ \rho_\Theta = \rho_\Theta \circ \phi$ ∂

$\phi(z) = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ sorbafejtjük koordinátánként

$\sum c_\alpha z^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha| = k} c_\alpha z^\alpha$ homogén tagok szerint.

$= \sum_0^\infty P_k$

$\phi(z) = \left(\sum_0^\infty P_k^1, \sum_0^\infty P_k^2, \dots, \sum_0^\infty P_k^n\right) =$

$\sum_0^\infty \underbrace{(P_k^1, \dots, P_k^n)}_{\mathcal{P}_k}$. $e^{i\Theta}$

$\rho_\Theta \circ \phi = \lambda \cdot \sum_0^\infty \mathcal{P}_k$

a sorfejtés egyértelműsége miatt

$\phi \circ \rho_\Theta = \sum_0^\infty \lambda^k \mathcal{P}_k$

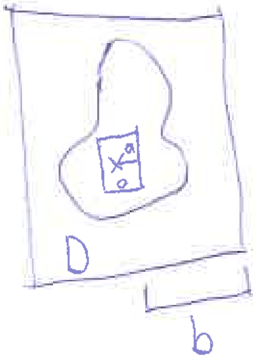
$$\lambda \mathcal{P}_k = \lambda^k \mathcal{P}_k \;\; \forall k \forall \lambda \Rightarrow \mathcal{P}_k = 0 \;\; k \geq 2\text{-re}.$$

tehát valóban lineáris. $\square$

* **Biz.:** 0 lehet az origó.

emlék: Cauchy becslés $\boxed{\ }$ policil. $D, f \in \mathcal{O}(\bar{D})$

I.: $\leq M$ nyilván. Ha $f(z) = \sum c_\alpha (z-c)^\alpha$, itt persze $c_\alpha = \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha f}{\partial z^\alpha}(c)$; $|c_\alpha| \leq \frac{M}{r^{\alpha}!}$



$D_a(0) \subset D \subset D_b(0)$

$\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$, erre

$$\left|\frac{\partial^\alpha f}{\partial z^\alpha}(0)\right| \leq \alpha! \frac{b}{a^{|\alpha|}} \quad D_a(0)\text{-ban}$$

kellene, hogy ha $|\alpha| \geq 2 \Rightarrow \frac{\partial^\alpha f}{\partial z^\alpha}(0) = 0$.

ötlet: $\phi^{[k]} = \underbrace{\phi \circ \dots \circ \phi}_{k \text{ szer}}$, látjuk hogy

$\phi^{[k]}(0) = 0$, és $(\phi^{[k]})'(0) = id$

$\phi = \underset{\substack{\| \\ 0}}{P_0} + \underset{\substack{\uparrow \\ z}}{P_1} + P_2 + \dots$, lesz $k_0 \geq 2$ legkisebb

hogy P_{k_0} nem $0. (\Leftarrow) \phi = z + P_{k_0} + \mathcal{O}(\|z\|^{k_0})$, és

$\phi^{[j]} = z + j \cdot P_{k_0} + \mathcal{O}(\|z\|^{k_0})$

$w \in \mathbb{C}^n$, $\|w\| = \sqrt{\sum |w_i|^2} \leq \sqrt{n} \cdot \max|w_i|$.

$\phi^{[j]}(z) = (\phi_1^{[j]}(z), \dots, \phi_n^{[j]}(z))$

legyen $|\alpha| = k_0$, $\frac{\partial^\alpha \phi_s^{[j]}}{\partial z^\alpha} = j \cdot \frac{\partial^\alpha \phi_s}{\partial z^\alpha}$ az előbbiek szerint. Ennek a normája legfeljebb

$\sqrt{n} \cdot \max\left|\frac{\partial^\alpha \phi_s^{[j]}}{\partial z^\alpha}\right| \leq \sqrt{n} \cdot \alpha! \cdot \frac{b}{a^{|\alpha|}}$, átosztunk j-vel

$\Rightarrow \left\|\frac{\partial^\alpha \phi}{\partial z^\alpha}(0)\right\| \leq \frac{\sqrt{n} \cdot \alpha! \cdot b}{a^{|\alpha|} \cdot j}$, j-vel $\to \infty$ $\square$

Inhomogén Cauchy–Riemann egyenlet

$n=1$ $\quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} i\right)$

f holom. $(\Leftrightarrow) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ (ez homogén lineáris)

fontos: $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \varphi$ ahol φ adott $\in C^k(D)$, $D \subset \mathbb{C}$

hogy lehet megoldani?

megj.: megoldás nem egyért. ha f megoldás, $h+f$ is az tetsz. $h \in \mathcal{O}(D)$-re.

Fordítva, f, g megoldás, $f-g \in \mathcal{O}(D)$.

komplex Green-tétel: $D \subset \mathbb{C}$, $\partial D \in C^1$, korlátos tart. (határ véges sok C^1 Jordan-görbe)

$$h \in C^1(\bar{D}) \Rightarrow \int_{\partial D} h(\zeta)d\zeta = 2i \iint_D \frac{\partial h}{\partial \bar{z}}(\zeta)d\lambda$$

Speciálisan, ha $h \in \mathcal{O}(D) \Rightarrow$ Cauchy-tétel.

Biz.: valós Green-ből.

D mint az előbb, $P, Q \in C^1(\bar{D})$

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D Q'_x - P'_y \, dx dy$$

$$\int_\gamma (u+iv)\,d\zeta = \int_\gamma \underbrace{u\,dx - v\,dy}_{P\quad Q} + i\Big(\int_\gamma \underbrace{v\,dx}_{R} + \underbrace{u\,dy}_{Q}\Big)$$

komplex vonalint., valós vonali, Q-ra valós green.

$h=u+iv$. $\displaystyle\int_{\partial D} h(\zeta)\,d\zeta = \iint_D -v_x-u_y+iu_x-iv_y\,dx\,dy$

$$= i\iint_D \underbrace{u_x+iv_x}_{\frac{\partial h}{\partial x}} + i\underbrace{(u_y+iv_y)}_{\frac{\partial h}{\partial y}} = 2i\iint_D \frac{\partial h}{\partial \bar z}\,dx\,dy \quad \square$$

Tétel (Pompeiu): $D\subset\mathbb{C}$ korl. tart., $\partial D\in C^1$ véges sok j. görbe, $h\in C^1(\bar D) \Rightarrow \forall w\in D$

$$h(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{h(\zeta)}{\zeta-w}\,d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{h'_{\bar z}(\zeta)}{\zeta-w}\,dx\,dy.$$

Megj.: $h\in\mathcal{O}(D) \Rightarrow$ Cauchy formula.

A második integrál értelmes $\frac{1}{z}\in L^1_{loc}(\mathbb{C})$

$D_\varepsilon = D\setminus \overline{D_\varepsilon(w)}$ $\quad \dfrac{h(\zeta)}{\zeta-w}\in C^1(D_\varepsilon)$, előző

tétel $\displaystyle\int_{\partial D_\varepsilon}\frac{h(\zeta)}{\zeta-w}\,d\zeta = 2i\iint_{D_\varepsilon}\Big(\frac{h}{\zeta-w}\Big)'_{\bar\zeta}\,dx\,dy =$

$$=2i\iint_{D_\varepsilon}\frac{h'_{\bar\zeta}}{\zeta-w}\,dx\,dy \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 2i\iint_D \frac{h'_{\bar\zeta}}{\zeta-w}\,dx\,dy$$

$\partial D_\varepsilon = \partial D \cup \gamma_\varepsilon$

$$\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{h(\zeta)}{\zeta-w}\,d\zeta=\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{h(w)+o(1)}{\zeta-w}\,d\zeta=-2\pi i\,h(w)+\underbrace{\int\frac{o(1)}{\zeta-w}\,d\zeta}_{o(1)}.$$

$h(\zeta)=h(w)+o(1)$ $\varepsilon\to 0$ ezeket összerakva:

$$\int_{\partial D}\frac{h(\zeta)}{\zeta-w}\,d\zeta-2\pi i\,h(w)=2i\iint_D\frac{h'_{\bar\zeta}}{\zeta-w}\,dx\,dy \quad\square$$

Def.: $\varphi\in C^1_c(\mathbb{C}) \iff \operatorname{supp}\varphi$ kompakt, $\varphi\in C^1(\mathbb{C})$

Köv.: $\varphi\in C^1_c(\mathbb{C}) \Rightarrow \forall w$-re

$$\varphi(w)=-\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\varphi'_{\bar\zeta}}{\zeta-w}\,dx\,dy,$$ hiszen $R>>0$ választással a Pompeiu formula görbés része a tartón kívül esik. $\square$

Hogy oldjuk meg az inhomogén C-R egyenletet?

$f'_{\bar z}=\varphi$, spec esetben nézzük $D=\mathbb{C}$, $\varphi\in C^1(\mathbb{C})$.

Mi legyen f? $\mathcal{O}(D)$

$$f(w)=\overbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-w}\,d\zeta}-\frac{1}{\pi}\iint_{D_R}\frac{\varphi}{\zeta-w}\,dx\,dy$$

megoldást $\displaystyle -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-w}\,dx\,dy \overset{(*)}{=} f(w)$ alakban keressük

Tétel: $\varphi\in C^1_c(\mathbb{C})$-re $(*)$ megoldja az inhomogén CR egyenletet (Dolbeault – Grothendieck)

Biz.: ha $w\notin\operatorname{supp}\varphi$, $\displaystyle f(w)=-\frac{1}{\pi}\iint_{\operatorname{supp}\varphi}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-w}\,dx\,dy$

paraméteres integrál deriválási szabálya miatt $f\in C^1$, sőt holomorf $\mathbb{C}\setminus\operatorname{supp}\varphi$-n.

$w\in\operatorname{supp}\varphi$-re: $\tau=\zeta-w$

$$f(w)=-\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\varphi(\tau+w)}{\tau}\,da\,db,$$ ahol $\tau=a+ib$

Param. integrál tétel miatt $f\in C^1(\mathbb{C})$ itt is.

$$\frac{\partial f}{\partial\bar w}=-\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\varphi'_{\bar\zeta}(\tau+w)}{\tau}\,da\,db=-\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\varphi'_{\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta-w}\,dx\,dy=\varphi(w).$$

$\square$

Fontos: f nem lesz kompakt tartójú!

Feladat: mit kell tudni φ-ről, hogy f kompakt tartójú legyen.

Mi tünteti ki a megoldásunkat?

$|w| \to \infty$-ben eltűnik! ilyenből egy van csak, mert $(f-g)'_{\bar{z}} = \varphi - \varphi = 0$, ergo holomorf, mivel a végtelenben eltűnik, ezért konstans 0.

$n \geq 1$ eset: $f(z_1, \dots, z_n)$, $f'_{\bar{z}_j} = \varphi_j$ egyenleteket képezhetünk. „gradiens"

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ adott, van-e f? nincs:

Szükséges feltétel: $\left(f'_{\bar{z}_j}\right)'_{\bar{z}_k} = \left(\varphi'_j\right)'_{\bar{z}_k}$ -nak persze teljesülni kell. $\left(f'_{\bar{z}_k}\right)'_{\bar{z}_j} = \left(\varphi_k\right)'_{\bar{z}_j}$

$\frac{1}{2}\partial_{x_j} + \frac{i}{2}\partial_{y_j}$ = Young tétel

vagyis $(\varphi_j)'_{\bar{z}_k} = (\varphi_k)'_{\bar{z}_j}$ ⊛ teljesül.

Ez az inhomogén C-R egyenletrendszer.

⊛ a kompatibilitási feltétel. Elégséges? ($n=1$-re $\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{D})$-re $\exists$ megoldás) nem elég a szükséges feltétel bizonyos tartományokra, $\mathbb{C}^n$-re igen $\Rightarrow$ Ω konvex akkor is, ha holomorfan konvex akkor is, de ez nehéz ≈ 50 év

Példa: $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$-n nem lehet mindig.

Tétel (Hartogs, 1906): $n > 1$, $D \subset \mathbb{C}^n$ tart., $K \subset D$ kompakt, $D \setminus K$ öf. $\Rightarrow f \in \mathcal{O}(D \setminus K)$ akkor f holomorfan kiterjed D-re.

megj.: „$\Leftrightarrow$" $D \subset \mathbb{C}^n$ korl. tart., ∂D öf., $f \in \mathcal{O}(\partial D)$ $\Rightarrow f$ holom. kiterjed D-re.

2, $D \setminus K$ öf. fontos, $D = \mathbb{C}^n$, $K = S^{2n-1}$

köv. (erős Liouville tétel): $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n \setminus \overline{B}_R(0))$ és korlátos $\Rightarrow f \equiv c \in \mathbb{C}$

Biz.: f holomorfan kiterjed $\mathbb{C}^n$-re, a gömbben korlátos lesz, kívül feltevés szerint $\Rightarrow$ mindenhol egyszerű Liouville miatt konstans.

Martinelli '42, Bochner '43 integrálformulákkal látják be a kompakt szingularitás tételt.

Serre '53-ban a valami kohomológia $= 0$-n múlik

Ehrenpreis '61-ben u.ezt más alakban.

Tétel (Ehrenpreis): $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{C}^n)$ + ⊛ $\Rightarrow$ I. C-R megoldható egyért. módon, és a megoldás kompakt tartójú.

Biz. (Hörmander): $n = 2$-re.

$f(z_1, z_2)$. z_1-ben megoldjuk, ez már megy.

$$\frac{-1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\varphi_1(\zeta, z_2)}{\zeta - z_1}\,dx\,dy,$$ kell $f'_{\bar{z}_2}(z_1, z_2) =$

$$= \frac{-1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\varphi_1(\tau + z_1, z_2)}{\tau}\,da\,db = \frac{-1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\varphi'_{1\bar{z}_2}(\zeta, z_2)}{\zeta - z_1}\,dx\,dy \overset{\circledast \text{ miatt}}{=}$$

$$\frac{-1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\varphi'_{2\bar{z}_1}(\zeta, z_2)}{\zeta - z_1}\,dx\,dy = \varphi_2(z_1, z_2)$$

f kompakt tartójú: ha $|z_2| > R$, akkor $\varphi_1(\zeta, z_2) = 0$

továbbá $f'_{\bar{z}_j} = \varphi_j$ $\Rightarrow \exists S$ $\mathbb{C}^2 \setminus B_S(0)$-n holomorf f.

unicitás tétel miatt azonosan nulla a végtelen egy környezetében

ha f, g megoldás $\Rightarrow f-g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \Rightarrow f = g$ mert f kompakt tartójú.

<u>Lemma:</u> K kompakt, $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^m$ (Ω nyílt) $\Rightarrow \exists\, \chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$: $\chi \equiv 1$ K egy környezetében és $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega$.

<u>biz.:</u> $V_1 = \mathbb{R}^m \setminus K$ $\quad V_1 \cup \underbrace{\Omega}_{V_2} = \mathbb{R}^n$: $\exists\, \varphi_1, \varphi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$0 \le \varphi_i$, $\varphi_1 + \varphi_2 \equiv 1$ $\operatorname{supp}\varphi_i \subset V_i$, $\varphi_1|_K \equiv 0$ kis

környezetben is $\Rightarrow \chi = \varphi_2$ jó.

<u>biz (Hartogs tétel):</u>

$f \in \mathcal{O}(D \setminus K) \Rightarrow \exists\, \chi \in C_c^\infty(\mathbb{C}^n)$: $\underbrace{\operatorname{supp}\chi}_{\text{kompakt}} \subset D$

K-n $\equiv 1 \Rightarrow (1-\chi) \cdot f$ $D \setminus K$-ban, 0 K-n egy C^∞ kiterjesztés

$D \setminus \operatorname{supp}\chi$-on holomorf

ötlet: megoldás $= f_0 + v$ ahol $v \in C^\infty(D)$

1) $F \in \mathcal{O}(D)$, 2) $F|_{D \setminus K} = f$ kellene

1): $F'_{\bar z_j} = 0 = f'_{0\bar z_j} + v'_{\bar z_j} \Rightarrow v'_{\bar z_j} = \underbrace{-f'_{0\bar z_j}}_{\varphi_j \text{ ez 0-ként}}$

kiterjed $\mathbb{C}^n$-re, kompatibilitás is van, mert egy fix fv második parc. deriváltjait látjuk.

$\Rightarrow$ Ehrenpreis, $\exists\, v \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ megoldás

2): $v \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n \setminus \underbrace{\operatorname{supp}\varphi}_{\supseteq\ \cancel{\text{supp}}})$, a nem korlátos komponensen $\equiv 0$

D^{∞}

$\mathbb{B}_R(q) \subset D^\infty \Rightarrow v| \equiv 0$ itt.

$\zeta \in D \cap D^\infty$, $\zeta \in (p, q)$

p legközelebb q-hoz $\operatorname{supp}\chi$-ban

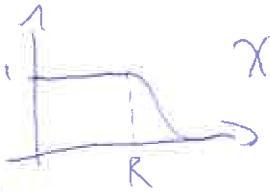
$\mathbb{B}_\varepsilon(\zeta) \subset D \cap D^\infty$ itt $v \equiv 0$, $F = f_0 = f$

$D \setminus K$ öf $\Rightarrow$ unicitás miatt $F|_{D \setminus K} = f|_{D \setminus K}$.

<u>Intermezzo</u>

<u>$n=1$</u>; $D = \mathbb{C}$, $u'_{\bar z} = \varphi$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{C})$

bump függvényt csinálunk:



$\chi_R \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\chi_R \equiv 1$ a $[0, R]$ környezetében, $\operatorname{supp}\chi$ kompakt.

$\chi_j(|z|) \cdot \varphi(z)$ kompakt tartójú $C^\infty(\mathbb{C})$ fv $\forall j$-re.

tehát $\exists\, v_j$: $v'_{j\bar z} = \chi_j(|z|)\, \varphi(z)$

$v_1 + (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \ldots$ alakban próbálkozunk, semmi oka nincs konvergensnek lenni!!

Mittag-Leffler trükk: j rögzített, akkor v_j, v_{j+1} megoldja $\bar D_j(0)$ egy környezetében az $u'_{\bar z} = \chi_j(|z|)\, \varphi(z)$, egyenletet.

$(v_{j+1} - v_j)'_{\bar z} = 0$ $\bar D_j(0)$ körül, ezért holomorf.

hatványsorba fejtjük, vegyük a P_j kezdőszeletet, hogy $\sup \|v_{j+1} - v_j - P_j\|_{\bar D_j(0)} < \frac{1}{2^j}$

$v_1 + \sum_{j=1}^{\infty} (v_{j+1} - v_j - P_j) =: u$, állítjuk, hogy u jó.

<u>biz.:</u> rögzítjük n-et. $\bar D_n(0)$-ban

$v_1 + (v_2 - v_1 - P_1) + (v_3 - v_2 - P_2) + \ldots + (v_n - v_{n-1} - P_{n-1}) +$

$+ \sum_{j=n+1}^{\infty} (v_{j+1} - v_j - P_j)$, a farok rész konvergens lesz

Most $j \geq n \Rightarrow \overline{D}_j(0) \supset \overline{D}_n(0)$

$\|v_{j+1} - v_j - P_j\| < \frac{1}{2^j}$ $\overline{D}_j(0)$-ban, ez igaz

$\overline{D}_n(0)$-ban $\forall$ tagra. $\sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j}$ konvergens,

így a Weierstrass M-teszt miatt az összeg

konvergens holomorf.

$u|_{D_n(0)} = V_n$ - holom $+ \sum_{j=n}^{\infty} \dots$ holom, tehát

$u|'_{D_n(0), \bar{z}} = v'_{n,\bar{z}} = \varphi|_{D_n(0)}$. $\square$

Tétel (Grothendieck): $C^\infty(\mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{C})$
$u \longmapsto u'_{\bar{z}}$

lineáris operátor, imént láttuk, hogy szürjektív.

megfelelő topológiában folyt., persze lineáris.

nincs folyt. lin. „megoldó operátora", egy

$V \mapsto Ev$; melyre $(Ev)'_{\bar{z}} = V$ lenne.

Def.: $D \subset \mathbb{C}^n$ tart.; $H^{0,1}(D) = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \varphi_j : D \to \mathbb{C}$ C^∞-ek + kompatibilitási feltétel$\} / \{(\psi'_{\bar{z}_1}, \dots, \psi'_{\bar{z}_n}) : \psi : D \to \mathbb{C}$ $C^\infty\}$

Dolbeault kohomológia csoport.

Előbb láttuk, hogy $H^{0,1}(\mathbb{C}) = 0$.

Feladat: $H^{0,1}(D_n(0)) = 0$

Megj.: $H^{0,1}(\mathbb{C}^n) = 0$ $\forall n$.

Példa: $D = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$-ra $H^{0,1}(D) \neq 0$

$\varphi_1(z_1, z_2) = \frac{\bar{z}_2}{(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2)^2}$, $\varphi_2 = \frac{-\bar{z}_1}{(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2)^2}$

kompatibilitás telj. ✓ erre nem lehet megoldani?

nem lehet biz.: tegyük fel, hogy $z_1 = 0$-t is,

$G = \{(z_1, z_2) : z_1 \neq 0\} \subset D$

$h(z_1, z_2) = \frac{-\bar{z}_2}{z_1(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2)}$, ez G-n megoldja az $u'_{\bar{z}} = \varphi$

egyenletet.

$h'_{\bar{z}_1} = \frac{\bar{z}_2 (-1) \cdot \bar{z}_1}{z_1 (|z_1|^2 + |z_2|^2)}$ ✓ $h'_{\bar{z}_2}$ is jó hasonlóan

$\frac{1}{z_1} \cdot \frac{-(|z_1|^2 + |z_2|^2) + \bar{z}_2 z_2}{(\dots)^2}$ ✓

Ha $u \in C^\infty(D)$ megoldás $\Rightarrow$ $u - h$ holomorf G-n.

$z_1(u-h)$ is holomorf

$z_1 u \in C^\infty(D)$, $z_1 h \in C^\infty(D)$, sőt $\overbrace{z_1(u-h)}^{g} \in \mathcal{O}(D)$,

mert parciálisan holomorf.

$g(\cdot, z_2)$ $z_2 \neq 0$ -ra holomorf,

$g(0, z_2)$-ben $\frac{-1}{z_2}$-t látunk holomorf.

$\Rightarrow g \in C^\infty(D)$, parc. holomorf $\Rightarrow \in \mathcal{O}(D)$ valóban;

kompakt szingularitás tétel miatt $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2)$ ↯

Def.: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $\{U_j\}_{j \in I}$ nyílt fedés, φ_j alárendelt

egységosztás, ha $\operatorname{supp} \varphi_j \subset U_j$, $\{\operatorname{supp} \varphi_j\}$ lok. véges

$\varphi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ $0 \leq \varphi_j \leq 1$, $\sum \varphi_j = 1$

Tétel: létezik egységosztás

Köv.: $X \subset \Omega$ zárt-hoz $\exists f$, ami $\equiv 1$ egy kis

környezetben, $\operatorname{supp} f \subset U$

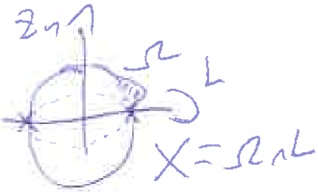
~~...~~

Tétel: $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ tart., $H^{0,1}(\Omega) = 0$; L affin

$n-1$ dim. hipersík, $f \in \mathcal{O}(\Omega \cap L)$, $\Rightarrow$ ez

kiterjed holomorfan Ω-ra.

Biz.: L-et lineárisan valamelyik koordináta hipersíkba visszük, $L=\{z_n=0\}$



$\pi: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ vetítés L-re.

$X = \Omega \cap L$

$f \circ \pi : \pi^{-1}(X) \cap \Omega \to \mathbb{C}$ holom.

χ $C^\infty(\Omega)$; $\chi \equiv 1$ az X egy környezetében, $\operatorname{supp} \chi \subset \pi^{-1}(X) \cap \Omega$, $g = \chi(f \circ \pi)$, okért így kiterjesztjük az egész Ω-ra, ez C^∞ lesz de nem holomorf. Javítás:

$\chi \cdot (f \circ \pi) + u \cdot z_n =: F$ kellene hogy $\in \mathcal{O}(\Omega)$

$(F)'_{\bar z_j} = (\chi \cdot f \circ \pi)'_{\bar z_j} + z_n \cdot u'_{\bar z_j} \stackrel{!}{=} 0$ kell.

$\Rightarrow u'_{\bar z_j} = -\dfrac{[\chi \cdot (f \circ \pi)]'_{\bar z_j}}{z_n}$, ez értelmes, mert

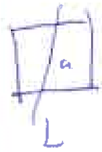
$\chi \equiv 1$ X egy környezetében, ezzel a $\bar z_j$ deriváltja $\equiv 0$, kompatibilitás teljesül, $H^{0,1} = 0 \Rightarrow \exists$ ilyen u. $\square$

Tétel: $D \subset \mathbb{C}^n$ tart., nem holomorfan konvex $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists a \in D, R > 0$ $D_R(a) \not\subset D$, de $\forall f \in \mathcal{O}(D)$ -nak a körüli hatványsora konvergens $D_R(a)$-ban.

Biz.: $\exists K \subset D$ kompakt, táv$(\hat K, \partial D) = 0$, táv$(K, \partial D) = R > 0$, $a \in \hat K$, táv$(a, \partial D) < R$.
volt lemma (egyidejű folytathatóság): hogy ez pont jó. $\square$

Tétel (H. Cartan): $D \subset \mathbb{C}^2$ tart., $H^{0,1}(D) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow D$ holom. konvex.

Biz.: L tetsz. affin egyenes, $L \cap D = \emptyset$, vagy L-ben nyílt. Ha nem holom. konvex D. Előző tétel szerint a, $D_R(a) \not\subset D \Rightarrow \exists L$ affin $\mathbb{C}$-egyenes, hogy: ~~[illegible]~~. $L \cap D_R(a)$-nak az a-t tartalmazó komponensének létezik egy ζ



$D_R(a)$ határpontja: $\zeta \in \partial(L \cap D_R(a))$,
$\zeta \in D_R(a) \Rightarrow \exists f \in \mathcal{O}(G)$ nem korlátos ζ-ban (határpont sűrűségpont), persze $f \in \mathcal{O}(L \cap D)$, kiterjesztés $\Rightarrow \exists F \in \mathcal{O}(D)$: $F|_{L \cap D} = f$.

F a körüli hatványsora konvergens $D_R(a)$-ban, de $\zeta \in D_R(a)$, és itt F elszáll.

Tétel (Oka): $D \subset \mathbb{C}^2$ tart., holom. konvex $\Rightarrow H^{0,1}(D) = 0$

Tétel (Cartan): $H^{0,1}(\mathbb{C}^3 \setminus \{0,0,0\}) = 0$

nem hol. konvex,

$H^{0,1}, H^{0,2}, \ldots, H^{0,n-1}$-ek vannak, ezek mérik D holom. konvexitását.

T. (Oka, Bremermann, Norguet): D holom. konvex $\Rightarrow$
$H^{0,1} = 0$

T. (Serre): $H^{0,q} = 0 \Rightarrow D$ holom. konvex.