# ALGEBRAI TOPOLÓGIA

SZABÓ ENDRE

Ez a jegyzet az interneten olvasható (bármilyen böngészővel), vagy szükség esetén letölthető pdf formátumban is.

## Figyelem:
## most írom, ezért tele van hibával.

Tartalomjegyzék



*Date*: 2014. május 22..

## Tananyag — 2013/14 első félév

(1) Komplexusok, homológia funktor, lánc-homotópia, lánc homotóp ekvivalencia. (2. szakasz)
(2) CW-komplexusok, Whitehead tétele, minden folytonos függvény homotóp egy CW-függvénnyel. (14. szakasz)
(3) fokszám. (13. szakasz)
(4) CW-lánc-komplexus, CW-homológia, CW-kohomológia. $\Delta^{CW}_{\cdot}$ funktorialitása. Kobordizmusok, homotópiák. (15. szakasz)
(5) Modulusok tenzor szorzata, hom funktor, tulajdonságaik. Végesen generált abelcsoportok.
(6) Mayer-Vietoris sorozat. (21. szakasz)
(7) Szinguláris szimplexek, $\underline{\mathrm{ev}} : \mathbb{S}(X) \to X$ gyenge homotóp ekvivalencia. (16. szakasz)
(8) Szinguláris-lánc-komplexus, homológia, kohomológia. (17. szakasz)
(9) Differenciál formák, de Rham komplexus. Stokes tétel, Poincaré lemma, de Rham tétel. (20. szakasz)
(10) Példák. (30. szakasz/1.-15. Feladatok, + sok-sok H.F.)

## Tananyag — 2013/14 második félév

(1) Ketős komplexusok, totális komplexus, hosszú egzakt sorozat: 3.1. Definíciótól 3.9. Konvencióig.
(2) Lánc-ekvivalencia ettős komplexusokkal: 3.20. Tétel, 3.22. Következmény, 3.24. Következmény.
(3) Čech kohomológia: 19.2. Konstrukció, 19.3. Definíció, és a 19.5. Tétel az első (algebrai) bizonyítással.
(4) DeRham izomorfizmus: 20.6. Feladat, 20.10. Tétel, 20.11. Tétel, 20.12. Feladat. Vigyázat: az órán más bizonyítás volt, mint a jegyzetben!
(5) Két soros kettős komplexusok: 3.25. Definíció, 3.26. Tétel, és bizonyítás nélkül a 3.28. Tétel.
(6) Projektív, injektív, lapos felol dások: 4. szakasz.

(7) Tenzor-szorzat komplexus, Tor funktor: 5. szakasz.
(8) Homomorfizmus komplexus, Ext funktor: 6. szakasz.
(9) Univerzális Együttható Tételek: 7. szakasz, 23. szakasz.
(10) Künneth Formulák: 9. szakasz, 25. szakasz.
(11) Külső szorzás: 8. szakasz, 24. szakasz.
(12) Csésze és sapka szorzás, azonosságok: 27. szakasz.
(13) Leray-Hirsch tétel: 28. szakasz.
(14) Poincaré dualitás: 29. szakasz. Csak azokat a bizonyításoka kérem, amik szerepeltek az órán.

## 1. Konvenciók

**1.1. Konvenció.** *Ebben a jegyzetben minden gyűrű egységelemes és kommutatív, kivéve, ha expliciten megengedünk nem-kommutatív gyűrűket.* főideálgyűrű *alatt mindig kommutatív, egységelemes, nullosztó mentes főideálgyűrűt értünk.*

Sajnos a topológiában bevett szokás, hogy alsó, és fölső indexeket is használnak a komplexusokban. Mi is így teszünk!

**1.2. Konvenció.** *Ha egy komplexus differenciálja index-csökkentő, akkor általában alul indexeljük, és a differenciált ha csak lehet $\partial$. jelöli.*

*Ha pedig a komplexus differenciálja index-növelő, akkor általában fölső indexeket használunk, és tipikusan $d^{\cdot}$ jelöli a differenciált.*

*Egy index-csökkentő (alul indexelt) komplexust úgy tudunk index-növelő (fölül indexelt) módon írni, hogy az indexeket a negatívjukra cseréljük és fölülre húzzuk (i.e. $\mathcal{C}_n$ helyett $\mathcal{C}^{-n}$-et írunk). Ugyanezt a transzformációt visszafelé is használjuk: fölső indexből is tudunk alsót csinálni.*

*A diagramokon a nyilak (hacsak lehet) jobbra/fölfelé mutatnak. Ezért az alsó indexek a diagramon balra/lefelé növekednek, a fölső indexek pedig jobbra/fölfelé.*

**1.3. Konvenció.** *Komplexusokat $\mathcal{F}^{\cdot}, \mathcal{G}^{\cdot}, \ldots$ szimbólumokkal jelöljük, lánc-homomorfizmusokat $f^{\cdot}, g^{\cdot}, \ldots$ jelöli. Kettős komplexusokat hasonló módon, $\mathcal{K}^{\cdot\cdot}$ alakban írjuk. Egy kettős komplexusban a vízszintes differenciált $d$-vel, a függőlegest $\partial$-val, a totális differenciált pedig általában $D$-vel jelöljük.*

## 2. Komplexusok

**2.1. Definíció.** *Egy $\mathcal{K}^{\cdot}$* komplexus *az alábbi, $R$-modulusokból álló (mindkét irányban végtelen) diagramot jelöli:*

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{K}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{K}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{K}^2 \xrightarrow{d} \mathcal{K}^3 \xrightarrow{d} \cdots$$

*amelyben $d^2 = 0$ teljesül (itt $d^2$ jelöli $d$-nek $d$-vel való kompozícióját). (De használhatunk alsó indexeket is: 1.2. Konvenció). A $\mathcal{K}^{\cdot}$ komplexus* felülről korlátos, *ha egy $p_0$ indextől kezdve minden $p > p_0$ indexre $\mathcal{K}^p = 0$, és* alulról korlátos, *ha egy $n_0$ indextől kezdve minden $n < n_0$ indexre $\mathcal{K}^p = 0$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{K}^{\cdot}$* valamerről kotlátos, *ha a két korlátossági feltétel közül az egyik teljesül.*

*Legyen $\mathcal{L}^{\cdot}$ egy másik komplexus. Egy $f^{\cdot} : \mathcal{K}^{\cdot} \to \mathcal{L}^{\cdot}$* lánc-homomorfizmus *a következő kommutatív diagramot jelöli:*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \mathcal{L}^0 & \xrightarrow{d} & \mathcal{L}^1 & \xrightarrow{d} & \mathcal{L}^2 & \xrightarrow{d} & \mathcal{L}^3 & \xrightarrow{d} & \cdots \\
 & & {\scriptstyle f^0}\uparrow & & {\scriptstyle f^1}\uparrow & & {\scriptstyle f^2}\uparrow & & {\scriptstyle f^3}\uparrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & \mathcal{K}^0 & \xrightarrow{d} & \mathcal{K}^1 & \xrightarrow{d} & \mathcal{K}^2 & \xrightarrow{d} & \mathcal{K}^3 & \xrightarrow{d} & \cdots
\end{array}$$

*Lánc-homomorfizmusok egy $\mathcal{K}^{\cdot} \xrightarrow{f^{\cdot}} \mathcal{L}^{\cdot} \xrightarrow{g^{\cdot}} \mathcal{M}^{\cdot}$ sorozata* egzakt, *ha a benne szereplő $\mathcal{K}^n \xrightarrow{f^n} \mathcal{L}^n \xrightarrow{g^n} \mathcal{M}^n$ sorozatok mind egzaktak.*

**2.2. Definíció.** *Ebben a jegyzetben $\mathbb{A}\mathrm{b}$ jelöli az Abel csoportok kategóriáját, és $\underrightarrow{\mathbb{A}\mathrm{b}}$ jelöli az Abel csoport komplexusok kategóriáját.*

**2.3. Definíció.** *Legyen $\mathcal{K}^{\cdot}$ egy komplexus. Az $n$-edik* homológiája *a következő hányados-modulus:*

$$H^n(\mathcal{K}^{\cdot}) = \operatorname{Ker}\left(\mathcal{K}^n \xrightarrow{d} \mathcal{K}^{n+1}\right) \Big/ \operatorname{Im}\left(\mathcal{K}^{n-1} \xrightarrow{d} \mathcal{K}^n\right)$$

*Minden $\mathcal{K}^{\cdot} \xrightarrow{f^{\cdot}} \mathcal{L}^{\cdot}$ lánc-homomorfizmus meghatároz egy*

$$H^n(f^{\cdot}) : H^n(\mathcal{K}^{\cdot}) \to H^n(\mathcal{L}^{\cdot})$$

*homomorfizmust: ha $k \in \mathcal{K}^n$ reprezentálja a $\bar{k} \in H^n(\mathcal{K}^{\cdot})$ elemet, akkor $f(k)$ reprezentálja a képét, $H^n(f)(\bar{k})$-t. Ezzel a definícióval $H^n$ egy kovariáns funktor a komplexusok kategóriájából a modulusok kategóriájába.*

**2.4. Konvenció.** *Ha az $\mathcal{L}.$ komplexust alul indexeljük, akkor a homológiamodulusait is alsó indexszel írjuk: $H_n(\mathcal{L}.)$.*

**2.5. Feladat.** *Bizonyítsd be, hogy a 2.3. Definícióban $f(k)$ valóban reprezentál egy homológia-osztályt (azaz $d\big(f(k)\big) = 0$), és ez az osztály nem függ $k$-tól, csak a homológia-osztályától, $\bar{k}$-tól. Bizonyítsd be, hogy $H^n$ tényleg funktor: kompatibilis a lánc-homomorfizmusok kompozíciójával.*

**2.6. Tétel.** *Legyen $0 \longrightarrow \mathcal{K}^{\cdot} \xrightarrow{f^{\cdot}} \mathcal{L}^{\cdot} \xrightarrow{g^{\cdot}} \mathcal{M}^{\cdot} \longrightarrow 0$ komplexusok egy* rövid egzakt sorozata. *Ehhez tartozik egy* hosszú egzakt sorozat, *ami* *funktoriálisan függ az eredeti sorozattól:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots\cdots\ H^{n-1}(\mathcal{K}^{\cdot}) \arrow[r, "H^{n-1}(f^{\cdot})"] & H^{n-1}(\mathcal{L}^{\cdot}) \arrow[r, "H^{n-1}(g^{\cdot})"] & H^{n-1}(\mathcal{M}^{\cdot}) \arrow[dll, rounded corners, "\delta^*"] \\
H^{n}(\mathcal{K}^{\cdot}) \arrow[r, "H^{n}(f^{\cdot})"] & H^{n}(\mathcal{L}^{\cdot}) \arrow[r, "H^{n}(g^{\cdot})"] & H^{n}(\mathcal{M}^{\cdot}) \arrow[dll, rounded corners, "\delta^*"] \\
H^{n+1}(\mathcal{K}^{\cdot}) \arrow[r, "H^{n+1}(f^{\cdot})"] & H^{n+1}(\mathcal{L}^{\cdot}) \arrow[r, "H^{n+1}(g^{\cdot})"] & H^{n+1}(\mathcal{M}^{\cdot})\ \cdots\cdots
\end{tikzcd}$$

*Itt a* $\delta^*$ határ-homomorfizmus *definíciója: ha* $m \in \mathcal{M}^n$ *reprezentál egy* $\bar{m} \in H^n(\mathcal{M}^{\cdot})$ *homológia elemet, akkor a* $\delta^*\bar{m} \in H^{n+1}(\mathcal{K}^{\cdot})$ *elemet*

$$f^{-1}\Big(d\big(g^{-1}(m)\big)\Big) \in \mathcal{K}^{n+1}$$

*reprezentálja. Ebben a formulában* $f^{-1}$ *és* $g^{-1}$ *nem egyértelmű, bármelyik őskép választható.*

**2.7. Feladat.** Diagram vadászat! *Lásd be, hogy a 2.6. Tételben a formula valóban egy homológia-osztályt reprezentál, és a kapott* $\delta^*\bar{m}$ *osztály nem függ a választásoktól.*

**2.8. Feladat.** Diagram vadászat! *Lásd be, hogy a 2.6. Tételben szereplő sorozat valóban egzakt.*

**2.9. Lemma** (5-lemma)**.** *Tegyük fel, hogy az alábbi diagram (előjel erejéig) kommatív, a sorai egzaktak, és a görög betűvel jelölt függőleges nyilak mind izomorfizmusok. Ekkor az ötödik (betű nélküli) függőleges nyíl is izomorfizmus.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & D \arrow[r] & E \\
X \arrow[r] \arrow[u, "\alpha"] & Y \arrow[r] \arrow[u, "\beta"] & Z \arrow[r] \arrow[u] & U \arrow[r] \arrow[u, "\delta"] & V \arrow[u, "\epsilon"]
\end{tikzcd}$$

**2.10. Feladat.** Diagram vadászat! *Lásd be a 2.9. Lemmát!*

**2.11. Feladat.** *Legyen* $0 \to \mathcal{A}^{\cdot} \to \mathcal{B}^{\cdot} \to \mathcal{C}^{\cdot} \to 0$ *komplexusok egy rövid egzakt sorozata. Bizonyítsd be, hogy ha a három komplexus közül kettő egzakt, akkor a harmadik is az!*

*Ötlet:* Következik a 2.6. Tételből. Másik lehetőség: egyszerű diagram vadászat. □

**2.12. Definíció.** *Egy $f^{\cdot} : \mathcal{K}^{\cdot} \to \mathcal{L}^{\cdot}$ lánc-homomorfizmust* lánc-ekvivalenciának *nevezünk, ha $H^n(f^{\cdot})$ izomorfizmus minden $n$-re. A $\mathcal{K}^{\cdot}$, $\mathcal{M}^{\cdot}$ komplexusok* lánc-ekvivalensek*, ha lánc-ekvivalenciák egy láncolatával összeköthetők:*

$$\mathcal{K}^{\cdot} \xleftarrow{\cong} \mathcal{X}_1^{\cdot} \xrightarrow{\cong} \mathcal{X}_2^{\cdot} \xleftarrow{\cong} \cdots \mathcal{X}_n^{\cdot} \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}^{\cdot}$$

**2.13. Megjegyzés.** *A 2.12. Definícióban elegendő lenne két lépéses láncolatokat használni (azaz $n = 1$). Ha a komplexusok kategóriáját úgy módosítjuk, hogy a lánc-ekvivalenciákat izomorfizmusokká tesszük (tehát bevezetjük az inverzüket, és az azokból kiszámítható összes kompozíciót is), akkor a modulus-kategória derivált kategóriájához jutunk.*

**2.14. Definíció.** *Legyenek $f^{\cdot}, g^{\cdot} : \mathcal{K}^{\cdot} \to \mathcal{L}^{\cdot}$ lánc-homomorfizmusok. Azt mondjuk, hogy $f$ és $g$* lánc-homotópok*, ha van köztük egy* lánc-homotópia*, azaz egy $h^{\cdot} : \mathcal{K}^{\cdot} \to \mathcal{L}^{\cdot -1}$ lánc-homomorfizmus amire*

$$dh^{\cdot} + h^{\cdot}d = f^{\cdot} - g^{\cdot}$$

*Azt mondjuk, hogy $f^{\cdot}$* homotóp ekvivalencia*, ha van* homotópia inverze*, azaz ha van olyan $\tilde{f}^{\cdot} : \mathcal{L}^{\cdot} \to \mathcal{K}^{\cdot}$ lánc-homomorfizmus, amelyre az $f^{\cdot} \circ \tilde{f}^{\cdot}$ és a $\tilde{f}^{\cdot} \circ f^{\cdot}$ kompozíciók homotóp ekvivalensek a $\mathcal{L}^{\cdot}$ illetve a $\mathcal{K}^{\cdot}$ identitás lánc-homomorfizmusával.*

**2.15. Tétel.** *Ha $f^{\cdot}, g^{\cdot} : \mathcal{K}^{\cdot} \to \mathcal{L}^{\cdot}$ lánc-homotóp lánc-homomorfizmusok, akkor $H^n(f^{\cdot}) = H^n(g^{\cdot})$ minden $n$-re. Ha $f$ homotóp ekvivalencia, akkor lánc-ekvivalencia.*

**2.16. Feladat.** *Bizonyítsd be a 2.15. Tételt.*

**2.17. Következmény.** *Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{K}^{\cdot}$ komplexus* pontrahúzható*, ha a $\mathcal{K}^{\cdot} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathcal{K}^{\cdot}$ identitás lánc-homomorfizmus homotóp ekvivalens a nulla lánc-homomorfizmussal. Egy pontrahúzható komplexus egzakt.*

*Bizonyítás.* A nulla komplexus rész-komplexusa $\mathcal{K}^{\cdot}$-nak, és a $0 \hookrightarrow \mathcal{K}^{\cdot}$ beágyazás egy homotóp ekvivalencia. Alkalmazzuk a 2.15. Tételt. □

**2.18. Feladat.** *Lásd be a 2.17. Következményt közvetlenül, diagram vadászattal.*

**2.19. Megjegyzés.** *A 2.15. Tétel támasztja alá azt a filozófiát, hogy egy komplexust bármikor kicserélhetünk egy vele lánc-ekvivalensre. Speciális eset: egy modulus helyett dolgozhatunk egy projektív vagy egy injektív feloldásával (lásd a 4.2. Definíciót és a 4.3. Definíciót).*

## 3. Kettős komplexusok

**3.1. Definíció.** *Egy* $\mathcal{K}^{\cdot\cdot}$ kettős komplexus *az alábbi síkbeli kommutatív diagram, amelynek minden sora és minden oszlopa komplexus (azaz* $d\partial = \partial d$*,* $d^2 = 0$ *és* $\partial^2 = 0$*).*

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{K}^{2,0} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\partial"] & \mathcal{K}^{2,1} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\partial"] & \mathcal{K}^{2,2} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\partial"] & \mathcal{K}^{2,3} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\partial"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{K}^{1,0} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\partial"] & \mathcal{K}^{1,1} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\partial"] & \mathcal{K}^{1,2} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\partial"] & \mathcal{K}^{1,3} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\partial"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{K}^{0,0} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\partial"] & \mathcal{K}^{0,1} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\partial"] & \mathcal{K}^{0,2} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\partial"] & \mathcal{K}^{0,3} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\partial"] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

*A* $\mathcal{K}^{\cdot\cdot}$ *kettős komplexus* átlósan korlátos*, ha minden* $n$*-re a* $\mathcal{K}^{p,n-p}$ *modulusok között csak véges sok nem-nulla szerepel.*

**3.2. Példa.** *A* $\mathcal{K}^{\cdot\cdot}$ *kettős komplexus átlósan korlátos, ha találunk hozzá egy* $B$ *korlátot, amelyre a következő feltételek valamelyike teljesül:*

- $\mathcal{K}^{p,q} = 0$ *vahányszor* $\max(p, q) \geq B$*. A diagramon ezt úgy látjuk hogy a nem-nulla elemek egy bal-alsó irányú sík-negyedben élnek. (Alul indexelt kettős komplexusoknál ez megfordul, jobb-felső irányú lesz. Lásd az 1.2. Konvenciót.)*
- $\mathcal{K}^{p,q} = 0$ *valahányszor* $\min(p, q) \leq B$*. A diagramon ezt úgy látjuk hogy a nem-nulla elemek egy jobb-felső irányú sík-negyedben élnek.*
- $\mathcal{K}^{p,q} = 0$ *valahányszor* $|p| > B$*. A diagramon ezt úgy látjuk hogy a nem-nulla elemek egy vízszintes sávban élnek.*

**3.3. Definíció.** *Legyen* $\mathcal{K}^{\cdot\cdot}$ *egy átlósan korlátos kettős komplexus.* $\overline{\mathcal{K}}^{\cdot}$ *jelöli a hozzá tartozó* totális komplexust*:*

$$\overline{\mathcal{K}}^n = \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{K}^{p,q} \,, \quad Dk = dk + (-1)^q \partial k \quad \text{ha } k \in K^{p,q} \,.$$

*Az átlósan korlátosság biztosítja, hogy az összegeknek minden esetben véges sok nem-nulla tagjuk van. Mindez jól látható az 1. ábrán abban az esetban, amikor a nem-nulla pozíciók a* $p, q \geq 0$ *síknegyedben találhatók.*

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}^{3,0} \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "d"] & \mathcal{K}^{3,1} \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "d"] & \mathcal{K}^{3,2} \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "d"] & \mathcal{K}^{3,3} \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "d"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}^{2,0} \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "d"] & \mathcal{K}^{2,1} \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "d"] & \mathcal{K}^{2,2} \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "d"] & \mathcal{K}^{2,3} \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "d"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}^{1,0} \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "d"] & \mathcal{K}^{1,1} \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "d"] & \mathcal{K}^{1,2} \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "d"] & \mathcal{K}^{1,3} \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "d"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}^{0,0} \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "d", "\overline{\mathcal{K}}^{0}"'] & \mathcal{K}^{0,1} \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "d", "\overline{\mathcal{K}}^{1}"'] & \mathcal{K}^{0,2} \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "d", "\overline{\mathcal{K}}^{2}"'] & \mathcal{K}^{0,3} \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "d", "\overline{\mathcal{K}}^{3}"'] & \cdots \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

*1. ábra. Totális komplexus*

**3.4. Definíció.** *A $\mathcal{K}^{\cdot\cdot}$ kettős komplexus* $[s,t]$-szelete*, jelölésben $\mathcal{K}[s,t]^{\cdot\cdot}$, egy kettős komplexus, amelyet úgy kapunk $\mathcal{K}^{\cdot\cdot}$-ból, hogy az $s$-edik és a $t$-edik sor közötti sávot megtartjuk, az ezen kívüli pozíciókba nullát írunk (lásd a 3.6. Lemma diagramját). $\overline{\mathcal{K}[s,t]}^{\cdot}$ jelöli az ehhez tartozó totális komplexust. A $\mathcal{K}^{\cdot\cdot}$ kettős komplexus $s$-edik sorát $\mathcal{K}[s]^{\cdot}$ jelöli. Formálisan:*

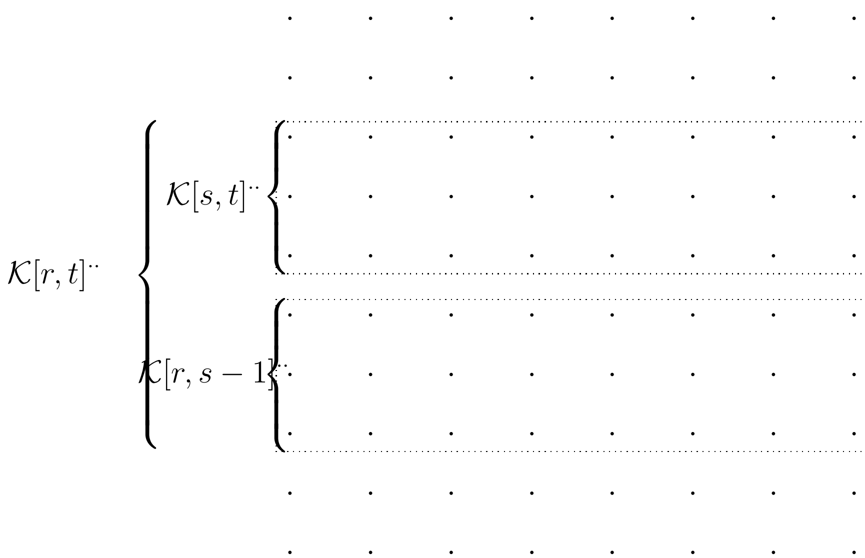
$$\mathcal{K}[s,t]^{p,q} = \begin{cases} \mathcal{K}^{p,q} & \textit{ha } s \le p \le t \\ 0 & \textit{különben} \end{cases} \quad , \quad \mathcal{K}[s]^{q} = \overline{\mathcal{K}[s,s]}^{q+s} = \mathcal{K}^{s,q} \ .$$

**3.5. Feladat.** *Lásd be, hogy a 3.4. Definícióban szereplő $q+s$ kitevő helyes, azaz*

$$\mathcal{K}[s]^{\cdot} = \overline{\mathcal{K}[s,s]}^{\cdot+s} \ .$$

**3.6. Lemma.** *Legyen $\mathcal{K}^{\cdot\cdot}$ egy kettős komplexus. Tekintsük a különböző szeleteihez tartozó totális komplexusokat (lásd a 2. ábrán). Minden $r \le s \le t$ értékre kapunk egy egzakt sorozatot, ami funktoriálisan függ $\mathcal{K}^{\cdot\cdot}$-tól:*

$$0 \longrightarrow \overline{\mathcal{K}[s,t]}^{\cdot} \longrightarrow \overline{\mathcal{K}[r,t]}^{\cdot} \longrightarrow \overline{\mathcal{K}[r,s-1]}^{\cdot} \longrightarrow 0$$

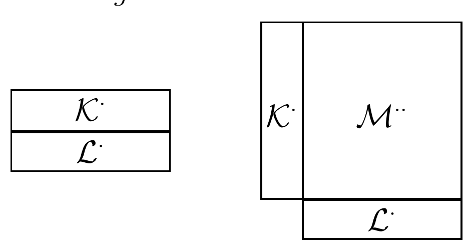



*2. ábra. Kettős komplexus szeletei*

**3.7. Feladat.** Diagram vadászat! *Lásd be, hogy a fenti diagramon* $\overline{\mathcal{K}[s,t]}^{\cdot}$ *részkomplexus* $\overline{\mathcal{K}[r,t]}^{\cdot}$ *-ban, és a szerinte vett hányados izomorf* $\overline{\mathcal{K}[r,s]}^{\cdot}$ *-tal!*

**3.8. Feladat.** Diagram vadászat! *Miért nem lehet a 3.6. Lemma egzakt sorozatát fordítva írni? Mutasd meg, hogy* $\overline{\mathcal{K}[r,s]}^{\cdot}$ *nem feltétlenül részkomplexus* $\overline{\mathcal{K}[r,t]}^{\cdot}$ *-ban, és* $\overline{\mathcal{K}[s,t]}^{\cdot}$ *nem feltétlenül hányados komplexusa* $\overline{\mathcal{K}[r,t]}^{\cdot}$ *-nak.*

**3.9. Konvenció.** *Gyakran szükség van arra, hogy egy kettős komplexust blokkokból építsünk fel. Az alábbi sematikus diagramok ilyen kettős komplexusokat mutatnak. Itt most* $\mathcal{K}^{\cdot}$, $\mathcal{L}^{\cdot}$ *komplexusok,* $\mathcal{M}^{\cdot\cdot}$ *pedig egy kettős komplexus, és a diagramon kívüli területekre nullákat kell írni:*




*Figyeljük meg, hogy egy komplexust vízszintesen és függőlegesen is beépíthetünk egy kettős komplexusba. Természetesen, ha a diagramba írt komplexusok valamelyik irányban végtelenek, akkor a belőlük épített diagram is végelen lesz abban az irányban (noha a diagramon erre semmi* *nem utal). Az ilyen diagramokon nem tudjuk jelölni az egyes blokkok közt haladó differenciálokat, ezért csak olyan helyzetekben használjuk őket, amikor egyértelmű, hogy melyik homomorfizmusokról van szó.*

**3.10. Definíció.** *Legyen* $f^\cdot : \mathcal{K}^\cdot \to \mathcal{L}^\cdot$ *egy lánc-homomorfizmus, tekintsük a* $\begin{array}{|c|}\hline \mathcal{L}^\cdot \\ \hline \mathcal{K}^\cdot \\ \hline \end{array}$ *kettős komplexust, amelyben* $f^\cdot$ *a függőleges irányú differenciál, és* $\mathcal{K}^\cdot$*-t a nulladik sorba írtuk. Az ő totális komplexusát az* $f^\cdot$ leképezés-kúpjának *nevezzük, és* $\mathcal{C}(f^\cdot)^\cdot$*-fel jelöljük. Ha a 3.6. Lemmát alkalmazzuk erre a kettős komplexusra, akkor a következő rövid egzakt sorozatot kapjuk:*

$$0 \to \mathcal{L}^{\cdot-1} \to \mathcal{C}(f^\cdot)^\cdot \to \mathcal{K}^\cdot \to 0$$

**3.11. Feladat.** *Ellenőrizd, hogy a 3.10. Definícióban helyesen írtuk fel az egzakt sorozatot.*

**3.12. Feladat.** *Vesd össze a 3.10. Definíciót a leképezés-kúp szokásos definíciójával!*

**3.13. Lemma.** *A 3.10. Definícióhoz tartozó hosszú egzakt sorozat (lásd a 2.6. Tételben) így néz ki:*

$$\begin{tikzcd} \cdots\cdots\ H^{q-1}(\mathcal{L}^\cdot) \arrow[r] & H^q\big(\mathcal{C}(f^\cdot)^\cdot\big) \arrow[r] & H^q(\mathcal{K}^\cdot) \arrow[dll, "\delta^*=H^q(f^\cdot)"] \\ H^q(\mathcal{L}^\cdot) \arrow[r] & H^{q+1}\big(\mathcal{C}(f^\cdot)^\cdot\big) \arrow[r] & H^{q+1}(\mathcal{K}^\cdot)\ \ \cdots\cdots \end{tikzcd}$$

**3.14. Feladat.** Diagram vadászat! *Ellenőrizd, hogy a 3.13. Lemma diagramján látható indexek helyesek! Lásd be, hogy a* $\delta^*$ *határ-homomorfizmus valóban megegyezik* $H^q(f^\cdot)$*-fel!*

**3.15. Lemma.** *Egy lánc-ekvivalencia leképezés-kúpja egzakt.*

*Ötlet:* Ez a lemmát bebizonyítható egyszerű diagram vadászattal. Egy másik lehetőség, hogy megmutatjuk: a leképezés-kúp pontra húzható (lásd a 2.17. Következményt). A $\begin{array}{|c|}\hline \mathcal{K}^\cdot \\ \hline \mathcal{K}^\cdot \\ \hline \end{array}$ kettős komplexusban a függőleges (identitás)homomorfizmus inverzéből könnyedén elkészíthetjük a kívánt lánc-homotópiát. Harmadik módszer: azonnal következik az állítás abból az észrevételből, hogy a 3.13. Lemma egzakt sorozatában a $\delta^*$ határ-homomorfizmusok mind izomorfizmusok. $\square$

**3.16. Feladat.** *Dolgozd ki a 3.15. Lemma bizonyításához adott ötleteket.*

**3.17. Feladat.** *Lásd be, hogy egy lánc-homomorfizmus pontosan akkor lánc-ekvivalencia, ha leképezés-kúpja egzakt.*

*Ötlet:* Használd a 3.13. Lemma hosszú egzakt sorozatát. □

**3.18. Feladat.** *Legyen* $0 \to \mathcal{K}^\cdot \xrightarrow{f^\cdot} \mathcal{L}^\cdot \xrightarrow{g^\cdot} \mathcal{M}^\cdot \to 0$ *komplexusok egy rövid egzakt sorozata. Lásd be, hogy az* $f^\cdot$ *leképezés-kúpja homotóp ekvivalens* $\mathcal{M}^\cdot$*-mel, a* $g^\cdot$ *leképezés-kúpja pedig homotóp ekvivalens* $\mathcal{K}^\cdot$*-val.*

*Ötlet:* $\mathcal{K}^\cdot$ részkomplexusa az $\begin{array}{|c|}\hline \mathcal{M}^\cdot \\ \hline \mathcal{L}^\cdot \\ \hline \end{array}$ alsó sorának, és a függőleges irányú differenciál 0-ba viszi — tehát rész-kettős-komplexus. A hányados kettős-komplexus pedig $\begin{array}{|c|}\hline \mathcal{L}^\cdot \\ \hline \mathcal{L}^\cdot \\ \hline \end{array}$ alakú. Ezért $\mathcal{K}^\cdot \hookrightarrow \mathcal{C}(f^\cdot)^\cdot$ részkomplexus, a hányados pedig az $\mathcal{L}^\cdot \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}^\cdot$ izomorfizmus leképezés-kúpja, alkalmazható a 3.15. Lemma.

Hasonló módon találhatunk egy szürjektív lánc-homomorfizmust $\mathcal{C}(g^\cdot)$-ből $\mathcal{M}^\cdot$-re, aminek a magja a $\mathcal{K}^\cdot \xrightarrow{\cong} \mathcal{K}^\cdot$ izomorfizmus leképezés-kúpja. □

**3.19. Megjegyzés.** *Érdemes összevetni a leképezés-kúpról szóló feladatokat a triangulált kategória fogalámával.*

**3.20. Tétel.** *Tegyük fel, hogy a* $\mathcal{K}^{\cdot\cdot}$ *kettős komplexus minden sora egzakt. Ilyenkor* $\overline{\mathcal{K}}^\cdot$ *is egzakt, tehát* $H^n\big(\overline{\mathcal{K}}^\cdot\big) = 0$ *minden* $n$*-re. Ugyanez teljesül akkor is, ha a sorok helyett az oszlopok egzaktak.*

**3.21. Feladat.** Diagram vadászat! *Lásd be a 3.20. Tételt!*

**3.22. Következmény.** *Tegyük fel, hogy a* $\mathcal{K}^{\cdot\cdot}$ *kettős komplexus átlósan korlátos, minden oszlopa egzakt, és az* $s$*-edik sor a legalsó vagy a legfelső nem-nulla sora, amint az alábbi diagramok szemléltetik:*

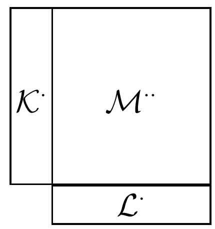
$$\begin{array}{|c|}\hline \\ \mathcal{K}[s+1,\infty]^{\cdot\cdot} \\ \\ \hline \mathcal{K}[s]^\cdot \\ \hline \end{array} \qquad \textit{vagy} \qquad \begin{array}{|c|}\hline \mathcal{K}[s]^\cdot \\ \hline \\ \mathcal{K}[-\infty,s-1]^{\cdot\cdot} \\ \\ \hline \end{array}$$

*Alkalmazzuk a diagramon látható felbontásra a 3.20. Tételt, kapunk egy természetes lánc-ekvivalenciát:*

$$\mathcal{K}[s]^\cdot \cong \overline{\mathcal{K}[s+1,\infty]}^{\,\cdot+(s+1)} \qquad \textit{illetve} \qquad \mathcal{K}[s]^\cdot \cong \overline{\mathcal{K}[-\infty,s-1]}^{\,\cdot+(s+1)}.$$

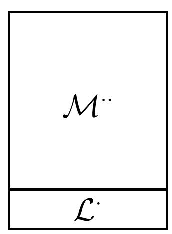
**3.23. Feladat.** *Miért van a* $\cdot + (s+1)$ *index-eltolás a 3.22. Következményben?*

**3.24. Következmény.** *Legyenek $\mathcal{K}^{\cdot}$ és $\mathcal{L}^{\cdot}$ komplexusok, amelyekben a negatív indexű pozíciókban nulla áll. Tegyük fel, hogy tudunk egy ilyen kettős komplexust építeni:*

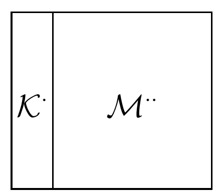



*amelynek a sorai és az oszlopai is mind egzaktak. Ekkor $\mathcal{K}^{\cdot}$ és $\mathcal{L}^{\cdot}$ lánc-ekvivalensek.*

*Bizonyítás.* Alkalmazzuk a 3.22. Következményt illetve a 45-fokos egyenesre tükrözött változatát a következő komplexusokra:




és




$\square$

**3.25. Definíció.** *Legyen $\mathcal{K}^{\cdot\cdot}$ egy kettős kopmlexus. Definiáljuk a hozzá tartozó $E_1^{\cdot\cdot}$ és $E_2^{\cdot\cdot}$ modulusokat (ezek már nem kettős komplexusok, csak „táblázatok”). Minden $(p,q)$ párra legyen $E_1^{p,q} = H^q\big(\mathcal{K}[p]^{\cdot}\big)$, tehát a $\mathcal{K}^{\cdot\cdot}$-ban vízszintesen (a d mentén) számolunk homológiát. Mivel a függőleges homomorfizmusok összeállnak egy $\partial^{\cdot} : \mathcal{K}[p] \to \mathcal{K}[p+1]$ lánc-homomorfizmussá, azért az $E_1^{\cdot\cdot}$ táblázatban kapunk függőleges irányú $H^p(\partial^{\cdot}) : E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}$ homomorfizmusokat is. Ezért az $E_1^{\cdot\cdot}$ táblázat oszlopai megint csak komplexusok, legyen $E_2^{p,q}$ az $E_1^{\cdot\cdot}$ táblázat $q$-adik oszlopának $p$-edik homológiája.*

**3.26. Tétel.** *Tegyük fel, hogy a $\mathcal{K}^{\cdot\cdot}$ kettős komplexusnak csak két sora van, a $p$-edik és a $p+1$-edik. Ekkor minden $q$ egészre van egy rövid egzakt sorozat:*

$$0 \to E_2^{p+1,q-1} \to H^{p+q}\big(\overline{\mathcal{K}}^{\cdot}\big) \to E_2^{p,q} \to 0$$

*és ez a sorozat funktoriálisan függ $\mathcal{K}^{\cdot\cdot}$-tól.*

$$\begin{tikzcd}
\cdots & \mathcal{K}^{p+1,q-1} \arrow[r] & \mathcal{K}^{p+1,q} \arrow[r] & \mathcal{K}^{p+1,q+1} & \cdots \\
\cdots & \mathcal{K}^{p,q-1} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{K}^{p,q} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{K}^{p,q+1} \arrow[u] & \cdots \\
 & & \overline{\mathcal{K}}^{p+q} & &
\end{tikzcd}$$

*Bizonyítás.* A $\mathcal{K}^{\cdot\cdot}$ totális komplexusa (lásd a 3.3. Definíciót) éppen a $\partial^{\cdot} : \mathcal{K}[p]^{\cdot} \to \mathcal{K}[p{+}1]^{\cdot}$ lánc-homomorfizmus (a függőleges irányú differenciál) leképezés-kúpja (lása a 3.10. Definíciót). Írjuk fel a 3.13. Lemma egzakt sorozatának egy darabját:

$$\begin{tikzcd}
H^{p+q}\big(\overline{\mathcal{K}}^{\cdot}\big) \arrow[r] & H^q\big(\mathcal{K}[p]^{\cdot}\big) \arrow[r, "H^q(\partial^{\cdot})"] \arrow[d, equal] & H^q\big(\mathcal{K}[p+1]^{\cdot}\big) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^{p+q+1}\big(\overline{\mathcal{K}}^{\cdot}\big) \\
0 \arrow[r] & E_1^{p,q} \arrow[r] & E_1^{p+1,q} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

A diagram alsó sora éppen az $E_1^{\cdot\cdot}$ táblázat $q$-adik oszlopa. Leolvasható róla, hogy

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ker}\,\big(H^q(\partial^{\cdot})\big)\ , \quad E_2^{p+1,q} = \mathrm{Coker}\,\big(H^q(\partial^{\cdot})\big)$$

minden $q$-ra. A Tétel most már kiolvasható a fenti egzakt sorozat egy másik darabjából:

$$\xrightarrow{H^{q-1}(\partial^{\cdot})} H^{q-1}\big(\mathcal{K}[p+1]^{\cdot}\big) \longrightarrow H^{p+q}\big(\overline{\mathcal{K}}^{\cdot}\big) \longrightarrow H^q\big(\mathcal{K}[p]^{\cdot}\big) \xrightarrow{H^q(\partial^{\cdot})}$$

□

**3.27. Feladat.** *Tekintsük a 3.26. Tételbeli $\mathcal{K}^{\cdot\cdot}$ komplexust, jelölje $D^{\cdot}$ a $\overline{\mathcal{K}}^{\cdot}$ (totális) komplexus differenciálját. Kövesd a 3.26. Tétel bizonyítását az alábbi explicit formulákkal!*

(a) *Lásd be, hogy*

$$\mathrm{Ker}\,\big(D^{p+q}\big) = \Big\{(a,b) \in \mathcal{K}^{p+1,q-1} \oplus \mathcal{K}^{p,q} \ \Big|\ d(b) = 0,\ \partial^{\cdot}(b) = (-1)^q d^{\cdot}(a)\Big\}$$

(b) *Tekintsük a következő részmodulust:*

$$\mathcal{F}^{p,q} = \Big\{b \in \mathcal{K}^{p,q} \ \Big|\ \exists a \in \mathcal{K}^{p+1,q-1} :\ \partial^{\cdot}(b) = (-1)^q d^{\cdot}(a)\Big\}$$

*Az alábbi képletekben kivételesen kiírjuk a $d^{\cdot}$ differenciál indexét. A 3.26. Tétel bizonyítása alapján lásd be, hogy*

$$\mathrm{Im}\,\big(d^{p,q-1}\big) \le \mathcal{F}^{p,q}\ , \quad E_2^{p,q} \cong \mathcal{F}^{p,q}/\,\mathrm{Im}\,\big(d^{p,q-1}\big)$$

(c) *Az eddigiekből következik, hogy $H^{p+q}\left(\overline{\mathcal{K}}^{\cdot}\right)$ elemei reprezentálhatók* $\mathrm{Ker}(D^{p+q})$ *elemeivel, és $E_2^{p,q}$ elemei reprezentálhatók $\mathcal{F}^{p,q}$ elemeivel. Lásd be, hogy a 3.26. Tételbeli $H^{p+q}\left(\overline{\mathcal{K}}^{\cdot}\right) \to E_2^{p,q}$ homomorfizmus megadható a következő módon:*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}\left(D^{p+q}\right) \ni (a,b) & \longrightarrow & b \in \mathcal{F}^{p,q} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{p+q}\left(\overline{\mathcal{K}}^{\cdot}\right) & \longrightarrow & E_2^{p,q} \end{array}$$

(d) *Most ismét kiírjuk a $d^{\cdot}$ differenciál indexét. Tekintsük a*

$$\mathrm{Ker}\left(d^{p+1,q-1}\right) \leq \mathcal{K}^{p+1,q-1}$$

*részmodulust. Lásd be, hogy $E_2^{p+1,q-1}$ ennek a hányados-modulusa! Lásd be, hogy az a 3.26. Tételbeli $E_2^{p+1,q-1} \to H^{p+q}\left(\overline{\mathcal{K}}^{\cdot}\right)$ homomorfizmus megadható a következő módon:*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}\left(d^{p+1,q-1}\right) \ni a & \longrightarrow & (a,0) \in \mathrm{Ker}\left(D^{p+q}\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_2^{p+1,q-1} & \longrightarrow & H^{p+q}\left(\overline{\mathcal{K}}^{\cdot}\right) \end{array}$$

**3.28. Tétel.** *Legyen $R$ egy nullosztómentes főideálgyűrű. Tegyük fel, hogy a 3.26. Tételbeli kettős komplexus $R$ feletti szabad modulusokból áll. Ekkor a 3.26. Tétel egzakt sorozata felhasad. (Ez a felhasítás nem kanonikus.)*

*Bizonyítás.* A bizonyításban felhasználjuk a 3.27. Feladatot. Tekintsük a (c) pontban szereplő diagramot, az alábbi jelölésekkel:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}\left(D^{p+q}\right) \ni (a,b) & \xrightarrow{\phi} & b \in \mathcal{F}^{p,q} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \rho \\ H^{p+q}\left(\overline{\mathcal{K}}^{\cdot}\right) & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & E_2^{p,q} \end{array}$$

Mivel most $\mathcal{F}^{p,q}$ szabad modulus (4.4. Tények (h) pont), azért választhatunk egy

$$\mathrm{Ker}\left(D^{p+q}\right) \xleftarrow{\psi} \mathcal{F}^{p,q}$$

homomorfizmust, ami $\phi$-nek jobboldali inverze (azaz $\phi$-vel komponálva az $\mathcal{F}^{p,q}$ identitás-izomorfizmusát adja). Mivel $\phi$ szürjektív, azért

$$\psi\Big(\mathrm{Ker}(\rho)\Big) = \mathrm{Im}(\psi) \cap \mathrm{Ker}(\pi)\ ,$$

tehát $\psi$ indukál egy

$$H^{p+q}\left(\overline{\mathcal{K}}^{\cdot}\right) \xleftarrow{\tilde{\psi}} E_2^{p,q}$$

homomorfizmust, ami $\tilde{\phi}$-nek jobboldali inverze. $\square$

## 4. Projektív, injektív, lapos feloldások

**4.1. Definíció.** *Egy $M$ modulus* projektív*, ha a* $\mathrm{Hom}(M, \_)$ *funktor egzakt. Azt mondjuk, hogy $M$* injektív*, ha a* $\mathrm{Hom}(\_, M)$ *funktor egzakt. És végül $M$* lapos*, ha a* $\_ \otimes M$ *funktor egzakt.*

**4.2. Definíció.** *Legyen $M$ egy modulus. Készítsünk egy (balra végtelen) egzakt sorozatot:*

$$\cdots \to \mathcal{P}^{-3} \to \mathcal{P}^{-2} \to \mathcal{P}^{-1} \to \mathcal{P}^{0} \to M \to 0$$

*ahol minden $\mathcal{P}^n$ modulus projektív. Ha az $M$ helyére is nullát írunk, a kapott $\mathcal{P}^{\cdot}$ komplexus az $M$ egy* projektív feloldása*. Érdemes most úgy gondolni az $M$ modulusra, mint egy olyan komplexusra, amelynek a $0$-fokú része $M$, minden más fokszámon pedig $0$ áll. Ekkor tehát a fenti egzakt sorozat azt jelenti, hogy a*

$$\mathcal{P}^{\cdot} \xrightarrow{\cong} M$$

*lánc-homomorfizmus egy lánc-ekvivalencia (2.12. Definíció). Ha a $\mathcal{P}^n$ modulusok nem csak projektívek, hanem még szabadok is, akkor $\mathcal{P}^{\cdot}$ egy* szabad feloldás*. Sokszor a projektivitás helyett elég csak azt megkövetelni, hogy a $\mathcal{P}^n$ modulusok laposak legyenek — ilyenkor* lapos feloldás*ról beszélünk.*

**4.3. Definíció.** *Legyen $M$ egy modulus. Készítsünk egy (jobbra végtelen) egzakt sorozatot:*

$$0 \to M \to \mathcal{I}^{0} \to \mathcal{I}^{1} \to \mathcal{I}^{2} \to \mathcal{I}^{3} \to \cdots$$

*ahol minden $\mathcal{I}^p$ modulus injektív. Ha az $M$ helyére is nullát írunk, a kapott $\mathcal{I}^{\cdot}$ komplexus az $M$ egy* injektív feloldása*. Érdemes most úgy gondolni az $M$ modulusra, mint egy olyan komplexusra, amelynek a $0$-fokú része $M$, minden más fokszámon pedig $0$ áll. Ekkor tehát a fenti egzakt sorozat azt jelenti, hogy a*

$$M \xrightarrow{\cong} \mathcal{I}^{\cdot}$$

*lánc-homomorfizmus egy lánc-ekvivalencia (2.12. Definíció).*

**4.4. Tények.**

*(a) Minden szabad modulus projektív, minden projektív modulus lapos.*
*(b) Minden modulusnak van szabad feloldása (tehát projektív és lapos feloldása is).*
*(c) Egy modulus pontosan akkor projektív, ha egy szabad modulus direkt összeadandója.*

(d) *Minden injektív modulus osztható.*
(e) *Minden modulusnak van* injektív burka*, azaz van egy őt tartalmazó legkisebb injektív modulus. Ezért minden modulusnak van injektív feloldása.*
(f) *Nullosztómentes főideálgyűrű felett lapos = torziómentes.*
(g) *Nullosztómentes főideálgyűrű felett injektív = osztható. Ezért ilyenkor egy injektív modulus faktormodulusa injektív.*
(h) *Nullosztómentes főideálgyűrű felett egy szabad modulus minden részmodulusa szabad. Ezért ilyenkor projektív = szabad.*
(i) *Nullosztómentes főideálgyűrű felett minden modulusnak van kétlépéses injektív feloldása:*
$$0 \to M \to \mathcal{I}^0 \to \mathcal{I}^1 \to 0$$
*és kétlépéses szabad feloldása:*
$$0 \to \mathcal{F}^{-1} \to \mathcal{F}^0 \to M \to 0$$
*(Azonnal következik (g)-ből illetve (h)-ből.)*

**4.5. Feladat.** *Legyen $X$ egy kompakt Hausdorff tér, $V$ egy (véges rangú) vektornyaláb $X$-en. Legyen $\mathcal{C}(X)$ az $X \to \mathbb{R}$ folytonos függvények gyűrűje, és $\mathcal{M}$ az $X \to V$ folytonos szelések $\mathcal{C}(X)$-modulusa. Bizonyítsd be, hogy $\mathcal{M}$ projektív modulus! Bizonyítsd be, hogy minden végesen generált projektív $\mathcal{C}(X)$-modulus így kapható! Mondj ki, és bizonyíts be analóg állításokat differenciálható, illetve analitikus függvényekre! Mi a helyzet, ha $X$ nem kompakt?*

**4.6. Lemma.** *Legyen $0 \to A \to B \to C \to 0$ modulusok egy rövid egzakt sorozata. Ekkor választhatunk olyan $\mathcal{E}\cdot \to A$, $\mathcal{F}^{\cdot} \to B$ és $\mathcal{G}^{\cdot} \to C$ szabad feloldásokat, amelyek összeállnak az alábbi kommutatív diagrammá amelyben a sorok és az oszlopok is egzaktak:*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{G}^3 \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{G}^2 \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{G}^1 \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{G}^0 \arrow[r] \arrow[u] & C \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{F}^3 \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{F}^2 \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{F}^1 \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{F}^0 \arrow[r] \arrow[u] & B \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{E}^3 \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{E}^2 \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{E}^1 \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{E}^0 \arrow[r] \arrow[u] & A \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

*Ezzel analóg állítás érvényes injektív feloldásokra is.*

*Ötlet:* Kiindulhatunk tetszőleges $\mathcal{E}^{\cdot} \to A$ és $\mathcal{G}^{\cdot} \to C$ szabad feloldásokból. Legyen $\mathcal{F}^n = \mathcal{E}^n \oplus \mathcal{G}^n$, és a függőleges homomorfizmusoknak válasszuk a felbontásban szereplő $\mathcal{E}^n \hookrightarrow \mathcal{F}^n$ beágyazást és a $\mathcal{F}^n \twoheadrightarrow \mathcal{G}^n$ projekciót. A diagram könnyen kiegészíthető megfelelő $\mathcal{F}^n \to \mathcal{F}^{n+1}$ (vízszintes) homomorfizmusokkal (csak a generátorok képét kell megadni). $\square$

**4.7. Feladat.** *Diagram vadászat! Dolgozd ki a 4.6. Lemma bizonyítását!*

**4.8. Definíció.** *Noether gyűrű feletti modulusok egy $\mathcal{K}^\cdot$ komplexusa* véges típusú*, ha minden homológiája végesen generált, és $H^n(\mathcal{K}^\cdot) = 0$, ha $n < n_0$ (valamilyen $n_0$ értékre).*

**4.9. Lemma** (Végesen generált szabad approximáció)**.** *Noether gyűrű felett minden véges típusú $\mathcal{K}^\cdot$ modulus-komplexushoz (4.8. Definíció) található egy $\mathcal{F}^\cdot \xrightarrow{\cong} \mathcal{K}^\cdot$ lánc-ekvivalencia, ahol $\mathcal{F}^\cdot$ egy olyan komplexus, amelynek minden tagja végesen generált szabad modulus, és $\mathcal{F}^n = 0$ ha $n > n_0$. Az ilyen $\mathcal{F}^\cdot \to \mathcal{K}^\cdot$ ekvivalenciákat* végesen generált szabad approximációnak *hívjuk.*

**4.10. Feladat.** Diagram vadászat! *Bizonyítsd be a 4.9. Lemma!*

**4.11. Feladat.** *Van-e analógja a 4.9. Lemmanak injektív modulusokkal?*

**4.12. Feladat.** *Lásd be, hogy projektív modulusok tenzor szorzata ismét projektív, valamint lapos modulusok tenzor szorzata ismét lapos! Mi a helyzet injektív modulusok, illetve szabad modulusok tenzor szorzatával?*

## 5. Tenzor-szorzat komplexus, Tor funktor

**5.1. Definíció.** *Legyen $\mathcal{K}^\cdot$ egy komplexus és $M$ egy modulus. Alkalmazzuk a $\_ \otimes M$ funktort a $\mathcal{K}^\cdot$ komplexusra, így kapjuk a $\mathcal{K}^\cdot \otimes M$ komplexust:*

$$\cdots \xrightarrow{\partial\otimes\_} \mathcal{K}^{p-1} \otimes M \xrightarrow{\partial\otimes\_} \mathcal{K}^p \otimes M \xrightarrow{\partial\otimes\_} \mathcal{K}^{p+1} \otimes M \xrightarrow{\partial\otimes\_} \cdots$$

*Hasonló módon definiáljuk az $M \otimes \mathcal{K}^\cdot$ komplexust is, ami persze kanonikusan izomorf $\mathcal{K}^\cdot \otimes M$-mel.*

**5.2. Definíció.** *Legyenek $\mathcal{K}^\cdot$ és $\mathcal{L}^\cdot$ komplexusok. Az egyszerűség kedvéért most $\partial$-val jelöljük a $\mathcal{K}^\cdot$-beli differenciált, $d$-vel a $\mathcal{L}^\cdot$ differenciálját. A* tenzor szorzat komplexusuk *az alábbi, $\mathcal{K}^\cdot \otimes \mathcal{L}^\cdot$-lel jelölt kettős komplexus, melynben szintén $\partial$ és $d$ betűk jelölik a két differenciált:*

$$\left(\mathcal{K}^\cdot \otimes \mathcal{L}^\cdot\right)^{p,q} = \mathcal{K}^p \otimes \mathcal{L}^q\ , \quad d(k \otimes l) = k \otimes d(l)\ , \quad \partial(k \otimes l) = \partial(k) \otimes l$$

*(lásd a 3. ábrán) Gyakran használjuk a tenzor szorzat totális komplexusát, a korábbi jelölésekkel összhangban ezt $\overline{\mathcal{K}^\cdot \otimes \mathcal{L}^\cdot}^\cdot$ jelöli. (Más könyvekben gyakran $\mathcal{K}^\cdot \otimes \mathcal{L}^\cdot$ jelöli a totális komplexust is.)*

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{K}^2 \otimes \mathcal{L}^0 \arrow[u, "\partial\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes d"] & \mathcal{K}^2 \otimes \mathcal{L}^1 \arrow[u, "\partial\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes d"] & \mathcal{K}^2 \otimes \mathcal{L}^2 \arrow[u, "\partial\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes d"] & \mathcal{K}^2 \otimes \mathcal{L}^3 \arrow[u, "\partial\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes d"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{K}^1 \otimes \mathcal{L}^0 \arrow[u, "\partial\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes d"] & \mathcal{K}^1 \otimes \mathcal{L}^1 \arrow[u, "\partial\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes d"] & \mathcal{K}^1 \otimes \mathcal{L}^2 \arrow[u, "\partial\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes d"] & \mathcal{K}^1 \otimes \mathcal{L}^3 \arrow[u, "\partial\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes d"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{K}^0 \otimes \mathcal{L}^0 \arrow[u, "\partial\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes d"] & \mathcal{K}^0 \otimes \mathcal{L}^1 \arrow[u, "\partial\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes d"] & \mathcal{K}^0 \otimes \mathcal{L}^2 \arrow[u, "\partial\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes d"] & \mathcal{K}^0 \otimes \mathcal{L}^3 \arrow[u, "\partial\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes d"] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

3. ábra. Tenzor szorzat komplexus

**5.3. Feladat.** *Legyenek $\mathcal{K}^{\cdot}$ és $\mathcal{L}^{\cdot}$ komplexusok, tegyük fel, hogy az egyik pontrahúzható (2.17. Következmény). Bizonyítsd be, hogy a $\overline{\mathcal{K}^{\cdot} \otimes \mathcal{L}^{\cdot}}$ tenzor szorzat is pontrahúzható!*

*Ötlet:* A tenzor szorzás funktor. Ezért ha egy homotópiát az identitással tenzor-szorzunk, homotópiát kapunk. $\square$

**5.4. Definíció.** *Legyenek $M$ és $N$ modulusok. Válasszunk egy $\mathcal{F}. \to M$ lapos feloldást (4.2. Definíció), most alsó indexet használunk (1.2. Konvenció). Készítsük el az $\mathcal{F}. \otimes N$ komplexust (5.1. Definíció). Ennek az $n$-edik homológiája (alsó indexekkel, lásd az 1.2. Konvenciót) a* $\mathrm{Tor}_n(M, N)$ *modulus:*

$$\mathrm{Tor}_n(M, N) = H_n\big(\mathcal{F}. \otimes N\big)$$

**5.5. Megjegyzés.** *Bár a jelölésből most kimaradt, a tenzor szorzat, és így a* $\mathrm{Tor}_n$ *modulusok is függenek az $R$ gyűrűtől. Ha szükséges kiírnunk, akkor a pontosabb $M \otimes_R N$ illetve* $\mathrm{Tor}_N^R(M, N)$ *jelölések használhatók.*

**5.6. Megjegyzés.** *Most egy kommutatív gyűrű felett dolgozunk, ezért $M \otimes N$ és* $\mathrm{Tor}_n(M, N)$ *is modulusok. Általában, ha $S$ nem-kommutatív gyűrű, $M_S$ és ${}_SN$ jobb- illetve baloldali $S$-modulusok, akkor értelmezhetők az $M_S \otimes_S {}_SN$ és a* $\mathrm{Tor}_n^S(M_S, {}_SN)$ *Abel csoportok, de ezek nem lesznek $S$-modulusok.*

**5.7. Lemma.** *Legyenek $M$ és $N$ modulusok. A* $\mathrm{Tor}_n(M, N)$ *modulus definíciója nem függ a feloldás választásától. Sőt, a másik tényező tetszőleges $\mathcal{G}. \to N$ lapos feloldásával kaphatunk egy alternatív definíciót* *is:*

$$\mathrm{Tor}_n(M, N) = H_n\big(M \otimes \mathcal{G}.\big)$$

*Ötlet:* Mind a két feloldást használjuk. Alkalmazzuk a 3.24. Következményt az $\mathcal{F}. \otimes N$ és az $M \otimes \mathcal{G}.$ komplexusokra, a kettős komplexus hiányzó részét a $\mathcal{F}. \otimes \mathcal{G}.$ tenzor szorzat komplexussal (5.2. Definíció) töltjük ki.

Ezzel beláttuk, hogy az $M$ feloldásából számított $\mathrm{Tor}_n(M, N)$ modulus izomorf az $N$ feloldásából számítottal, és ez utóbbi izomorf azzal, amit az $M$ egy másik feloldásából kapunk. □

**5.8. Feladat.** *Dolgozd ki részletesen az 5.7. Lemma bizonyítását!*

**5.9. Feladat.** *A tenzor-szorzat szimmetrikus. Lásd be, hogy a* $\mathrm{Tor}_n$ *funktor is az:*

$$\mathrm{Tor}_n(A, B) \cong \mathrm{Tor}_n(B, A)$$

*Mit mondhatunk az asszociativitásról?*

**5.10. Tétel.** *Legyen* $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ *egy rövid egzakt sorozat és* $M$ *egy modulus. Ekkor létezik az alábbi hosszú egzakt sorozat, amelyik funktoriálisan függ a rövid egzakt sorozattól és* $M$*-től:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots\cdots \mathrm{Tor}_2(A, M) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_2(B, M) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_2(C, M) \arrow[dll, rounded corners, "\delta_*" description] \\
\mathrm{Tor}_1(A, M) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1(B, M) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1(C, M) \arrow[dll, rounded corners, "\delta_*" description] \\
A \otimes M \arrow[r, "f \otimes M"] & B \otimes M \arrow[r, "g \otimes M"] & C \otimes M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

*Bizonyítás.* Alkalmazzuk a $\_ \otimes M$ funktort a 4.6. Lemmában készült szabad feloldásokra. Így komplexusok rövid egzakt sorozatához jutunk. Erre alkalmazzuk a 2.6. Tételt, így jutunk a kívánt egzakt sorozathoz. □

**5.11. Feladat.** *Bizonyítsd be, hogy egy* $M$ *modulus pontosan akkor lapos, ha* $\mathrm{Tor}_1(M, N) = 0$ *minden* $N$ *modulusra! Mutasd meg, hogy ilyenkor* $\mathrm{Tor}_n(M, N) = 0$ *minden* $n \geq 1$ *egészre!*

**5.12. Feladat.** *Legyenek* $I$, $J$ *ideálok egy (tetszőleges) gyűrűben. Lásd be, hogy*

$$\mathrm{Tor}_1\Big(R/I, R/J\Big) = (I \cap J)/IJ$$

**5.13. Feladat.** *Legyen* $R$ *egy nullosztómentes főideálgyűrű.*

(a) *Lásd be, hogy egy $M$ modulus pontosan akkor torzió-mentes, ha* $\mathrm{Tor}_1(M,N)=0$ *minden $N$-re!*

(b) *Legyenek $M$ és $N$ modulusok. Lásd be, hogy* $\mathrm{Tor}_1(M,N)$ *torzió modulus! Lásd be, hogy* $\mathrm{Tor}_1(M,N)$ *pontosan azokra a $p \in R$ primekre tartalmaz $p$-torziót, amelyekre mind az $M$, mind az $N$ torzió része tartalmaz $p$-torziót!*

(c) *Legyenek $M$ és $N$ végesen generált modulusok, a struktúra tétel szetrint felírhatók prímhatvány rendű ciklikus modulusok direkt összegeként. Számítsd ki* $\mathrm{Tor}_1(M,N)$*-et!*

## 6. Homomorfizmus komplexus, Ext funktor

**6.1. Definíció.** *Legyen most $M$ egy modulus, $\mathcal{L}^{\cdot}$ egy fölül-indexelt komplexus, $\mathcal{K}.$ pedig a következő alul-indexelt komplexus:*

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{K}_{p+1} \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_p \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_{p-1} \xrightarrow{\partial} \cdots$$

*Ha a* $\mathrm{Hom}(\_\,,M)$ *funktort a $\mathcal{K}.$ komplexusra alkalmazzuk, akkor a „sorrend megfordul", az alábbi* $\mathrm{Hom}(\mathcal{K}.,M)^{\cdot}$ *(felül indexelt) komplexust kapjuk:*

$$\cdots \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\partial,M)} \mathrm{Hom}(\mathcal{K}_{p-1},M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\partial,M)} \mathrm{Hom}(\mathcal{K}_p,M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\partial,M)} \mathrm{Hom}(\mathcal{K}_{p+1},M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\partial,M)} \cdots$$

*Ha pedig a* $\mathrm{Hom}(M,\_\,)$ *funktort alkalmazzuk a $\mathcal{L}^{\cdot}$ komplexusra, akkor „megmarad az eredeti sorrend", az alábbi* $\mathrm{Hom}(M,\mathcal{L}^{\cdot})^{\cdot}$ *(felül indexelt) komplexust kapjuk:*

$$\cdots \xrightarrow{\mathrm{Hom}(M,d)} \mathrm{Hom}(M,\mathcal{L}^{p-1}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(M,d)} \mathrm{Hom}(M,\mathcal{L}^{p}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(M,d)} \mathrm{Hom}(M,\mathcal{L}^{p+1}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(M,d)} \cdots$$

**6.2. Megjegyzés.** *Ha a* $\mathrm{Hom}(\_\,,M)$ *funktort egy fölül indexelt komplexusra alkalmazzuk, vagy ha a* $\mathrm{Hom}(M,\_\,)$ *funktort egy alul indexelt komplexusra alkalmazzuk, akkor az eredmény egy alul indexelt komplexus lesz.*

**6.3. Definíció.** *Legyen most $\mathcal{L}^{\cdot}$ egy felül indexelt komplexus (1.2. Konvenció), $\mathcal{K}.$ pedig a következő alul-indexelt komplexus:*

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{K}_{p+1} \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_p \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_{p+1} \xrightarrow{\partial} \cdots$$

*A* homomorfizmus komplexusuk *(4. ábra) az alábbi,* $\mathrm{Hom}\big(\mathcal{K}.,\mathcal{L}^{\cdot}\big)$*-lel jelölt (fölül indexelt) kettős komplexus:*

$$\mathrm{Hom}\big(\mathcal{K}.,\mathcal{L}^{\cdot}\big)^{p,q} = \mathrm{Hom}\big(\mathcal{K}_p,\mathcal{L}^q\big)\ ,\quad df : k \to d\big(f(k)\big)\ ,\quad \partial(f) : k \to f\big(\partial(k)\big)$$

*Az ehhez tartozó totális komplexust mi* $\overline{\mathrm{Hom}\big(\mathcal{K}.,\mathcal{L}^{\cdot}\big)}$*-lel jelöljük. (Más könyvekben gyakran a* $\mathrm{Hom}\big(\mathcal{K}.,\mathcal{L}^{\cdot}\big)$ *jelölést használják a totális komplexusra is.)*

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
{} \arrow[r] & \operatorname{Hom}\left(\mathcal{K}_2,\mathcal{L}^0\right) \arrow[u, "_\circ\partial"'] \arrow[r, "d\circ_"] & \operatorname{Hom}\left(\mathcal{K}_2,\mathcal{L}^1\right) \arrow[u, "_\circ\partial"'] \arrow[r, "d\circ_"] & \operatorname{Hom}\left(\mathcal{K}_2,\mathcal{L}^2\right) \arrow[u, "_\circ\partial"'] \arrow[r, "d\circ_"] & \operatorname{Hom}\left(\mathcal{K}_2,\mathcal{L}^3\right) \arrow[u, "_\circ\partial"'] \arrow[r, "d\circ_"] & {} \\
{} \arrow[r] & \operatorname{Hom}\left(\mathcal{K}_1,\mathcal{L}^0\right) \arrow[u, "_\circ\partial"'] \arrow[r, "d\circ_"] & \operatorname{Hom}\left(\mathcal{K}_1,\mathcal{L}^1\right) \arrow[u, "_\circ\partial"'] \arrow[r, "d\circ_"] & \operatorname{Hom}\left(\mathcal{K}_1,\mathcal{L}^2\right) \arrow[u, "_\circ\partial"'] \arrow[r, "d\circ_"] & \operatorname{Hom}\left(\mathcal{K}_1,\mathcal{L}^3\right) \arrow[u, "_\circ\partial"'] \arrow[r, "d\circ_"] & {} \\
{} \arrow[r] & \operatorname{Hom}\left(\mathcal{K}_0,\mathcal{L}^0\right) \arrow[u, "_\circ\partial"'] \arrow[r, "d\circ_"] & \operatorname{Hom}\left(\mathcal{K}_0,\mathcal{L}^1\right) \arrow[u, "_\circ\partial"'] \arrow[r, "d\circ_"] & \operatorname{Hom}\left(\mathcal{K}_0,\mathcal{L}^2\right) \arrow[u, "_\circ\partial"'] \arrow[r, "d\circ_"] & \operatorname{Hom}\left(\mathcal{K}_0,\mathcal{L}^3\right) \arrow[u, "_\circ\partial"'] \arrow[r, "d\circ_"] & {} \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

4. ábra. Homomorfizmus komplexus. Itt $\circ$ jelöli a függvény-kompozíciót, egy vonal (azaz _ ) pedig a változót, ami ez esetben egy homomorfizmus

**6.4. Feladat.** *Legyenek $\mathcal{K}_\cdot$ és $\mathcal{L}^\cdot$ komplexusok, tegyük fel, hogy az egyik pontrahúzható (lásd a 2.17. Következményt). Bizonyítsd be, hogy a* $\overline{\operatorname{Hom}\left(\mathcal{K}_\cdot,\mathcal{L}^\cdot\right)}$ *totális komplexus is pontrahúzható!*

*Ötlet:* A Hom egy funktor. Ezért ha egy homotópiát az identitással Hom-ozunk, homotópiát kapunk. □

**6.5. Definíció.** *Legyenek $M$ és $N$ modulusok. Válasszunk egy $\mathcal{F}_\cdot \to M$ projektív feloldást (4.2. Definíció), most alsó indexet használunk (1.2. Konvenció). Készítsük el a* $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_\cdot, N)$ *komplexust (ez már felülindexelt, lásd a 6.1. Definíciót). Ennek az $n$-edik homológiája az* $\operatorname{Ext}^n(M,N)$ *modulus:*

$$\operatorname{Ext}^n(M,N) = H^n\Big(\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_\cdot, N)\Big)$$

**6.6. Megjegyzés.** *Bár a jelölésből most kimaradt, a* Hom *modulus, és így az* $\operatorname{Ext}^n$ *modulusok is függenek az $R$ gyűrűtől. Ha szükséges kiírnunk, akkor a pontosabb* $\operatorname{Hom}_R(M,N)$ *illetve* $\operatorname{Ext}^n_R(M,N)$ *jelölések használhatók.*

**6.7. Megjegyzés.** *Most egy kommutatív gyűrű felett dolgozunk, ezért* $\operatorname{Hom}(M,N)$ *és* $\operatorname{Ext}^n(M,N)$ *is modulusok. Általában, ha $S$ nem-kommutatív gyűrű, ${}_SM$ és ${}_SN$ mindketten baloldali $S$-modulusok, akkor értelmezhetők az* $\operatorname{Hom}_S({}_SM,\, {}_SN)$ *és az* $\operatorname{Ext}^n_S({}_SM,\, {}_SN)$ *Abel csoportok, de ezek nem lesznek $S$-modulusok.*

**6.8. Lemma.** *Legyenek $M$ és $N$ modulusok. Az $\mathrm{Ext}^n(M,N)$ modulus definíciója nem függ a feloldás választásától. Sőt, a másik tényező tetszőleges $N \to \mathcal{I}^{\cdot}$ injektív feloldásával (4.3. Definíció) kaphatunk egy alternatív definíciót is:*

$$\mathrm{Ext}^n(M,N) = H^n\Big(\mathrm{Hom}(M,\mathcal{I}^{\cdot})\Big)$$

**6.9. Feladat.** *Bizonyítsd be a 6.8. Lemmát: imitáld az 5.7. Lemma bizonyítát!*

**6.10. Feladat.** *Adnak-e a szokásos* Hom-$\otimes$ *azonosságok* Ext-Tor *azonosságokat?*

**6.11. Tétel.** *Legyen $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ egy rövid egzakt sorozat és $M$ egy modulus. Ekkor létezik az alábbi hosszú egzakt sorozat, amelyik funktoriálisan függ a rövid egzakt sorozattól és $M$-től:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(C,M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(B,M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(A,M) \arrow[dll, "\delta^*"] \\
& \mathrm{Ext}^1(C,M) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(B,M) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(A,M) \arrow[dll, "\delta^*"] \\
& \mathrm{Ext}^2(C,M) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2(B,M) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2(A,M) \quad \cdots\cdot
\end{tikzcd}$$

*Bizonyítás.* Alkalmazzuk a $\mathrm{Hom}(\_,M)$ funktort a 4.6. Lemmában készült szabad feloldásokra. Így komplexusok rövid egzakt sorozatához jutunk, Erre alkalmazzuk a 2.6. Tételt, így jutunk a kívánt egzakt sorozathoz. $\square$

**6.12. Tétel.** *Legyen $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ egy rövid egzakt sorozat és $M$ egy modulus. Ekkor létezik az alábbi hosszú egzakt sorozat, amelyik funktoriálisan függ a rövid egzakt sorozattól és $M$-től:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M,A) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M,B) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M,C) \arrow[dll, "\delta^*"] \\
& \mathrm{Ext}^1(M,A) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(M,B) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(M,C) \arrow[dll, "\delta^*"] \\
& \mathrm{Ext}^2(M,A) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2(M,B) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2(M,C) \quad \cdots\cdot
\end{tikzcd}$$

*Bizonyítás.* Alkalmazzuk a $\operatorname{Hom}(M, \_)$ funktort a 4.6. Lemmában készült injektív feloldásokra. Így komplexusok rövid egzakt sorozatához jutunk, Erre alkalmazzuk a 2.6. Tételt, így jutunk a kívánt egzakt sorozathoz. □

Íme az 5.11. Feladat analógiája projektív és injektív modulusokkal:

**6.13. Feladat.** *Bizonyítsd be, hogy egy $M$ modulus pontosan akkor projektív, ha $\operatorname{Ext}^1(M, N) = 0$ minden $N$ modulusra! Mutasd meg, hogy ilyenkor $\operatorname{Ext}^n(M, N) = 0$ minden $n \geq 1$ egészre!*

**6.14. Feladat.** *Bizonyítsd be, hogy egy $M$ modulus pontosan akkor injektív, ha $\operatorname{Ext}^1(N, M) = 0$ minden $N$ modulusra! Mutasd meg, hogy ilyenkor $\operatorname{Ext}^n(N, M) = 0$ minden $n \geq 1$ egészre!*

## 7. Univerzális Együttható Tételek — algebra

**7.1. Tétel** (Univerzális Együttható tétel tenzor szorzatra)**.** *Adott egy nullosztómentes főideálgyűrű. Legyen $\mathcal{K}.$ egy szabad modulusokból épült komplexus (alul indexelt, lásd az 1.2. Konvenciót) és $G$ egy tetszőleges modulus. Minden $n$-re létezik egy egzakt sorozat:*

$$0 \to H_n(\mathcal{K}.) \otimes G \to H_n\big(\mathcal{K}. \otimes G\big) \to \operatorname{Tor}_1\Big(H_{n-1}(\mathcal{K}.), G\Big) \to 0$$

*amelyik funktoriálisan függ $\mathcal{K}.$-tól és $G$-től. Az egzakt sorozat felhasad. (A felhasadás nem kanonikus.)*

*Bizonyítás.* Választunk egy kétlépéses szabad feloldást (lásd a 4.4. Tények (i) pontját):

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_0 \to G \to 0$$

Ha ezt tenzor-szorozzuk a $\mathcal{K}.$ komplexussal (lásd az 5.2. Definíciót) az alábbi kettőskomplexushoz jutunk.

$$\begin{array}{|c|}\hline \mathcal{K}. \otimes G \\ \hline \\ \mathcal{K}. \otimes \mathcal{F}. \\ \\ \hline\end{array}$$

A 3.22. Következmény szerint a $\mathcal{K}. \otimes G$ komplexus lánc-ekvivalens a $\mathcal{K}. \otimes \mathcal{F}.$ szorzat totális komplexusával. A $\mathcal{K}. \otimes \mathcal{F}.$ szorzat pedig egy kétsoros kettős komplexus, alkalmazható rá a 3.26. Tétel. Mivel az $\mathcal{F}_n$ modulusok szabadok, a velük való szorzás felcserélhető a homológia funktorral (mert egzakt, lásd a 4.1. Definíciót). A 3.25. Definícióbeli első táblázat így néz ki:

$$E_1^{\cdot\cdot} \quad = \quad \begin{array}{|c|} \hline H.(\mathcal{K}.) \otimes \mathcal{F}_0 \\ \hline H.(\mathcal{K}.) \otimes \mathcal{F}_1 \\ \hline \end{array}$$

Ebből látható, hogy a második táblázat így alakul:

$$E_2^{\cdot\cdot} \quad = \quad \begin{array}{|c|} \hline H.(\mathcal{K}.) \otimes G \\ \hline \mathrm{Tor}_1\big(H.(\mathcal{K}.), G\big) \\ \hline \end{array}$$

(lásd a 3.25. Definíciót és az 5.4. Definíciót). Tehát a 3.26. Tételben szereplő egzakt sorozat megegyezik a bizonyítandó egzakt sorozattal, és a 3.28. Tétel miatt felhasad. □

**7.2. Feladat.** *A 7.1. Tétel bizonyításában alsó indexeket használtunk (1.2. Konvenció) míg a 3.26. Tételben felső indexek vannak. Ellenőrizd, hogy helyesen alkalmaztuk a 3.26. Tételt! Mutasd meg, hogy a kapott egzakt sorozat valóban funktoriálisan függ $\mathcal{K}.$-tól és $G$-től!*

**7.3. Feladat.** *A 7.1. Tétel bizonyításában használtuk a 3.22. Következményt. Lásd be, hogy a szóbanforgó kettős komplexus oszlopai valóban egzaktak!*

**7.4. Tétel** (Univerzális Együttható tétel Hom-komplexusra)**.** *Adott egy nullosztómentes főideálgyűrű. Legyen $\mathcal{K}.$ egy szabad modulusokból épült komplexus (alul indexelt, lásd az 1.2. Konvenciót) és $G$ egy tetszőleges modulus. Minden $n$-re létezik egy egzakt sorozat:*

$$0 \to \mathrm{Ext}^1\Big(H_{n-1}(\mathcal{K}.), G\Big) \to H^n\Big(\mathrm{Hom}(\mathcal{K}., G)^{\cdot}\Big) \to \mathrm{Hom}\Big(H_n(\mathcal{K}.), G\Big) \to 0$$

*(lásd a 6.1. Definíciót) amelyik funktoriálisan függ $\mathcal{K}.$-tól és $G$-től. Az egzakt sorozat felhasad. (Ez a felhasítás nem kanonikus.)*

*Bizonyítás.* Választunk egy kétlépéses injektív feloldást (lásd a 4.4. Tények (i) pontját):

$$0 \to G \to \mathcal{I}^0 \to \mathcal{I}^1 \to 0$$

Alkalmazzuk a Hom funktort a $\mathcal{K}.$ komplexusra és erre a feloldásra (lásd a 6.3. Definíciót), az alábbi kettőskomplexushoz jutunk:

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \mathrm{Hom}(\mathcal{K}., \mathcal{I}^{\cdot}) \\ \\ \hline \mathrm{Hom}(\mathcal{K}., G) \\ \hline \end{array}$$

A 3.22. Következmény szerint a $\mathrm{Hom}(\mathcal{K}_\cdot, G)$ komplexus lánc-ekvivalens a $\mathrm{Hom}(\mathcal{K}_\cdot, \mathcal{I}^\cdot)$ totális komplexusával. A $\mathrm{Hom}(\mathcal{K}_\cdot, \mathcal{I}^\cdot)$ pedig egy kétsoros kettős komplexus, alkalmazható rá a 3.26. Tétel. Mivel az $\mathcal{I}^n$ modulus injektív, a $\mathrm{Hom}(\_, \mathcal{I}^n)$ funktor felcserélhető a homológia funktorral (mert egzakt, lásd a 4.1. Definíciót). A 3.25. Definícióbeli első táblázat így néz ki:

$$E_1^{\cdot\cdot} \quad = \quad \begin{array}{|c|}\hline \mathrm{Hom}\left(H^\cdot(\mathcal{K}_\cdot), \mathcal{I}^1\right) \\ \hline \mathrm{Hom}\left(H^\cdot(\mathcal{K}_\cdot), \mathcal{I}^0\right) \\ \hline \end{array}$$

Ebből látható, hogy a második táblázat így alakul:

$$E_2^{\cdot\cdot} \quad = \quad \begin{array}{|c|}\hline \mathrm{Hom}\left(H^\cdot(\mathcal{K}_\cdot), G\right) \\ \hline \mathrm{Ext}^1\left(H^\cdot(\mathcal{K}_\cdot), G\right) \\ \hline \end{array}$$

(lásd a 3.25. Definíciót és az 5.4. Definíciót). Tehát a 3.26. Tétel egzakt sorozata megegyezik a bizonyítandó egzakt sorozattal, és a 3.28. Tétel miatt felhasad. □

**7.5. Feladat.** *Ellenőrizd a 7.4. Tétel bizonyításában az indexeket! Mutasd meg, hogy a kapott egzakt sorozat valóban funktoriálisan függ $\mathcal{K}_\cdot$-tól és $G$-től!*

**7.6. Feladat.** *A 7.4. Tétel bizonyításában használtuk a 3.22. Következményt. Lásd be, hogy a szóbanforgó kettős komplexus oszlopai valóban egzaktak!*

**7.7. Feladat.** *A 7.1. Tételben a* $\mathrm{Tor}_1$ *csoport a jobboldalon áll, míg a 7.4. Tételben az* $\mathrm{Ext}^1$ *csoport a baloldalon bukkan fel. Hogyan lehetséges ez — hiszen mindkét tételt a 3.22. Következmény segítségével bizonyítottuk?*

**7.8. Feladat.** *Adott egy $F$ test. Legyen $\mathcal{K}_\cdot$ egy $F$-vektortér komplexus és $F \leq G$ egy testbővítés. Lásd be, hogy*

$$\begin{aligned} H_n\big(\mathcal{K}_\cdot \otimes G\big) &\cong H_n\big(\mathcal{K}_\cdot\big) \otimes G \\ H^n\Big(\mathrm{Hom}(\mathcal{K}_\cdot, G)\Big) &\cong \mathrm{Hom}\Big(H^n(\mathcal{K}_\cdot), G\Big) \end{aligned}$$

## 8. Külső szorzás — algebra

**8.1. Tétel.** *Legyenek $\mathcal{K}_\cdot$ és $\mathcal{L}_\cdot$ modulus komplexusok! Ekkor minden $p, q$ párra létezik egy természetes* külső szorzás *(angolul* cross product*):*

$$H_p\big(\mathcal{K}_\cdot\big) \otimes H_q\big(\mathcal{L}_\cdot\big) \xrightarrow{\times} H_{p+q}\big(\overline{\mathcal{K}_\cdot \otimes \mathcal{L}_\cdot}\big)$$

*Gyakran érdemes az egyazon $p+q=n$ értékekhez tartozó külső szorzásokat együtt, az alábbi direkt összegben vizsgálni:*

$$\bigoplus_{p+q=n} H_p(\mathcal{K}.)\otimes H_q(\mathcal{L}.) \xrightarrow{\times} H_n\big(\overline{\mathcal{K}.\otimes\mathcal{L}.}\big)$$

*Bizonyítás.* Jelölje $\partial$, $d$ illetve $D$ a három komplexus ($\mathcal{K}.$, $\mathcal{L}.$ és a szorzat) differenciálját! Tekintsük az alábbi részkomplexusokat:

$$\mathrm{Im}(\partial).\le\mathrm{Ker}(\partial).\le\mathcal{K}.\ ,\quad \mathrm{Im}(d).\le\mathrm{Ker}(d).\le\mathcal{L}.\ ,$$

$$\mathrm{Im}(D).\le\mathrm{Ker}(D).\le\mathcal{K}.\otimes\mathcal{L}.\ .$$

Az alábbi relációk azonnal láthatók $D$ definíciójából (5.2. Definíció):

$$\mathrm{Ker}(\partial)_p\otimes\mathrm{Ker}(d)_q\ \le\ \mathrm{Ker}(D)_{p+q}\ ,$$

$$\Big(\mathrm{Im}(\partial)_p\otimes\mathrm{Ker}(d)_q\ +\ \mathrm{Ker}(\partial)_p\otimes\mathrm{Im}(d)_q\Big)\ \le\ \mathrm{Im}(D)_{p+q}\ .$$

Ezután a tétel következik az alábbai, a $Q\le P$ és $T\le S$ modulusokra vonatkozó azonosságból:

$$P\otimes S\Big/\big(\widehat{P\otimes T}\ +\ \widehat{Q\otimes S}\big)\ \cong\ \big(P/Q\big)\otimes\big(S/T\big)\ , \tag{1}$$

ahol $\widehat{P\otimes T}$ és $\widehat{Q\otimes S}$ a részmodulusok tenzorszorzatának képét jelöli a $P\otimes S$ tenzorszorzatban. □

**8.2. Feladat.** *Igazold az (1) azonosságot!*

**8.3. Tétel.** *Legyen $0\to\mathcal{A}.\to\mathcal{B}.\to\mathcal{E}.\to 0$ komplexusok egy rövid egzakt sorozata, $\mathcal{K}.$ egy modulus komplexus. Tegyük fel, hogy $\mathcal{E}.$ lapos modulusokból áll, így még két egzakt sorozathoz jutunk:*

$$0\to\mathcal{A}.\otimes\mathcal{K}.\to\mathcal{B}.\otimes\mathcal{K}.\to\mathcal{E}.\otimes\mathcal{K}.\to 0$$

$$0\to\mathcal{K}.\otimes\mathcal{A}.\to\mathcal{K}.\otimes\mathcal{B}.\to\mathcal{K}.\otimes\mathcal{E}.\to 0$$

*Mindhárom sorozathoz tartozik egy-egy hosszú egzakt sorozat (2.6. Tétel), jelölje $\delta_*$ a határ-homomorfizmusokat. Tetszőleges $e\in H_p\big(\mathcal{E}.\big)$ és $k\in\ H_q(\mathcal{K}.)$ homológia-osztályokre teljesülnek a következő külső szorzat azonosságok:*

$$\delta_*(e\times k)=\delta_*(e)\times k\quad,\qquad \delta_*(k\times e)=(-1)^{\deg(k)}k\times\delta_*(e)$$

*Bizonyítás.* Jelölje $d$, $\partial$ és $D$ a $\mathcal{B}.$, $\mathcal{K}.$ és $\overline{\mathcal{B}.\otimes\mathcal{K}.}$ komplexusok differenciálját! Válasszunk az $e$, $k$ elemekhez $\underline{e}\in\mathcal{E}_p$ és $\underline{k}\in\mathcal{K}_q$ reprezentánsokat!

Az alábbi kommutatív diagramon a függőleges nyilak a $k$-val való külső szorzást reprezentálják:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A}. \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\otimes\underline{k}"] & \mathcal{B}. \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\otimes\underline{k}"] & \mathcal{E}. \arrow[r] \arrow[d, "\otimes\underline{k}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}.\otimes\mathcal{K}. \arrow[r, "\tilde{f}"] & \mathcal{B}.\otimes\mathcal{K}. \arrow[r, "\tilde{g}"] & \mathcal{E}.\otimes\mathcal{K}. \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Mivel $\partial(\underline{k}) = 0$, azért a 2.6. Tétel szerint a $\delta_*(e\times k)$ homológia-osztályt az alábbi lánc reprezentálja:

$$\tilde{f}^{-1}\Big(D\big(\tilde{g}^{-1}(\underline{e}\otimes\underline{k})\big)\Big) = \tilde{f}^{-1}\Big(D\big(g^{-1}(\underline{e})\otimes\underline{k}\big)\Big) =$$

$$= \tilde{f}^{-1}\Big(d\big(g^{-1}(\underline{e})\big)\otimes\underline{k} + (-1)^{\deg(\underline{e})}g^{-1}(\underline{e})\otimes\cancelto{0}{\partial(\underline{k})}\Big) =$$

$$= f^{-1}\Big(d\big(g^{-1}(\underline{e})\big)\Big)\otimes\underline{k}\ ,$$

Itt a $(-1)^{\deg(\underline{e})}$ előjel a szorzat komplexus differenciáljából (5.2. és 3.3. Definíciók) származik. Az utolsó sorból látható, hogy ugyanez a lánc reprezentálja a $\delta_*(e)\times k$ homológia-osztályt is. Ez bizonyítja az első azonosságot. Tekintsük most a másik oldalról való külső szorzást:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A}. \arrow[r] \arrow[d, "\underline{k}\otimes"'] & \mathcal{B}. \arrow[r] \arrow[d, "\underline{k}\otimes"'] & \mathcal{E}. \arrow[r] \arrow[d, "\underline{k}\otimes"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}.\otimes\mathcal{K}. \arrow[r] & \mathcal{B}.\otimes\mathcal{K}. \arrow[r] & \mathcal{E}.\otimes\mathcal{K}. \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Az alábbi számolásban $D^*$ jelöli a $\overline{\mathcal{B}.\otimes\mathcal{K}.}$ szorzat differenciálját. Most is $\partial(\underline{k}) = 0$, tehát a 2.6. Tétel szerint a $\delta_*(k\times e)$ homológia-osztályt az alábbi lánc reprezentálja:

$$\tilde{f}^{-1}\Big(D^*\big(\tilde{g}^{-1}(\underline{k}\otimes\underline{e})\big)\Big) = \tilde{f}^{-1}\Big(D^*\big(\underline{k}\otimes g^{-1}(\underline{e})\big)\Big) =$$

$$= \tilde{f}^{-1}\Big(\cancelto{0}{\partial(\underline{k})}\otimes g^{-1}(\underline{e}) + (-1)^{\deg(\underline{k})}\underline{k}\otimes d\big(g^{-1}(\underline{e})\big)\Big) =$$

$$= (-1)^{\deg(\underline{k})}\underline{k}\otimes f^{-1}\Big(d\big(g^{-1}(\underline{e})\big)\Big)$$

Itt a $(-1)^{\deg(\underline{k})} = (-1)^{\deg(k)}$ előjel a szorzat komplexus differenciáljából (5.2. és 3.3. Definíciók) származik. Az utolsó sorból látható, hogy a $(-1)^{\deg(k)}k\times\delta_*(e)$ homológia-osztályt is ugyanez a lánc reprezentálja. Ez bizonyítja a második azonosságot. $\square$

**8.4. Feladat.** *A 8.1. Tétel segítségével építs ilyen külső szorzatot is:*

$$H^p\Big(\operatorname{Hom}\big(\mathcal{K}.\,, M\big)\Big)\otimes H^q\Big(\operatorname{Hom}\big(\mathcal{L}.\,, N\big)\Big) \xrightarrow{\times} H^{p+q}\Big(\overline{\operatorname{Hom}\big(\mathcal{K}.\otimes\mathcal{L}., M\otimes N\big)}\Big)$$

*Megint összegezhetjük az egyazon $p+q=n$ értékhez tartozó szorzásokat:*

$$\bigoplus_{p+q=n} H^p\Big(\operatorname{Hom}\big(\mathcal{K}.\,, M\big)\Big)\otimes H^q\Big(\operatorname{Hom}\big(\mathcal{L}.\,, N\big)\Big) \xrightarrow{\times} H^{n}\Big(\overline{\operatorname{Hom}\big(\mathcal{K}.\otimes\mathcal{L}.\,, M\otimes N\big)}\Big)$$

*Ötlet:* Lineáris függvények szorzata bi-lineáris, ez ad egy (modulusokra vonatkozó) funktoriális homomorfizmust:

$$\operatorname{Hom}(X,M)\otimes\operatorname{Hom}(Y,N)\to\operatorname{Hom}\big(X\otimes Y, M\otimes N\big)$$

□

**8.5. Feladat.** *Az előzőek mintájára építs ilyen külső szorzatot is (alsó, és felső indexekkel):*

$$H^p\Big(\operatorname{Hom}\big(\mathcal{K}.\,, M\big)\Big)\otimes H^q\Big(\mathcal{L}^{\cdot}\Big) \xrightarrow{\times} H^{p+q}\Big(\overline{\operatorname{Hom}\big(\mathcal{K}.\,, \mathcal{L}^{\cdot}\otimes M\big)}\Big)$$

*Megint összegezhetjük az egyazon $p+q=n$ értékhez tartozó szorzásokat:*

$$\bigoplus_{p+q=n} H^p\Big(\operatorname{Hom}\big(\mathcal{K}.\,, M\big)\Big)\otimes H^q\Big(\mathcal{L}^{\cdot}\Big) \xrightarrow{\times} H^{n}\Big(\overline{\operatorname{Hom}\big(\mathcal{K}.\,, \mathcal{L}^{\cdot}\otimes M\big)}\Big)$$

**8.6. Tétel.** *Legyen $0\to\mathcal{F}.\to\mathcal{A}.\to\mathcal{B}.\to 0$ komplexusok egy rövid egzakt sorozata, $\mathcal{K}.$ egy modulus komplexus. Legyenek továbbá $M$ és $N$ tetszőleges modulusok. Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}.$ és $\mathcal{K}.$ projektív modulusokból áll, így még három egzakt sorozathoz jutunk:*

$$0\to\operatorname{Hom}\big(\mathcal{B}., M\big)\to\operatorname{Hom}\big(\mathcal{A}., M\big)\to\operatorname{Hom}\big(\mathcal{F}., M\big)\to 0$$

$$0\to\operatorname{Hom}\big(\mathcal{B}.\otimes\mathcal{K}., M\otimes N\big)\to\operatorname{Hom}\big(\mathcal{A}.\otimes\mathcal{K}., M\otimes N\big)\to\operatorname{Hom}\big(\mathcal{F}.\otimes\mathcal{K}., M\otimes N\big)\to 0$$

$$0\to\operatorname{Hom}\big(\mathcal{K}.\otimes\mathcal{B}., N\otimes M\big)\to\operatorname{Hom}\big(\mathcal{K}.\otimes\mathcal{A}., N\otimes M\big)\to\operatorname{Hom}\big(\mathcal{K}.\otimes\mathcal{F}., N\otimes M\big)\to 0$$

*A hozzájuk tartozú hosszú egzakt sorozatokban (2.6. Tétel) jelölje $\delta^*$ a határ-homomorfizmusokat. Tetszőleges $e\in H^p\big(\operatorname{Hom}(\mathcal{F}., M)\big)$ és $k\in H^q\big(\operatorname{Hom}(\mathcal{K}., N)\big)$ homológia-osztályokra teljesülnek a következő külső szorzat azonosságok:*

$$\delta^*(e\times k)=\delta^*(e)\times k \quad , \qquad \delta^*(k\times e)=(-1)^{\deg(k)}k\times\delta^*(e)$$

*Ötlet:* Imitáld a 8.3. Tétel bizonyítását! □

**8.7. Feladat.** *Miért nem következik a 8.6. Tétel a 8.3. Tételből? Keress olyan általánosítást, amelyikből már következik!*

**8.8. Feladat.** *Mondd ki, és lásd be a 8.3. Tétel megfelelőjét a külső szorzás a 8.4. Feladatbeli változatára! Vigyázat: a* Hom *funktor megfordítja az egzakt sorozatokat!*

## 9. Künneth Formulák — algebra

**9.1. Feladat.** *Adott egy test. Lásd be, hogy minden vektortér-komplexus lánc-homotóp (2.14. Definíció) egy olyan komplexussal, amelynek nulla a differenciálja.*

**9.2. Feladat.** *Adott egy $\mathbb{F}$ test, legyenek $\mathcal{K}^\cdot$ és $\mathcal{L}^\cdot$ vektortér-komplexusok az $\mathbb{F}$ felett. Lásd be, hogy a külső szorzás (8.1. Tétel) ebben az esetben izomorfizmust indukál:*

$$H^n\left(\overline{\mathcal{K}^\cdot \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{L}^\cdot}^\cdot\right) = \bigoplus_{p+q=n} H^p(\mathcal{K}^\cdot) \otimes_{\mathbb{F}} H^q(\mathcal{L}^\cdot)$$

Az előző két feladatot szeretnénk gyűrűkre általánosítani: a külső szorzás segítségével megpróbáljuk kiszámolni a direkt szorzat komplexus homológiáit. Mi most az egész számok gyűrűjére szorítkozunk, abel csoport együtthatókat használunk. (Az általános esethez nézd meg a Künneth spektrális sorozatot.)

**9.3. Lemma.** *Adott egy $R$ főideálgyűrű. Legyen $\mathcal{F}^\cdot$ egy szabad $R$-modulusokból épült komplexus, tegyük fel, hogy $H^n(\mathcal{F}^\cdot)$ is szabad minden $n$-re. Legyen $\mathcal{H}^\cdot$ az a komplexus, melyben $\mathcal{H}^n = H^n(\mathcal{F}^\cdot)$, és a differenciálja nulla. Ekkor létezik egy $\mathcal{F}^\cdot = \mathcal{H}^\cdot \oplus \mathcal{L}^\cdot$ felbontás, amelyben a $\mathcal{L}^\cdot$ részkomplexus pontrahúzható (2.17. Következmény). Megjegyezzük, hogy ez a felbontás egyáltalán nem kanonikus!*

*Bizonyítás.* Jelölje $d$ a $\mathcal{F}^\cdot$ komplexus differenciálját. A 2.1. Definíció miatt $\mathrm{Im}(d)^\cdot \leq \mathrm{Ker}(d)^\cdot \leq \mathcal{F}^\cdot$ rész-komplexusok. Tekintsük a következő rövid egzakt sorozatokat:

$$0 \to \mathrm{Ker}(d)^\cdot \hookrightarrow \mathcal{F}^\cdot \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(d)^{\cdot+1} \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Im}(d)^\cdot \hookrightarrow \mathrm{Ker}(d)^\cdot \twoheadrightarrow \mathcal{H}^\cdot \to 0$$

Világos, hogy a $\mathcal{H}^\cdot$ hányados komplexus differenciálja nulla, és a 2.3. Definíció miatt $\mathcal{H}^n = H^n(\mathcal{F})$, ami egy szabad $R$-modulud. A 4.4. Tények (h) pontja miatt $\mathrm{Ker}(d)^\cdot$ és $\mathrm{Im}(d)^\cdot$ is szabad $R$-modulusokból állnak. Egyszerű diagram vadászat mutatja, hogy mindkét egzakt sorozat felhasad (nem kanonikusan). Ezért

$$\mathcal{F}^n = \mathcal{H}^n \oplus \mathrm{Im}(d)^n \oplus \mathrm{Im}(d)^{n+1} .$$

Könnyen látható, hogy az $\mathrm{Im}(d)^n \oplus \mathrm{Im}(d)^{n+1}$ összeadandók egy részkomplexust alkotnak, ami izomorf az $\mathrm{Im}(d)^\cdot \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathrm{Im}(d)^\cdot$ izomorfizmus leképezés-kúpjával. A 3.15. Lemma bizonyításában láttuk, hogy egy ilyen leképezés-kúp pontrahúzható. $\square$

**9.4. Feladat.** *Dolgozd ki részletesen a 9.3. Lemma bizonyítását.*

**9.5. Tétel.** *Legyenek $R$ egy főideálgyűrű, $\mathcal{E}.$ és $\mathcal{F}.$ $R$-modulus komplexusok. (Alsó indexeket használunk, lásd az 1.2. Konvenciót.) Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}_n$ és $H_n(\mathcal{F}.)$ szabad $R$-modulusok minden $n$-re. Ekkor a külső szorzás (8.1. Tétel) egy izomorfizmust ad:*

$$H_n\Big(\overline{\mathcal{E}. \otimes_R \mathcal{F}.}^{\cdot}\Big) = \bigoplus_{p+q=n} H_p(\mathcal{E}.) \otimes_R H_q(\mathcal{F}.)$$

*Bizonyítás.* A 9.3. Lemma ad egy $\mathcal{F}. = \mathcal{H}. \oplus \mathcal{L}.$ felbontást, ahol a $\mathcal{H}.$ részkomplexus differenciálja nulla, $\mathcal{L}^{\cdot}$ pedig pontrahúzható (lásd a 2.17. Következményt). Látható, hogy $H_n(\mathcal{F}.) \cong H_n(\mathcal{H}.) \cong \mathcal{H}_n$. Másrészt pedig

$$\overline{\mathcal{E}. \otimes_R \mathcal{F}.}^{\cdot} \cong \overline{\mathcal{E}. \otimes_R \mathcal{H}.}^{\cdot} \oplus \overline{\mathcal{E}. \otimes_R \mathcal{L}.}^{\cdot} ,$$

és az $\overline{\mathcal{E}. \otimes_R \mathcal{L}.}^{\cdot}$ tag pontrahúzható (lásd alább a 9.6. Feladatot). A $\mathcal{E}. \otimes_R \mathcal{H}.$ kettős komplexusban a vízszintes differenciál (a $\mathcal{H}.$-ből származó, lásd a 3. ábrán) nulla, ebből következik az alábbi direkt összeg felbontás:

$$\overline{\mathcal{E}. \otimes_R \mathcal{H}.}^{\cdot} \cong \bigoplus_q \big(\mathcal{E}._{-q} \otimes_R \mathcal{H}_q\big) \cong \bigoplus_q \big(\mathcal{E}._{-q} \otimes_R H_q(\mathcal{F}.)\big)$$

ahol a $\cdot - q$ index azt jelenti, hogy az eredeti komplexusban minden komponens fokszámát $q$-val csökkentjük. Használva, hogy $H_q(\mathcal{F}.)$ szabad $R$-modulus, az alábbi könnyű számolás mutatja a tétel igaz voltát:

$$H_n\big(\overline{\mathcal{E}. \otimes_R \mathcal{F}.}^{\cdot}\big) \cong H_n\big(\overline{\mathcal{E}. \otimes_R \mathcal{H}.}^{\cdot}\big) \cong$$
$$\cong \bigoplus_q H_{n-q}\big(\overline{\mathcal{E}. \otimes_R H_q(\mathcal{F}.)}^{\cdot}\big) \cong \bigoplus_q H_{n-q}(\mathcal{E}.) \otimes_R H_q(\mathcal{F}.)$$

$\square$

**9.6. Feladat.** *Lásd be, hogy ha $\mathcal{E}.$, $\mathcal{L}.$ $R$-modulus komplexusok, és $\mathcal{L}.$ pontrahúzható, akkor $\overline{\mathcal{E}. \otimes \mathcal{L}.}^{\cdot}$ is pontrahúzható! (Ezt használtuk a 9.5. Tétel bizonyításában.)*

**9.7. Tétel.** *Legyenek $R$ egy főideálgyűrű, $\mathcal{E}.$ és $\mathcal{F}^{\cdot}$ $R$-modulus komplexusok. (Alsó és felső indexeket is használunk, lásd az 1.2. Konvenciót.) Legyen továbbá $M$ egy $R$-modulus. Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}^n$ és $H^n(\mathcal{F}^{\cdot})$ szabad $R$-modulusok minden $n$-re. Ekkor a külső szorzás (8.5. Feladat) egy izomorfizmust ad:*

$$H^n\Big(\overline{\mathrm{Hom}_R(\mathcal{E}., \mathcal{F}^{\cdot} \otimes_R M}^{\cdot}\Big) \cong \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}_R\Big(H^p\big(\mathrm{Hom}_R(\mathcal{E}., M)\big), H^q(\mathcal{F}^{\cdot})\Big)$$

*Ötlet.* A 9.5. Tétel bizonyítása majdnem szó szerint alkalmazható itt is. $\square$

**9.8. Feladat.** *A 9.5. Tétel bizonyítását imitálva lásd be a 9.7. Tételt.*

## 10. Általános Künneth tételek — algebra

Az előző fejezetben olyan szituációkat kerestünk, amikor pontosan ki tudjuk számolni bizonyos komplexusok tenzor szorzatának a homológiáit. Most ennél sokkal általánosabb tenzor szorzatok homológiáit vizsgáljuk. Az általánosságnak ára van: pontos formulák helyett csak egzakt sorozatokat kapunk.

**10.1. Lemma.** *Legyen $\mathcal{F}^{\cdot}$ egy szabad Abel csoportokból épült komplexus, $d$ jelölia differenciálját. Tekintsük az $\mathrm{Im}(d)^{\cdot} \leq \mathrm{Ker}(d)^{\cdot} \leq \mathcal{F}^{\cdot}$ rész-komplexusokat: ezek szabad Abelcsoportokból állnak, és a differenciáljuk nulla. Konstruálható egy*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(d)^{\cdot} \longrightarrow \mathrm{Ker}(d)^{\cdot} \oplus \mathcal{L}^{\cdot} \longrightarrow \mathcal{F}^{\cdot} \longrightarrow 0$$

*rövid egzakt sorozat, ahol $\mathcal{L}^{\cdot}$ egy (szabad Abel csoportokból álló) pontrahúzható komplexus.*

*Bizonyítás.* Mivel $d^2 = 0$, azért $\mathrm{Im}(d)^{\cdot} \leq \mathrm{Ker}(d)^{\cdot}$. A 4.4. Tények (h) pontja miatt $\mathrm{Im}(d)^{\cdot}$ és $\mathrm{Ker}(d)^{\cdot}$ szabad modulusokból áll, és a definícióból azonnal következik, hogy a differenciáljuk (tehát $d$ megszorítása) nulla. Tekintsük a $d : \mathcal{F}^{\cdot} \to \mathrm{Im}(d)^{\cdot+1}$ lánc-homomorfizmust. Elkészítjük hozzá a 3.10. Definícióbeli egzakt sorozatot. Állítjuk, hogy ez kielégíti a lemma követelményeit.

Valóban, a sorozatban szereplő leképezés-kúp szemmel látjatóan szabad Abel csoportokból épült, és a 3.18. Feladat miatt homotóp ekvivalens $\mathrm{Ker}(d)^{\cdot}$-vel. Ezért a homológiái is szabad modulusok, a 9.3. Lemma megadja a keresett direkt összeg felbontást. $\square$

**10.2. Tétel.** *Legyenek $\mathcal{E}.$ és $\mathcal{F}.$ Abel csoport komplexusok. (Alsó indexeket használunk, lásd az 1.2. Konvenciót.) Tegyük fel, hogy $\mathcal{E}_n$ szabad minden $n$-re. Ekkor létezik egy funktoriális egzakt sorozat:*

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_p(\mathcal{E}.) \otimes H_q(\mathcal{F}.) \to H_n\Big(\overline{\mathcal{E}. \otimes \mathcal{F}.}^{\cdot}\Big) \to \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1\Big(H_p(\mathcal{E}.), H_q(\mathcal{F}.)\Big) \to 0$$

*Ez a sorozat felhasad (nem kanonikusan), és ad egy (szintén nem kanonikus) izomorfizmust:*

$$H_n\Big(\overline{\mathcal{E}. \otimes \mathcal{F}.}^{\cdot}\Big) = \bigoplus_{p+q=n} H_p\Big(\mathcal{E}. \otimes H_q(\mathcal{F}.)\Big)$$

*Bizonyítás.* Jelölje $d$ az $\mathcal{E}.$ komplexus differenciálját. A 10.1. Lemma ad egy

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im}(d). \longrightarrow \operatorname{Ker}(d). \oplus \mathcal{L}. \longrightarrow \mathcal{E}. \longrightarrow 0$$

egzakt sorozatot. Alkalmazzuk rá a $\_ \otimes \mathcal{F}.$ funktort, így kajuk az alábbi háromsoros diagramot:

$$\begin{array}{|c|}\hline \mathcal{E}. \otimes \mathcal{F}. \\ \hline \big(\operatorname{Ker}(d). \oplus \mathcal{L}.\big) \otimes \mathcal{F}. \\ \operatorname{Im}(d). \otimes \mathcal{F}. \\ \hline \end{array}$$

Úgy indexelünk, hogy az elválasztó vonal alatt van a nulladik sor, fölötte pedig az első. Ez valójában egy „hármas komplexus”, de most kettős komplexusként kezeljük: a sorokba a megfelelő totális komplexust írjuk. A 3.22. Következmény szerint a felső sor lánc-ekvivalens az alsó két sor totális komplexusával. Erre a kétsoros kettős komplexusra alkalmazzuk a 3.26. Tételt. Be fogjuk látni, hogy a kapott egzakt sorozat megegyezik az általunk keresett sorozattal. A felhasadás tehát a 3.28. Tételből következik.

Mivel $\mathcal{L}.$ pontrahúzható, azért az $\mathcal{L}. \otimes \mathcal{F}.$ szorzat is az (5.3. Feladat). Az $E_1^{\cdot\cdot}$ táblázatban a sorok homológiáját kell írni, tehát a $\mathcal{L}. \otimes \mathcal{F}.$ tagot bátran elhagyhatjuk az első sorból. A megmaradó kettős komplexusban a vízszintes irányú differenciálok nullák (10.1. Lemma: $\operatorname{Im}(d).$ és $\operatorname{Ker}(d).$ differenciálja nulla), tehát az alábbi direkt összegre bomlik:

$$\begin{array}{|c|}\hline \operatorname{Ker}(d). \otimes \mathcal{F}. \\ \operatorname{Im}(d). \otimes \mathcal{F}. \\ \hline \end{array} = \bigoplus_p \begin{array}{|c|}\hline \operatorname{Ker}(d)_p \otimes \mathcal{F}._{-p} \\ \operatorname{Im}(d)_p \otimes \mathcal{F}._{-p} \\ \hline \end{array}$$

A $\operatorname{Ker}(d)_p$ és az $\operatorname{Im}(d)_p$ szorzók szabad modulusok, a velük való szorzás egzakt funktor, tehát az $E_1^{\cdot\cdot}$ táblázat így alakul:

$$E_1^{\cdot\cdot} = \bigoplus_p \begin{array}{|c|}\hline H.\big(\operatorname{Ker}(d)_p \otimes \mathcal{F}._{-p}\big) \\ H.\big(\operatorname{Im}(d)_p \otimes \mathcal{F}._{-p}\big) \\ \hline \end{array} = \bigoplus_p \begin{array}{|c|}\hline \operatorname{Ker}(d)_p \otimes H._{-p}\big(\mathcal{F}.\big) \\ \operatorname{Im}(d)_p \otimes H._{-p}\big(\mathcal{F}.\big) \\ \hline \end{array}$$

Másrészt a $0 \to \operatorname{Im}(d)_p \to \operatorname{Ker}(d)_p \to H_p(\mathcal{E}.) \to 0$ egzakt sorozat éppen a $H_p(\mathcal{E}.)$ szabad feloldása. Az ebben szereplő $\operatorname{Im}(d)_p \to \operatorname{Ker}(d)_p$ homomorfizmust $H_q(\mathcal{F}_p)$-vel szorozva éppen az $E_1^{\cdot\cdot}$ táblázat $p$-edik összeadandójának egy oszlopát kapjuk. Éppen ez a komplexus szerepel a Tor funktor definíciójában (5.4. Definíció), tehát az $E_2^{\cdot\cdot}$ táblázat így alakul:

$$E_2^{\cdot\cdot} = \bigoplus_p \begin{array}{|c|}\hline H_p(\mathcal{E}.) \otimes H._{-p}(\mathcal{F}.) \\ \operatorname{Tor}_1\big(H_p(\mathcal{E}.), H._{-p}(\mathcal{F}.)\big) \\ \hline \end{array}$$

A 3.26. Tételből tehát valóban a keresett egzakt sorozatot kapjuk, és az valóban felhasad. Ebből következik az alábbi (nem kanonikus) izomorfizmus:

$$H_n\Big(\overline{\mathcal{E}.\otimes\mathcal{F}.}^{\cdot}\Big) \cong \left(\bigoplus_{p+q=n} H_p(\mathcal{E}.)\otimes H_q(\mathcal{F}.)\right)\oplus\left(\bigoplus_{p+q=n-1}\mathrm{Tor}_1\Big(H_p(\mathcal{E}.),H_q(\mathcal{F}.)\Big)\right)$$

Számítsuk ki a $H_p\Big(\mathcal{E}.\otimes H_q(\mathcal{F}.)\Big)$ csoportot az Univerzális Együttható tétel (7.1. Tétel) segítségével:

$$H_p\Big(\mathcal{E}.\otimes H_q(\mathcal{F}.)\Big) \cong \Big(H_p(\mathcal{E}.)\otimes H_q(\mathcal{F}.)\Big)\oplus \mathrm{Tor}_1\Big(H_{p-1}(\mathcal{E}.),H_q(\mathcal{F}.)\Big)$$

Ezt összegezve az olyan $p,q$ párokra, amelyek összege $n$, éppen a fenti izomorfizmus jobb oldalát kapjuk. Ez bizonyítja a 10.2. Tétel utolsó egyenletét. □

**10.3. Feladat.** *A 10.2. Tétel bizonyításában alsó indexekkel dolgoztunk, míg a felhasznált korábbi lemmákban, tételekben felső indexek szerepelnek. Ellenőrizd, hogy helyesen alkalmaztuk-e őket (azaz jól hoztuk-e alulra az indexeket)!*

**10.4. Tétel.** *Legyenek $\mathcal{E}.$ és $\mathcal{F}^{\cdot}$ Abel csoport komplexusok. (Alsó és felső indexeket is használunk, lásd az 1.2. Konvenciót.) Tegyük fel, hogy $\mathcal{E}_n$ szabad minden $n$-re. Ekkor létezik egy funktoriális egzakt sorozat:*

$$0\to\bigoplus_{p+q=n-1}\mathrm{Ext}^1\Big(H_p(\mathcal{E}.),H^q(\mathcal{F}^{\cdot})\Big)\to$$

$$\to H^n\Big(\overline{\mathrm{Hom}(\mathcal{E}.,\mathcal{F}^{\cdot})}^{\cdot}\Big)\to\bigoplus_{p+q=n}\mathrm{Hom}\Big(H_p(\mathcal{E}.),H^q(\mathcal{F}^{\cdot})\Big)\to 0$$

*Ez a sorozat felhasad (nem kanonikusan), és ad egy (szintén nem kanonikus) izomorfizmust:*

$$H^n\Big(\overline{\mathrm{Hom}(\mathcal{E}.,\mathcal{F}^{\cdot})}^{\cdot}\Big)=\bigoplus_{p+q=n}H^p\Big(\mathrm{Hom}\big(\mathcal{E}.,H^q(\mathcal{F}^{\cdot})\big)\Big)$$

*Bizonyítás.* Jelölje $d$ az $\mathcal{E}.$ komplexus differenciálját. A 10.1. Lemma ad egy

$$0\longrightarrow\mathrm{Im}(d).\longrightarrow\mathrm{Ker}(d).\oplus\mathcal{L}.\longrightarrow\mathcal{E}.\longrightarrow 0$$

egzakt sorozatot. Alkalmazzuk rá a $\mathrm{Hom}(\_,\mathcal{F}^{\cdot})$ funktort (ez megfordítja a sorrendet, és fölül-indexelt komplexust ad, lásd a 6.3. Definíció), így kapjuk az alábbi háromsoros diagramot:

| |
|---|
| $\operatorname{Hom}\big(\operatorname{Im}(d).\,,\mathcal{F}^{\cdot}\big)$ |
| $\operatorname{Hom}\big(\operatorname{Ker}(d).\oplus\mathcal{L}.\,,\,\mathcal{F}^{\cdot}\big)$ |
| $\operatorname{Hom}\big(\mathcal{E}.\,,\mathcal{F}^{\cdot}\big)$ |

Most úgy indexelünk, hogy az elválasztó vonal fölött van a nulladik sor, alatta pedig a $(-1)$-edik! Ez valójában egy „hármas komplexus", de most kettős komplexusként kezeljük: a sorokba a megfelelő totális komplexust írjuk. A 3.22. Következmény szerint az alsó sor lánc-ekvivalens az fölső két sor totális komplexusával. Erre a kétsoros kettős komplexusra alkalmazzuk a 3.26. Tételt. Be fogjuk látni, hogy a kapott egzakt sorozat megegyezik az általunk keresett sorozattal. A felhasadás tehát a 3.28. Tételből következik.

Mivel $\mathcal{L}.$ pontrahúzható, azért a $\operatorname{Hom}\big(\mathcal{L}.\,,\mathcal{F}^{\cdot}\big)$ komplexus is az (6.4. Feladat). Az $E_1^{\cdot\cdot}$ táblázatban a sorok homológiáját kell írni, tehát a $\operatorname{Hom}\big(\mathcal{L}.\,,\mathcal{F}^{\cdot}\big)$ tagot bátran elhagyhatjuk az első sorból. A megmaradó kettős komplexusban a vízszintes irányú differenciálok nullák (10.1. Lemma: $\operatorname{Im}(d).$ és $\operatorname{Ker}(d).$ differenciálja nulla), tehát az alábbi direkt összegre bomlik:

$$\boxed{\begin{matrix}\operatorname{Hom}\big(\operatorname{Im}(d).\,,\mathcal{F}^{\cdot}\big)\\ \operatorname{Hom}\big(\operatorname{Ker}(d).\,,\mathcal{F}^{\cdot}\big)\end{matrix}} = \bigoplus_p \boxed{\begin{matrix}\operatorname{Hom}\big(\operatorname{Im}(d)_p\,,\mathcal{F}^{\cdot-p}\big)\\ \operatorname{Hom}\big(\operatorname{Ker}(d)_p\,,\mathcal{F}^{\cdot-p}\big)\end{matrix}}$$

Most $\operatorname{Ker}(d)_p$ és $\operatorname{Im}(d)_p$ szabad modulusok, a velük való Hom-ozás egzakt funktor, tehát az $E_1^{\cdot\cdot}$ táblázat így alakul:

$$E_1^{\cdot\cdot} = \bigoplus_p \boxed{\begin{matrix}H^{\cdot}\big(\operatorname{Hom}\big(\operatorname{Im}(d)_p\,,\mathcal{F}^{\cdot-p}\big)\big)\\ H^{\cdot}\big(\operatorname{Hom}\big(\operatorname{Ker}(d)_p\,,\mathcal{F}^{\cdot-p}\big)\big)\end{matrix}} = \bigoplus_p \boxed{\begin{matrix}\operatorname{Hom}\big(\operatorname{Im}(d)_p\,,H^{\cdot-p}(\mathcal{F}^{\cdot})\big)\\ \operatorname{Hom}\big(\operatorname{Ker}(d)_p\,,H^{\cdot-p}(\mathcal{F}^{\cdot})\big)\end{matrix}}$$

Másrészt a $0\to\operatorname{Im}(d)_p\to\operatorname{Ker}(d)_p\to H_p(\mathcal{E}.)\to 0$ egzakt sorozat éppen a $H_p(\mathcal{E}.)$ szabad feloldása. Az ebben szereplő $\operatorname{Im}(d)_p\to\operatorname{Ker}(d)_p$ homomorfizmusra alkalmazzuk a $\operatorname{Hom}\big(\_\,,H^q(\mathcal{F}^p)\big)$ funktort — így éppen az $E_1^{\cdot\cdot}$ táblázat $p$-edik összeadandójának egy oszlopát kapjuk. Éppen ez a komplexus szerepel az Ext funktor definíciójában (6.5. Definíció), tehát az $E_2^{\cdot\cdot}$ táblázat így alakul:

$$E_2^{\cdot\cdot} = \bigoplus_p \boxed{\begin{matrix}\operatorname{Ext}^1\big(H_p(\mathcal{E}.),H^{\cdot-p}(\mathcal{F}^{\cdot})\big)\\ \operatorname{Hom}\big(H_p(\mathcal{E}.),H^{\cdot-p}(\mathcal{F}^{\cdot})\big)\end{matrix}}$$

A 3.26. Tételből tehát valóban a keresett egzakt sorozatot kapjuk, és az valóban felhasad. Ebből következik az alábbi (nem funktoriális) izomorfizmus:

$$H^n\Big(\overline{\mathrm{Hom}\left(\mathcal{E}_\cdot\,,\mathcal{F}^\cdot\right)}\Big)\cong\Bigg(\bigoplus_{p+q=n}\mathrm{Hom}\Big(H_p(\mathcal{E}_\cdot),H^q(\mathcal{F}^\cdot)\Big)\Bigg)\oplus\Bigg(\bigoplus_{p+q=n-1}\mathrm{Ext}^1\Big(H_p(\mathcal{E}_\cdot),H^q(\mathcal{F}^\cdot)\Big)\Bigg)$$

Számítsuk ki a $H^p\Big(\mathrm{Hom}\left(\mathcal{E}_\cdot\,,H^q(\mathcal{F}^\cdot)\right)\Big)$ csoportot az Univerzális Együttható tétel (7.1. Tétel) segítségével:

$$H^p\Big(\mathrm{Hom}\left(\mathcal{E}_\cdot\,,H^q(\mathcal{F}^\cdot)\right)\Big)\cong\mathrm{Hom}\Big(H_p(\mathcal{E}_\cdot)\,,H^q(\mathcal{F}^\cdot)\Big)\oplus\mathrm{Ext}^1\Big(H_{p-1}(\mathcal{E}_\cdot)\,,H^q(\mathcal{F}^\cdot)\Big)$$

Ezt összegezve az olyan $p,q$ párokra, amelyek összege $n$, éppen a fenti izomorfizmus jobb oldalát kapjuk. Ez bizonyítja a 10.4. Tétel utolsó egyenletét. $\square$

**10.5. Feladat.** *A 10.4. Tétel bizonyításában részben alsó indexekkel is dolgoztunk, míg a felhasznált korábbi lemmákban, tételekben felső indexek szerepelnek. Ellenőrizd, hogy helyesen alkalmaztuk-e őket (azaz jól hoztuk-e alulra az indexeket)!*

## 11. Terek, tér-párok

**11.1. Definíció.**

(a) *Egy* $(X,A)$ tér-pár *egy* $X$ *topológikus térből és egy* $A\subseteq X$ *altérből áll.*

(b) *Egy* $f:(X,A)\to(Y,B)$ pár-leképezés *egy olyan* $f:X\to Y$ *folytonos függvény, amelyre* $f(A)\subseteq B$.

(c) *Egy tér-pár és egy topológikus tér szorzata az alábbi tér-pár:*

$$(X,A)\times Z=\big(X\times Z,\ A\times Z\big)$$

(d) *Legyenek most* $f,g:(X,A)\to(Y,B)$ *pár-leképezések,* $[0,1]$ *jelöli az egység-intervallumot. Egy* $f\sim g$ pár-homotópia *egy olyan* $(X,A)\times[0,1]\to(Y,B)$ *pár-leképezés, amelyet* $X\times\{0\}$*-ra megszorítva* $f$*-et,* $X\times\{1\}$*-re megszorítva pedig* $g$*-t kapunk.*

(e) *Két térpár szorzata a következő tér-pár:*

$$(X,A)\times(Y,B)=\Big(X\times Y,\ \big(X\times B\cup A\times Z\big)\Big)$$

**11.2. Definíció.** *Ebben a jegyzetben* $\mathbb{T}\mathrm{op}$ *jelöli a* topológikus terek kategóriáját*, a morfizmusok a folytonos függvények.* $\mathbb{T}\mathrm{op}_2$ *pedid a* tér-párok kategóriáját *jelöli, morfizmusok a pár-leképezések.*

**11.3. Definíció.** *Egy* $(K,B)$ *párt* kompakt párnak *mondunk, ha* $K$ *kompakt és* $B$ *zárt* $K$*-ban.*

## 12. Lokális rendszerek, lapos nyalábok

**12.1. Definíció.** *Legyenek $X$, $Y$, $Z$ topológikus terek, $f : Y \to X$ és $g : Z \to X$ folytonos függvények. Azt mondjuk, hogy $f$ és $g$* izomorf $X$ felett*, ha van olyan $h : Y \to Z$ homeomorfizmus, amelyet $g$-vel komponálva éppen $f$-hez jutunk. Ilyenkor használjuk még a következő kifejezéseket is: $h$ egy* relatív homeomorfizmus *($X$ felett), $Y$ és $Y$ relatívan, vagy rostonként homeomorfak ($X$ felett).*

**12.2. Definíció** (nyaláb)**.** *Legyenek $X$, $Y$ és $F$ topológikus terek, $f : Y \to X$ egy folytonos függvény. Azt mondjuk, hogy $f$* lokálisan triviális, *és $F$ a* rostja*, ha $X$ minden pontjának van olyan $U$ környezete, amelyben az $F\big|_U : f^{-1}(U) \to U$ megszorítás $U$ felett izomorf az $F \times U \to U$ projekcióval. Ezeket az $U$ feletti izomorfizmusokat* lokális trivializációknak *hívjuk. Ilyen esetben azt mondjuk, hogy $f : Y \to X$ egy $F$-*nyaláb *(angolul: $F$-*bundle*), vagy másképpen, $F \to Y \xrightarrow{f} X$ egy* nyaláb *, vagy* fibrált nyaláb *(angolul:* fibre boundle*).*

Ezt a fogalmat általánosíthatjuk tér-párokra is:

**12.3. Definíció** (tér-pár nyaláb)**.** *Legyenek $(X, A)$ és $(F, B)$ tér-párok, $Y$ egy topológikus tér, $f : X \to Y$ egy folytonos függvény. Azt mondjuk, hogy*

$$f : (X, A) \to Y$$

*egy $(F, B)$-*nyaláb*, ha minden $y \in Y$ pontnak van egy $y \in U_y \subseteq Y$ környezete, amelyre $f^{-1}(U_y)$ homeomorf $(F, B) \times U_y$-nal. Ha nem akarjuk hangsúlyozni, hogy mi a rost, akkor egyszerűen egyszerűen* tér-pár nyalábról.

**12.4. Definíció** (Rost szorzat)**.** *Legyenek $X$, $Y$, $Z$ topológikus terek, $f : Y \to X$ és $g : Z \to X$ folytonos függvények. Az $Y$ éa $Z$ $X$* feletti rost-szorzatát *így definiáljuk:*

$$Y \times_X Z = \Big\{ (y, z) \in Y \times Z \,\Big|\, f(y) = g(z) \Big\}$$

*Amennyiben $f$ és $g$ lokálisan triviálisak $F$ és $G$ rosttal (12.2. Definíció), akkor $Y \times_X Z$ is lokálisan triviális $F \times G$ rosttal.*

Nem csak topológikus terekből készíthetünk nyalábokat, hanem szinte minden geometriai vagy algebrai objektumból is. Erre jó példa a vektornyaláb fogalma, ahol a rostok vektorterek. Íme, egy másik variáció, ahol a rostok Abel csoportok, diszkrét topológiával:

**12.5. Definíció** (Lokális rendszerek)**.** *Legyen $G$ egy Abel csoport, $X$ egy topológikus tér. Lássuk el a $G$-t a diszkrét topológiával. Egy $G$* rostú lokális renszer *egy $\gamma : Y \to X$ nyaláb $G$ rosttal, amin értelmezve van* *egy folytonos $Y \times_X Y \to Y$ szorzás (rostonkénti, 12.4. Definíció), és amelyben a $\gamma^{-1}(U) \cong G \times U$ lokális trivializációk választhatók szorzástartó módon. (Ez értelmes, hiszen a $G$-beli szorzás ad egy természetes rostonkénti szorzást az $G \times U \to U$ nyalábon.)*

**12.6. Megjegyzés.** *A vektor-nyalábokhoz hasonlóan a lokális rendszerek is megadhatók áttérési függvényekkel. Itt most lineáris transzformációk helyett $G$ automorfizmusait kell használni, és mivel most $G$ topológiája diszkrét, azért az áttérési függvények lokálisan konstans* $\mathrm{Aut}(G)$*-értékű függvények.*

**12.7. Konstrukció.** *Legye $X$ egy ívszerűen összefüggő, lokálisan pontrahúzható tér, $\tilde{X}$ jelöli az univerzális fedőterét. Legyen $G$ egy Abel csoport, és $\phi : \pi_1(X) \to \mathrm{Aut}(G)$ egy csoport homomorfizmus (az ilyen homomorfizmusokat hívják* reprezentációnak*). Lássuk el $G$-t a diszkrét topológiával! A $\pi_1(X)$ csoport hat az $\tilde{X}$ téren és a $G$ csoporton is, tekintsük a szorzat-hatást az $\tilde{X} \times G$ téren. A hatás szerinti faktor egy $G$ rostú nyaláb:*

$$(\tilde{X} \times G)/\pi_1(X) \longrightarrow \tilde{X}/\pi_1(X) \cong X \tag{2}$$

*Ráadásul az $X \times G \to X$ nyaláb a $G$-koordinátán ható (relatív) szorzással egy lokális rendszert alkot, és a $\pi_1(X)$-hatás felcserélhető ezzel a szorzással. Ezért a szorzás öröklődik a faktor térre is, (2) is egy $G$ rostú lokális rendszer.*

*Könnyen látható, hogy pontrahúzható téren minden lokális rendszer triviális. Ebből következik, hogy minden $X$ fölötti lokális rendszer megkapható ezzel a konstrukcióval.*

**12.8. Definíció.** *Az $\mathbb{R}$ rostú lokális rendszereket* lapos vektornyalá-boknak *hívjuk. Ezek tehát olyan vektor-nyalábok, amelyek megadhatók konstans áttérési függvényekkel — de most a rostok (vektorterek) topológiája diszkrét. Egy lapos nyalábok közti homomorfizmust* lapos homomorfizmusnak *mondunk, ha ebben a finomabb topológiában is folytonos — tehát lokálisan konstans mátrixokkal adható meg.*

**12.9. Megjegyzés.** *A 12.7. Konstrukcióban láttuk, hogy az $X$ tér fölötti $r$ rangú vektornyalábok bijekcióban vannak a $\pi_1(X)$ fundamentális csoport $r$-dimenziós (lineáris) reprezentációival.*

**12.10. Konstrukció** (rostonkénti homológia)**.** *Legyen $(F, B)$ egy térpár, $f : (X, A) \to Y$ egy $(F, B)$-nyaláb, $n \geq 0$ egész szám. Tegyük fel, hogy $Y$ lokálisan pontrahúzható, megmutatjuk, hogy az egyes $H_n\big(f^{-1}(y); \mathbb{Z}\big)$ homológia-csoportok (ahol $y$ végigfut $Y$ pontjain) összeállnak egy lokális rendszerré (12.5. Definíció). Ez az $f$ nyaláb* rostonkénti homológiája*, $\mathcal{H}_n(f; \mathbb{Z})$.*

*A lokális rendszer alaphalmaza, és az $Y$-ra való vetítése:*

$$Z = \bigcup_{y \in Y} H_n\big(f^{-1}(y); \mathbb{Z}\big) \ , \quad \pi : Z \longrightarrow Y$$

$$H_n\big(f^{-1}(y); \mathbb{Z}\big) \in h \xrightarrow{\pi} y \qquad \text{minden } y \in Y\text{-ra.}$$

*A vetítés rostjai Abel csoportok, izomorfak $H_n(F, B; \mathbb{Z})$-vel. Hátra van még, hogy topológiát adjunk a $Z$ alaphalmaznak. Legyen $U \subseteq Y$ egy pontrahúzható nyílt halmaz. Minden $y \in U$ pontra az $f^{-1}(y) \to f^{-1}(U)$ beágyazás homotóp ekvivalencia, ez együttvéve kiadnak egy kanonikus bijekciót:*

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{y \in U} H_n\big(f^{-1}(U); \mathbb{Z}\big) \to H_n\big(f^{-1}(U); \mathbb{Z}\big) \times U$$

*Lássuk el a $H_n\big(f^{-1}(U); \mathbb{Z}\big)$ homológia-csoportot a diszkrét topológiával, $\pi^{-1}(U)$-nek pedig adjuk a vele bijekcióban álló $H_n\big(f^{-1}(U); \mathbb{Z}\big) \times U$ szorzat-topológiáját. Ezt minden $U \subseteq Y$ pontrahúzható nyílt halmazzal elvégezzük. Ez indukál egy topológiát az egész $Z$ halmazon: egy részhalmaz pontosan akkor zárt, ha $\pi^{-1}(U)$-ba eső része zárt minden $U \subseteq Y$ pontrahúzható nyílt részhalmazra.*

**12.11. Definíció.** *Legyen $M$ egy differenciálható sokaság, $f : E \to M$ egy vektornyaláb. Tekintsük a $TE$, $TM$ érintő-nyalábokat! Az $f$ differenciálja egy $df : TE \to f^*TM$ nyaláb homomorfizmus, a magja $T_vE \leq TE$, a* vertikális nyaláb. *Ehhez választhatunk egy direkt komplementumot:*

$$TE = T_vE \oplus T_hE \quad , \qquad T_hE \cong f^*TM$$

*Egy ilyen direkt felbontást* konnexiónak *mondunk, $T_hE$ a* horizontális nyaláb *(ami persze függ a választásunktól). Több ekvivalens definíciót találsz még itt.*

Egy $N \subset E$ részsokaság *vízszintes*, vagy *horizontális*, ha $TN \leq T_hE$, azaz $N$ minden érintő-vektora vízszintes. Legyen $G \subseteq M$ egy sima görbe és $e \in E$ egy pont amelyre $f(e) \in G$. Picard tétele (differenciálegyenletek megoldása) miatt létezik (egyetlen) olyan $\tilde{G} \subset E$ sima görbe, amely átmegy az $e$ ponton, és amelyre $f(\tilde{G}) = G$. Ezt a $G$ *felemelésének* mondjuk. Ugyanezt a konstrukciót hívják még párhuzamos eltolásnak is (azaz $\tilde{G}$ „párhuzamos” $G$-vel).

Legyen most $G$ egy hurok. Az $e$-ből induló $\tilde{G}$ görbe másik végpontja nem feltétlenül hurok. Most $e$ végigfut a nyaláb megfelelő rostján (ami egy $V$ vektortér), így sok-sok vízszintes görbét kapunk. Ha a kezdőpontokhoz hozzárendeljük a végpontokat, akkor egy $V \to V$ monodrómia transzformációt kapunk. Nem nehéz belátni, hogy ez egy lineáris transzformáció. Ha most $G$ végigfut az összes $f(e)$-ből induló hurkon, akkor az összes így kapott transzformáció egy zárt részcsoportot alkot $GL(V)$-ben, ezt hívjuk a konnexió holonómia csoportjának.

Láttuk, hogy $M$ -beli görbéket mindig fel lehet emelni vízszintesen. Érdemes megvizsgálni, hogy mi a helyzet magasabb dimenziós részsokaságokkal:

**12.12. Definíció.** *Legyen $M$ egy $n$-dimenziós differenciálható sokaság, $E \to M$ egy vektornyaláb. Egy konnexió* lapos*, ha $E$ minden pontján keresztül húzható egy $n$-dimenziós vízszintes részsokaság.*

Picard tételének sok-dimenziós változata, a Frobenius tétel. Ennek segítségével látható, hogy egy konnexió pontosan akkor lapos, ha bármely két vízszintes vektormező Lie zárójele ismét vízszintes. Ez ekvivalens azzal, hogy a konnexió konnexió görbülete nulla.

**12.13. Megjegyzés.** *Legyen most $E \to M$ egy vektornyaláb egy lapos konnexióval. Világos, hogy egymással homotóp hurkok vízszintes felemeltjei is homotópok, tehát a (fent definiált) monodrómia ad egy $\pi_1(M) \to GL(V)$ reprezentációt, ezt hívjuk* monodrómia reprezentációnak. *Ez a reprezentáció ugyanaz, mint amit a 12.9. Megjegyzésben illetve a 12.7. Konstrukció-ban említünk.*

## 13. Fokszám

Ha $M$ egy kompakt (peremes) sokaság, akkor az $M/\partial M$ faktortérnek van egy kitüntetett pontja ($\partial Y$ képe), melynek komplementuma egy differenciálható sokaság. Ebben a fejezetben fontos, hogy ilyen „sokaság-szerű" objektumokkal dolgozzunk, ezért van szükségünk a következőkre:

**13.1. Definíció** (Csúcsos sokaság)**.** *Egy* kompakt csúcsos sokaság *egy $X$ kompakt Hausdorff topológikus tér a következő struktúrával ellátva:*

- *Egy $\mathcal{C} \subset X$ véges részhalmaz, ezek a pontok az $X$* csúcsai *(az üreshalmaz is megengedett),*
- *$X^\circ = X \setminus \mathcal{C}$ egy differenciálható sokaság (lehet pereme is), ezt az $X$* sima részének *modjuk.*
- *Megköveteljük, hogy $X^\circ$ lezártja az egész $X$ legyen, és*
- *$X$-nek legyen véges sok szimplexből álló szimplex-felbontása.*

*Az $X^\circ$ sima rész peremének lezártját az $X$* peremének *hívjuk, $\partial X$-szel jelöljük. Ha a perem üres, akkor $X$ egy* zárt csúcsos sokaság*. Világos, hogy minden csúcsos sokaság pereme zárt csúcsos sokaság (esetleg csúcs nélkül). Ha hangsúlyozni akarjuk, hogy $X$-nek lehet pereme, akkor* peremes csúcsos sokaságnak *mondjuk.*

*Az $X$ csúcsos sokaság* szimplex felbontása *egy olyan szimplex felbontás, amelyben a $\mathcal{C}$-beli pontok szerepelnek a felbontás csúcsai között, és amelyben $\partial X$ egy rész-komplexus.*

*$X$ egy* irányítása *nem más, mint az $X^\circ$ sima rész irányítása. Ha rögzítünk egy irányítást $X$-en, akkor* irányított csúcsos sokasággá *válik.*

**13.2. Példa.** *Hol találunk csúcsos sokaságokat:*

*(a) Minden kompakt differenciálható sokaság egyben csúcsos sokaság is (nulla csúccsal).*
*(b) Ha $M$ egy kompakt sokaság és $\partial M \neq \emptyset$, akkor az $M/\partial M$ faktor-tér egy csúcsos sokaság. Egy csúcsa van: $\partial M$ képe.*
*(c) Még általánosabban, ha $X$ egy $n$-dimenziós csúcsos sokaság, $A \subsetneq X$ egy $n$-dimenziós kompakt csúcsos részsokaság, akkor az $X/A$ faktortér is egy csúcsos sokaság. $X/A$-nak kétféle csúcsa van: egyrészt az $X/A$-ban lévő csúcsok $X/A$-ban is csúcsok maradnak, másrészt az $A$ képe is csúcs lesz.*

**13.3. Feladat.** *Lásd be, hogy egy kompakt csúcsos sokaság minden csúcsának van olyan környezete, amelyik homeomorf egy peremes sokaságra állított kúppal! Mi történik, hogy ha a definícióban a véges szimplex-felbontás helyett ezt a tulajdonságot követeljük meg?*

**13.4. Feladat.** *Hogyan definiálnád a (nem feltétlenül kompakt) csúcsos sokaságokat?*

**13.5. Definíció** (Csúcs-tartó leképezések)**.** *Legyenek $X$, $Y$ csúcsos sokaságok, $f : X \to Y$ egy folytonos függvény, $h : X \times [0,1] \to Y$ egy folytonos homotópia. Jelölje $\mathcal{C} \subset X$ az $X$ csúcsainak halmazát.*

- $f$ csúcs-tartó*, ha $X$ csúcsait csúcsokba viszi.*
- $f$ folytonosan differenciálható*, ha csúcs-tartó, és folytonosan differenciálható az $Y^\circ$ sima rész teljes ősképén (ami egy nyílt halmaz $X$-ben).*
- *Jelöljük $Z$-vel az $X \times [0,1]/\mathcal{C} \times [0,1]$ faktor-teret. Ez is egy csúcsos sokaság.*
- $h$ csúcs-tartó*, ha a $\mathcal{C} \times [0,1]$ halmaz minden pontját csúcsba küldi, azaz indukál egy $\bar{h} : Z \to Y$ csúcs-tartó folytonos függvényt.*
- $h$ folytonosan differenciálható*, ha csúcstartó, és az indukált $\bar{h} : Z \to Y$ leképezés folytonosan differenciálható.*
- *Két $X \to Y$ csúcstartó leképezés* csúcstartóan homotóp*, illetve* folytonosan diferenciálhatóan homotóp*, ha van köztük csúcstartó, illetve folytonosan differenciálható homotópia.*

**13.6. Tétel** (Differenciálható approximáció)**.** *Legyenek $X$, $Y$ kompakt csúcsos sokaságok (perem is megengedett). Jelölje $\mathcal{C}^0(X,Y)$ az $X \to Y$ folytonos csúcstartó leképezések terét a kompakt-nyílt topológiában.*

*(a)* $\mathcal{C}^0(X,Y)$ *lokálisan összefüggő (azaz minden pontjának van összefüggő környezete).*
*(b) Minden* $f : X \to Y$ *folytonos csúcstartó függvénynek van olyan környezete* $\mathcal{C}^0(X,Y)$*-ban, amelyik csupa* $f$*-fel csúcstartóan homotóp függvényből áll.*
*(c) A folytonosan differenciálható* $X \to Y$ *függvények sűrű halmazt alkotnak* $\mathcal{C}^0(X,Y)$*-ban.*
*(d) Minden* $f : X \to Y$ *folytonos csúcstartó függvény csúcstartóan homotóp egy* $\tilde{f} : X \to Y$ *folytonosan differenciálható függvénnyel.*
*(e) Ha az* $f, g : X \to Y$ *folytonosan differenciálható függvények csúcstartóan homotópok, akkor van közöttük folytonosan differenciálható homotópia is.*

*Bizonyítási ötletek.* (a) következik a Lebesgue-lemmából.
(b) az (a) átfogalmazása.
(c): egy $f(x)$ függvényt $\int f(x)K(x,y)\mathrm{d}y$ alakú függvényekkel közelíthetünk, ahol $K$ megfelelően választott folytonosan diferenciálható függvény.
(d) azonnal következik (b)-ből és (c)-ből.
Legyen $Z = X \times [0,1]/\mathcal{C} \times [0,1]$, ahol $\mathcal{C}$ az $X$ csúcsainak halmaza. (e) következik abból, ha a (d)-t alkalmazzuk $\mathcal{C}^0(Z,Y)$-ra. □

**13.7. Tétel** (Szimplíciális approximáció)**.** *Legyenek* $X$*,* $Y$ *kompakt csúcsos sokaságok, és* $f : X \to Y$ *egy csúcstartó folytonos leképezés.*
*(a) Létezik a két csúcsos sokaságnak olyan szimplex-felbontása (lásd a 13.1. Definíciót), és hozzá olyan* $g : X \to Y$ *szimplíciális leképezés, amely csúcstartó, és csúcstartóan homotóp* $f$*-fel.*
*(b) Legyenek továbbá* $x_1, \ldots, x_m \in X$ *olyan pontok, melyek környezetében* $f$ *folytonosan differenciálható, és a Jakobi determinánsa nem nulla. Ilyenkor megkövetelhetjük, hogy az* $x_1, \ldots, x_n$ *pontok egy-egy* $n$*-szimplex belsejében legyenek, ezeken a kitüntetett szimplexeken az* $f$ *és* $g$ *megegyezzen, sőt, ezeken a szimplexeken az egész* $f \sim g$ *homotópia is triviális legyen.*

*Emékeztető: egy* $h : X \times [0,1] \to Y$ *homotópia egy* $U \subseteq X$ *részhalmazon akkor* triviális, *ha az* $(u,t) \in U \times [0,1]$ *pontokban* $h(u,t)$ *csak* $u$*-tól függ,* $t$*-től független.*

**13.8. Definíció** (Differenciálható leképezés foka)**.** *Legyenek* $X$*,* $Y$ $n$*-dimenziós irányított zárt csúcsos sokaságok,* $f : X \to Y$ *egy folytonosan differenciálható leképezés. Válasszunk olyan* $y \in Y^\circ$ *belső pontot, amelyik az* $f$*-nek reguláris értéke! (Ilyen mindig van a Sard lemma miatt.) Számoljuk össze az* $f^{-1}(y)$ *pontjait* előjelesen*: egy pont* $+1$*-et ér, ha az*

*$f$ Jakobi determinánsa pozitív ebben a pontban, ha pedig negatív, akkor $-1$-nek számoljuk. Az így kapott (előjeles) összeg* $\deg(f)$*, az $f$* foka*. (Hamarosan belátjuk, hogy ez nem függ az $y$ választásától.)*

Mivel $y$ reguláris érték, azért véges sok őspéje van (tehát véges sok $\pm 1$-et kell összeadnunk), és a Jacobi determináns egyikben sem nulla. Ha $x \in f^{-1}(y)$, akkor az $f$ függvény diffeomorfizmus az $x$ pont egy kis környezete és az $y$ pont egy környezete között. Ha ez a diffeomorfizmus irányítás-tartó, akkor a Jakobi determináns előjele pozitív $x$-ben, ha pedig irányítás-fordító, akkor az előjel negatív.

**13.9. Tétel** (Differenciálható leképezés foka)**.** *Legyenek $X$, $Y$ $n$-dimenziós irányított zárt csúcsos sokaságok, $f : X \to Y$ egy folytonosan differenciálható leképezés.*

*(a) Ha $Y$ összefüggő, akkor $f$ foka nem függ a definícióban választott reguláris értéktől.*
*(b) Tegyük fel, hogy van olyan $Z$ kompakt* $(n+1)$*-dimenziós irányított csúcsos sokaság, melynek (irányított) pereme éppen $X$. Ha $f$ kiterjeszthető egy $Z \to Y$ folytonosan differenciálható függvénnyé, akkor* $\deg(f) = 0$*.*

*Bizonyítás.* Először az (a) állítással foglalkozunk. Tegyük fel, hogy $Y$ összefüggő! Legyenek $y, z \in Y$ reguláris értékek, jelölje $\deg_y(f)$ és $\deg_z(f)$ a kétféle ($y$-hoz, illetve $z$-hez tartozó) fokszámot! Alkalmazzuk a 13.7. Tételt az $f$ függvényre és az $\{x_1, \ldots, x_m\} = f^{-1}(y) \cup f^{-1}(z)$ véges ponthalmazra. Ez ad nekük szimplex-felbontásokat $X$-en és $Y$-on, és egy $g : X \to Y$ szimplíciális approximációt.

Tekintsünk egy $\sigma \subseteq Y$ $n$-szimplexet! A $g^{-1}(\sigma)$ őskép véges sok ($X$-beli) $n$-szimplexből áll, és ezen szimplexek belsejét $g$ diffeomorfan képezi le $\sigma$ belsejére. A 13.8. Definíció analógiájára számoljuk meg előjelesen a $g^{-1}(\sigma)$ őskép $n$-szimplexeit: azok a szimplexek, melyeken $g$ irányítástartó, $+1$-et érnek, azok pedig, ahol irányítás-fordító, $-1$-et. Az így kapott előjeles összeget $\deg_\sigma(g)$-vel jelöljük.

Világos, hogy ha $\sigma_y$ az $y$-t, tartalmazó $n$-szimplex, akkor $\deg_{\sigma_y}(g)$-t meghatározó előjeles összeg ugyanaz az összeg, mint amivel $\deg_y(f)$-et számoltuk a 13.8. Definícióban, és ha $\sigma_z$ a $z$-t tartalmazó $n$-szimplex, akkor $\deg_z(f) = \deg_{\sigma_z}(g)$. Tehát elegendő bebizonyítanunk, hogy $\deg_\sigma(g)$ nem függ a $\sigma$ szimplextől.

Legyen $\phi$ a $\sigma$ egy olyan $(n-1)$-dimenziós lapja, amelyik az $Y$ belsejében van. Jelölje $\tau \subseteq Y$ a lap másik oldalán élő $n$-szimplexet. Világos, hogy $g^{-1}(\phi)$ diszjunkt $(n-1)$-szimplexekből áll, melyek két-két $X$-beli $n$-szimplexet határolnak, és ezáltal párokba rendezzük a $g^{-1}(\sigma \cup \tau)$-beli

$n$-szimplexeket. Legyen $\phi' \subseteq g^{-1}(\phi)$ az egyik ilyen $(n-1)$-szimplex. A két szomszédos $n$-szimplex négyféleképpen helyezkedhet el:

- $g$ az egyiket $\sigma$-ra képezi, a másikat $\tau$-ba, mindkettőn irányítás-tartó.
- $g$ az egyiket $\sigma$-ra képezi, a másikat $\tau$-ba, mindkettőn irányítás-fordító.
- $g$ mindkettőt $\sigma$-ra képezi, az egyiken irányítás-tartó, a másikon irányítás-fordító (tehát $\phi'$ mentén van egy hajtásvonal).
- $g$ mindkettőt $\tau$-ra képezi, az egyiken irányítás-tartó, a másikon irányítás-fordító (tehát $\phi'$ mentén most is van egy hajtásvonal).

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a szimplex-pár mind a négy esetben a ugyanannyival járul hozzá $\deg_\sigma(g)$-hen mint $\deg_\tau(g)$-hez. Ez mindegyik párra érvényes, tehát $\deg_\sigma(g) = \deg_\tau(g)$. Mivel $Y$ összefüggő, azért szomszédos szimplexeken keresztül lépkedve $\sigma$-ból bármelyik $n$-szimplexbe. Így $\deg_\sigma(g)$ nem függ $\sigma$-tól sem. Az (a) állítást beláttuk.

A (b) állítás bizonyítása sokkal egyszerűbb. Legyen $F : Z \to Y$ a folytonosan differenciálható kiterjesztés. Válasszunk egy $y \in Y$ pontot, amelyik $f$-nek és $F$-nek is reguáris értéke! (Ilyen mindig van a Sard lemma miatt.) Erre az $y$-ra alkalmazzuk majd a 13.8. Definíciót. Az inverz függvény tételből következik, hogy $F^{-1}(y)$ egy egydimenziós peremes részsokaság $X$-ben (lásd itt). Mivel $X$ kompakt, azért $F^{-1}(y)$ véges sok szakasz és véges sok körvonal diszjunkt uniója. A szakaszok $\partial Z = X$-ből indulnak és oda térnek vissza, a körvonalak pedig elkerülik $X$-et. Ezért a szakaszok párokba rendezik $f^{-1}(y) \subseteq X$ pontjait, a pár egyik tagja mindig pozitívan, a másik pedig negatívan járul hozzá a $\deg(f)$-et definiáló összeghez. Tehát $f^{-1}(y)$ pontjai páronként kiejtik egymást, így $\deg(f) = 0$ ebben az esetben. □

**13.10. Definíció** (Folytonos leképezés foka)**.** *Legyenek $X$, $Y$ $n$-dimenziós irányított zárt peremes sokaságok, $f : X \to Y$ egy folytonos csúcstartó leképezés. Legyen $\tilde{f} : X \to Y$ egy olyan folytonosan differenciálható függvény amelyik csúcstartóan homotóp $f$-fel. Az $f$* foka*, jelölésben* $\deg(f)$*, legyen egyenlő $\tilde{f}$ fokával,* $\deg(\tilde{f})$*-fel (lásd a 13.8. Definíciót)!*

**13.11. Tétel** (Folytonos leképezés foka)**.** *Legyenek $X$, $Y$ $n$-dimenziós irányított zárt csúcsos sokaságok, $f : X \to Y$ egy folytonos csúcstartó leképezés.*

*(a) A 13.10. Definíció jó: mindig tudunk megfelelő $\tilde{f}$-ot választani, és minden választás ugyanakkora a fokú.*
*(b) Ha $g : X \to Y$ egy olyan folytonos csúcstartó leképezés, amelyik csúcstartóan homotóp $f$-fel, akkor* $\deg(f) = \deg(g)$.

(c) *Tegyük fel, hogy van olyan $Z$ $(n+1)$-dimenziós irányított csúcsos sokaság, melynek (irányított) pereme éppen $X$. Ha $f$ kiterjeszthető egy $Z \to Y$ folytonos csúcstartó függvénnyé, akkor* $\deg(f) = 0$.

*Bizonyítás.* A 13.6. Tétel miatt van olyan $\tilde{f} : X \to Y$ folytonosan differenciálható függvény amelyik csúcstartóan homotóp $f$-fel. Ha $\tilde{f}' : X \to Y$ egy másik $f$-fel pontozottan homotóp folytonosan differenciálható pontozott leképezés, akkor $\tilde{f}$ és $\tilde{f}'$ pontozottan homotópok egymással, tehát 13.6. Tétel miatt van közöttük egy $h : X \times [0,1] \to Y$ folytonosan differenciálható homotópia. Idézzük fel a 13.5. Definíciót: $h$ indukál egy $\tilde{h} : Z \to Y$ folytonosan differenciálható függvényt, ahol $Z = X \times [0,1] / \mathcal{C} \times [0,1]$, és $\mathcal{C}$ jelöli az $X$ csúcs-pontjainak halmazát. A 13.9. Tétel miatt a $h\big|_{\partial Z}$ megszorítás foka nulla.

Világos, hogy $Z$ pereme az $\overline{X}_0 \vee X_1$ csokor, ahol $X_0 = X \times \{0\}$, $X_1 = X \times \{1\}$, és a felülvonás jelöli az irányítás megfordítását. $h$ megszorítása $X_0$-ra, illetve $X_1$-re éppen $\tilde{f}$, illetve $\tilde{f}'$. Tehát a fentiek miatt $\deg(g) - \deg(f) = 0$. Ezzel az (a) állítást bebizonyítottuk.

A (b) állítás azonnal következik az (a) állításból, hiszen pontosan ugyanazok a függvények homotópok $f$-fel mint $g$-vel.

Legyen $F : Z \to Y$ a (c) állításban szereplő függvény. A 13.6. Tétel alapján választunk egy olyan $\tilde{F}$ folytonosan diferenciálható függvényt, amelyik $F$-fel csúcstartóan homotóp. Világos, hogy az $F|_X$ megszorítás csúcstartóan homotóp $f$-fel, tehát definíció szerint $\deg(f) = \deg(F|_X)$. Másrészt, 13.9. Tétel(b) miatt $\deg(F|_X) = 0$. Ezzel beláttuk a (c) állítást is. □

## 14. CW-komplexusok

**14.1. Konvenció.** *Legyen $X$ egy CW-komplexus. A következő jelöléseket használjuk: $X_n$ jelöli az $n$-vázát, $\{e_n^\alpha\}$ vagy $\{E_n^\alpha\}$ az $n$-cellák halmaza, $\partial e_n^\alpha$ az $e_n^\alpha$ cella pereme, $\phi_n^\alpha : \partial e_n^\alpha \to X_{n-1}$ a* ragasztó leképezés. *A definíció miatt $e_n^\alpha \cong B^n$ egy golyó, $\partial e_n^\alpha \cong S^{n-1}$ egy gömb, tehát $e_n^\alpha / \partial e_n^\alpha \cong S^n$ egy gömb, és $X_n / X_{n-1} = \bigvee_\alpha \left(e_n^\alpha / \partial e_n^\alpha\right) \cong \bigvee_\alpha S^n$ egy gömbökből álló csokor. Jelölje*

$$\mathrm{pr}_\alpha : X_n / X_{n-1} \to e_n^\alpha / \partial e_n^\alpha$$

*azt a leképezést, ami az $e_n^\alpha / \partial e_n^\alpha$ gömbön az identitás, a csokor összes többi tagját az $e_n^\alpha / \partial e_n^\alpha$ kitüntetett pontjána viszi.*

**14.2. Definíció.**

(a) *Legyenek $X$ és $Y$ CW-komplexusok. Az $X \times Y$ szorzat téren is van egy cella-felbontás: minden $X$-beli cellát megszorzunk minden $Y$-beli cellával. Ez a cella-felbontás ad egy CW-komplexust, aminek a topológiája esetleg finomabb, mint a szorzat-topológia. Ezt az $X$ és az $Y$* CW-szorzatának *hívjuk, és $X \times_{CW} Y$-nal jelöljük. Lásd még a 14.5. Feladatot és a 14.6. Feladatot!*

(b) *Legyenek $X$ és $Y$ CW-komplexusok. Egy $f : X \to Y$ folytonos függvényt* CW-függvénynek *mondunk (angolul cellular-map), ha minden $n$-re az $X$ $n$-vázát az $Y$ $n$-vázába viszi.*

(c) *Tekintsük $[0,1]$ intervallumon a következő cella-felbontást: a két végpont, és az intervallum belseje. Egy $X \times_{CW} [0,1] \to Y$ homotópiát* CW-homotópiának *hívnk, ha CW-függvény.*

(d) *Ha $X$ egy CW-komplexus és $A \leq X$ egy részkomplexus, akkor azt mondjuk, hogy $(X, A)$ egy* CW-pár*. (vesd össze a 11.1. Definícióval). Legyenek $(X, A)$ és $(Y, B)$ CW-párok. Egy $(X, A) \to (Y, B)$ pár-leképezést* CW-pár-leképezésnek *hívunk, ha egyúttal CW-leképezés is. Hasonló módon értelmezhető a* CW-pár-homotópia *fogalma.*

**14.3. Definíció.** *Ebben a jegyzetben $\mathbb{T}\mathrm{op}^{CW}$ jelöli a* CW-komplexusok kategóriáját *a morfizmusok a CW-függvények. Hasonlóan: $\mathbb{T}\mathrm{op}_2^{CW}$ jelöli a* CW-párok kategóriáját *a morfizmusok a CW-pár-leképezések. (vesd össze a 11.2. Definícióval).*

**14.4. Megjegyzés.** *A CW-komplexusokhoz hozzá tartozik a cella-felbontásuk. Bár ebben a jegyzetben nem foglalkozunk velük, hasonlóan fontos szerepük van az olyan topológikus tereknek, amelyek homotóp ekvivalensek egy CW-komplexussal. Ezeknek tehát nincs rögzített CW felbontásuk. A legtöbb CW-komplexusokra vonatkozó tétel általánosítható ilyen terekre is.*

**14.5. Feladat.** *Legyenek $X$, $Y$ CW-komplexusok, tegyük fel, hogy az egyikük lokálisan kompakt. Lásd be, hogy $X \times_{CW} Y$ és $X \times Y$ (azaz a kétféle szorzat-topológia) megegyezik.*

**14.6. Feladat.** *Legyenek $X$, $Y$ CW-komplexusok. Lásd be, hogy az $X \times_{CW} Y \xrightarrow{\mathrm{id}} X \times Y$ leképezés egy gyenge homotóp ekvivalencia! Lásd be, hogy ha $X$ lokálisan kompakt, akkor homeomorfizmus!*

**14.7. Tétel.** *Legyenek $X$ és $Y$ CW-komplexusok, $A \leq X$ egy részkomplexus.*

(a) *Minden $f : X \to Y$ folytonos függvény homotóp egy $\tilde{f}$ CW-függvénnyel.*

(b) *Továbbá, ha előre adott egy* $h : A \times [0,1] \to Y$ *homotópia az* $f\big|_A$ *megszorításból egy* $\tilde{f}_0$ *CW-függvénybe, akkor* $\tilde{f}$ *választható* $\tilde{f}_0$ *kiterjesztésének és az* $f \sim \tilde{f}$ *homotópia választható a* $h$ *kiterjesztésének.*

*Ötlet:* Dimenzió szerinti indukcióval bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az $X_n \leq X$ $n$-vázra igaz az állítás. Ezért az $\tilde{f}_0$ függvény és a $h$ homotópia kiterjeszthetők az $X_n \cup A$ részkomplexusra. Tekintsük az $X$ egyik $(n+1)$-celláját: ez egy $B^{n+1}$ golyó, $\partial B^{n+1} \to X_n$ ragasztó leképezéssel. A következő két lépés részleteit az olvasóra hagyjuk:

**14.8. Feladat.** *Lásd be, hogy az* $\tilde{f}_0$ *függvény és a* $h$ *homotópia kiterjeszthetők erre a cellára is.*

**14.9. Feladat.** *Lásd be, hogy az egyes cellákra való kiterjesztések egymástól függetlenek, összeállnak egy, az egész* $(n+1)$*-vázon értelmezett függvénnyé, illetve homotópiává.*

Tehát igaz a tételt az $(n+1)$-vázra is. Az $\tilde{f}_0$ függvényt és a $h$ homotópiát egymás után kiterjesztettük az összes $X_n \cup A$ részkomplexusra (minden $n$-re). Ezek uniója az egész $X$, tehát $X$-re is igaz a tétel. □

**14.10. Feladat.** *Legyenek* $X$ *és* $Y$ *CW-komplexusok. Lásd be, hogy ha az* $f, g : X \to Y$ *CW-függvények homotópok, akkor CW-homotópok is, sőt, minden* $f \sim g$ *homotópia homotóp egy CW-homotópiával!*

*Ötlet:* Használd a 14.7. Tételt! □

**14.11. Feladat.** *Legyenek* $(X, A)$ *és* $(Y, B)$ *CW-párok (14.2. Definíció). Lásd be a következőket:*

(a) *Minden* $(X, A) \to (Y, B)$ *pár-leképezés pár-homotóp egy* $(X, A) \to (Y, B)$ *CW-pár-függvénnyel (lásd a 14.2. Definíciót).*
(b) *Ha az* $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ *CW-függvények folytonosan homotópok (mint párok közti leképezések), akkor van köztük CW-pár-homotópia is (14.2. Definíció).*

*Ötlet:* Használd a 14.7. Tételt! □

**14.12. Definíció.** *Legyenek* $X$ *és* $Y$ *topológikus terek. Egy* $f : X \to Y$ *folytonos leképezést* gyenge homotóp ekvivalenciának *mondunk, ha* $f_* : \pi_n\big(X, x\big) \xrightarrow{\cong} \pi_n\big(Y, f(x)\big)$ *izomorfizmus minden* $x \in X$ *bázispontban, minden* $n \geq 0$ *egészre.*

**14.13. Tétel** (Whitehead tétele)**.** *Legyenek* $X$, $Y$ *CW-komplexusok,* $f : X \to Y$ *egy gyenge homotópia ekvivalencia. Ekkor* $f$ *homotóp ekvivalencia. Tegyük fel, hogy* $Y$ *az* $X$ *rész-komplexusa, és* $f$ *az ebből* *adódó beágyazás. Ekkor többet is mondhatunk: $Y$ az $X$ deformációs retraktuma.*

**14.14. Feladat.** *Legyenek $X$, $Y$ összefüggő CW-komplexusok, $f, g : X \to Y$ folytonos függvények. Fogalmazd meg, és bizonyítsd be Whitehead tételének (14.13. Tétel) egy olyan változatát, ami azt dönti el, hogy $f$ és $g$ homotópok-e.*

## 15. CW-homológia, CW-kohomológia

Ebben a fejezetben sokat dolgozunk irányított sokaságokkal. Ez egy jól ismert fogalom, ha a dimenzió legalább egy, de érdemes pár szót szólni a nulla dimenziós sokaságokról:

**15.1. Definíció.** *Egy 0-dimenziós sokaság* irányítása *azt jelenti, hogy minden pontja kap egy előjelet ($+$ vagy $-$). Egy 1-dimenziós irányított kompakt sokaság peremét úgy irányítjuk, hogy a benne szereplő szakaszok végpontjai $+$ előjelet kapnak, a kezdőpontok pedig $-$ előjelet.*

*Legyen $X$ egy irányított kompakt 0-dimenziós sokaság, $P$ egy irányított pont, $f$ pedig az $X \to \{P\}$ leképezés (csak egy ilyen van). Jelölje* $\deg(X)$ *az $X$-beli $+$ illetve $-$ előjelű pontok számának különbségét! Ha $P$ előjele $+$, akkor* $\deg(f) = \deg(X)$, *ha pedig $P$ előjele negatív, akkor* $\deg(f) = -\deg(X)$.

**15.2. Konvenció.** *Ebben a fejezetben CW-komplexusokkal dolgozunk. Az $n$-cellák — definíció szerint — azonosítva vannak az $n$-dimenziós tömör egységgömbbel, ezért* irányított peremes sokaságok, *a 0-cellák mindig $+$ előjelet kapnak. Az $n$-cellák pereme tehát irányított $(n-1)$-dimenziós gömb. Speciálisan, az 1-cellák peremében a végpont $+$ elöjelet, a kezdőpont $-$ előjelet kap.*

**15.3. Definíció.** *Legyen $X$ egy CW-komplexus. Használjuk a 14.1. Konvenció jelöléseit! Minden $n \geq 0$-ra legyen $\Delta_n^{CW}(X)$ az $X$ $n$-cellái által generált szabad Abel csoport. Amikor csoport-elemekről beszélünk, $[e_n^\alpha]$-nel jelöljük az $e_n^\alpha$ cellát. Legyen $e_n^\alpha$ egy $n$-cella, $e_{n-1}^\beta$ pedig egy $(n-1)$-cella. Tekintsük az alábbi kompozíciót:*

$$\partial e_n^\alpha \xrightarrow{\phi_n^\alpha} X_{n-1} \to X_{n-1}/X_{n-2} = \bigvee_\gamma \left(e_{n-1}^\gamma / \partial e_{n-1}^\gamma\right) \xrightarrow{\mathrm{pr}_\beta} e_{n-1}^\beta / \partial e_{n-1}^\beta\,.$$

*Ez egy*

$$\psi_n^{\alpha,\beta} : S^{n-1} \to S^{n-1}$$

*folytonos függvény. Könnyen látható, hogy minden $e_n^\alpha$ cellához csak véges sok olyan $e_{n-1}^\beta$ cella található, amelyre a* $\deg(\psi_n^{\alpha,\beta})$ *fokszám (lásd a*

*13.10. Definíció) nem nulla. Minden $n$-re definiálunk egy homomorfizmust:*

$$\Delta_n^{CW}(X) \xrightarrow{\partial} \Delta_{n-1}^{CW}(X) \quad , \quad \partial\big([e_n^\alpha]\big) = \sum_\beta \deg(\psi_n^{\alpha,\beta}) \cdot [e_{n-1}^\beta] \, .$$

$\Delta_n^{CW}(X)$ *elemeit* $n$-láncoknak *hívjuk. Ha* $L$ *egy* $n$*-lánc, akkor* $\partial L$*-et hívjuk az* $L$ határának.

*Be fogjuk látni, hogy a* $\Delta_n^{CW}(X)$ *csoportok a fenti homomorfizmusokkal egy komplexust alkotnak. Ez a* $\Delta_\cdot^{CW}(X)$ *komplexus az* $X$ *tér* CW-lánc-komplexusa.

**15.4. Feladat.** *Lásd be, hogy a 15.3. Definícióban minden* $e_n^\alpha$ *cellához csak véges sok olyan* $e_{n-1}^\beta$ *cella található, amelyre* $\deg(\psi_n^{\alpha,\beta}) \neq 0$.

*Ötlet:* A kompaktság miatt csak véges sok olyan cella van, amelyik teljes egészében benne van $\phi_n^\alpha$ képében. □

**15.5. Definíció.** *Legyenek* $X$, $Y$ *CW-komplexusok és* $f : X \to Y$ *egy CW-függvény (14.2. Definíció). Használjuk a 14.1. Konvenció jelöléseit! Az* $X$ $n$*-celláit* $e_n^\alpha$*-val jelöljük (*$\alpha$ *az index), az* $Y$ $n$*-celláit pedig* $E_n^\beta$*-val (*$\beta$ *az index). Tekintsük az alábbi kompozíciót:*

$$e_n^\alpha \xrightarrow{f} Y_n \to Y_n/Y_{n-1} = \bigvee_\gamma \big(E_n^\gamma/\partial E_n^\gamma\big) \xrightarrow{\mathrm{pr}_\beta} E_n^\beta/\partial E_n^\beta \, .$$

*Ez indukál egy*

$$f_n^{\alpha,\beta} : e_n^\alpha/\partial e_n^\alpha \to E_n^\beta/\partial E_n^\beta$$

*folytonos függvényt (mindkét tér homeomorf az* $n$*-dimenziós gömbbel). Könnyen látható, hogy minden* $e_n^\alpha$ *cellához csak véges sok olyan* $E_n^\beta$ *cella található, amelyre a* $\deg(f_n^{\alpha,\beta})$ *fokszám (lásd a 13.10. Definíciót) nem nulla. Minden* $n$*-re definiálunk egy homomorfizmust (és mindegyiket ugyanúgy,* $f_*$*-gal jelöljük):*

$$\Delta_n^{CW}(X) \xrightarrow{f_*} \Delta_n^{CW}(Y) \quad , \quad f_*[e_n^\alpha] = \sum_\beta \deg(f_n^{\alpha,\beta}) \cdot [E_n^\beta] \, .$$

*Be fogjuk látni, hogy ezek a homomorfizmusok összeállnak egy* $\Delta_\cdot^{CW}(X) \to \Delta_\cdot^{CW}(Y)$ *lánc-homomorfizmussá, amit szintén* $f_*$*-gal fogunk jelölni!*

Az előző két definícióban a 13.10. Definíció segítségével konstruáltunk láncokat. Ezt a konstrukciót szeretnénk most általánosítani. $n$-cellák helyett azonban most egy tetszőleges $n$-dimenziós sokaságot képezünk $X_n$-be.

**15.6. Definíció.** *Legyen* $X$ *egy CW-komplexus,* $M$ *egy kompakt peremes* $n$*-dimenziós differenciálható sokaság, és* $f : M \to X_n$ *egy folytonos* *függvény, ami az $M$ peremét $X_{n-1}$-be képezi. Használjuk a 14.1. Konvenció jelöléseit! Minden $e_n^\beta \subseteq X$ $n$-cellára tekintsük az alábbi kompozíciót:*

$$M \xrightarrow{f} X_n \to X_n/X_{n-1} = \bigvee_\gamma \left(e_n^\gamma/\partial e_n^\gamma\right) \xrightarrow{\mathrm{pr}_\beta} e_n^\beta/\partial e_n^\beta \, .$$

*Ez egy $M \to e_n^\beta/\partial e_n^\beta$ folytonos függvény, ami az $M$ peremét a kitüntetett pontba viszi, tehát indukál egy*

$$\tilde{f}^\beta : M/\partial M \to e_n^\beta/\partial e_n^\beta \cong S^n$$

*folytonos függvényt. $M/\partial M$ egy csúcsos sokaság, tehát beszélhetünk az $\tilde{f}^\beta$ fokáról (lásd a 13.10. Definíciót). Könnyen látható, hogy csak véges sok olyan $e_n^\beta$ cella található, amelyre* $\deg\left(\tilde{f}^\beta\right) \neq 0$. *Az $f$* által indukált láncot *így definiáljuk:*

$$f_*[M] = \sum_\beta \deg\left(\tilde{f}^\beta\right) \cdot [e_n^\beta] \, .$$

**15.7. Feladat.** *A 15.6. Definícióban az $f$ leképezés az $X$ $n$-vázába érkezett. Miért nem engedhetünk meg minden folytonos $f : M \to X$ leképezést, melyre $f(\partial M) \subseteq X_{n-1}$?*

**15.8. Tétel.** *Legyen $X$ egy CW-komplexus, $M$ egy kompakt peremes $n$-dimenziós differenciálható sokaság, és $f : M \to X_n$ egy folytonos függvény, ami az $M$ peremét $X_{n-1}$-be képezi. Ekkor*

$$\partial\Big(f_*[M]\Big) = f_*[\partial M] \, , \tag{3}$$

*ahol a bal oldalon a 15.3. Definíció $\partial$ homomorfizmusa szerepel, a jobboldalon $\partial M$ pedig az $M$ pereme. Speciális esetben:*

$$\text{\textit{ha $M$ zárt, akkor}} \quad \partial\Big(f_*[M]\Big) = 0 \, .$$

*Bizonyítás.* A 13.11. Tétel szerint az egyenlet két oldala nem változik, ha az $f$-et kicseréljük egy vele homotóp leképezésre. Öt lépésben fogjuk az $f$-et feljavítani. Legyen $e_n^\gamma \subseteq X$ egy olyan $n$-cella, amelyik teljes egészében benne van az $f(M)$ képhalmazban. Az első két lépésben olyan homotópiákat alkalmazunk az $f$-re, amelyek csak az $f^{-1}(e_n^\gamma)$ halmazon változtatják.

*1. lépés.* A 13.7. Tétel segítségével elérjük, hogy legyen olyan $D^\gamma$ $n$-dimenziós golyó az $e_n^\gamma$ cella belsejében, amelynek $f^{-1}(D^\gamma)$ ősképe véges sok páronként diszjunkt $n$-dimenziós golyóból áll, és ezek mindegyikét $f$ homeomorfan képezi $D^\gamma$-ra.

*2. lépés.* Alkalmazunk még egy homotópiát, amelyik a $D^\gamma$ golyókat „felfújja”, hogy betöltse vele az egész $e_n^\gamma$ cellát, az $e_n^\gamma \setminus D^\gamma$ héjat pedig az $e_n^\gamma$ peremébe deformálja.

*3.lépés.* Az első két lépés deformációit megismételjük az összes olyan $n$-cellára, amelyik teljes egészében benne van az $f(M)$ képhalmazban.

*4. lépés.* Legyen $e_n^\beta$ egy olyan $n$-cella, amelyik kimaradt a 3. lépésben, tehát amelyiknek van $f(M)$-en kívül eső pontja. Egy homotópiával ebből a pontból „kifújjuk” az $e_n^\beta$ cella tartalmát a peremre, tehát a homotópia alkalmazása után $f(M)$ elkerüli $e_n^\beta$ belsejét.

*5. lépés,* A 4. lépést megismételjük az összes olyan $e_n^\beta$ cellára, amelyik nem szerepelt a 3. lépésben. Ezzel elérjük, hogy $M$ belsejében legyen véges sok páronként diszjunkt $n$-dimenziós golyó, $B_1, \dots B_m$, melyek mindegyikét $f$ homeomorfan képezi valamelyik $n$-cellára, és a komplementumot az $X$ $(n-1)$-vázába képezi.

Legyen $B$ az összes $B_i$ uniója. Ez egy peremes sokaság, és világos, hogy az $f$ megszorítása $B$-re minden egyes $n$-cellát pontosan annyiszor fed le (előjelesen számolva), mint az illető cella együtthatója $f_*[M]$-ben. Könnyen látható tehát, hogy

$$f_*[B] = f_*[M] \quad \text{és} \quad f_*[\partial B] = \partial\Big(f_*[M]\Big) \ .$$

Legyen $N$ az a peremes sokaság, amit úgy kapunk, hogy $M$-ből kivágjuk a $B$ belsejét. Világos, hogy $f(N) \subseteq X_{n-1}$, tehát 13.11. Tétel(c) miatt

$$f_*[\partial N] = 0 \ .$$

Az $N$ pereme, mint halmaz, az $M$ és a $B$ pereméből áll össze — de $B$ peremén meg kell fordítani az irányítást, hiszen $N$ és $B$ a perem „szemközti oldalán” helyezkedik el. Ezért

$$f_*[\partial M] - f_*[\partial B] = f_*[\partial N] = 0 \ .$$

A fenti kiemelt egyenleteket összevetve kapjuk a (3) egyenletet. □

**15.9. Tétel.** *Legyenek $X$, $Y$ CW-komplexusok, $f, g : X \to Y$ CW-függvények, és $h : X \times [0,1| \to Y$ egy CW-homotópia $f$ és $g$ között.*

*(a) $\Delta_\cdot^{CW}(X)$ komplexus, azaz $\partial^2 = 0$.*

*(b) $f_* : \Delta_\cdot^{CW}(X) \to \Delta_\cdot^{CW}(Y)$ egy lánc-leképezés.*

*(c) $h$ indukál egy lánc-homotópiát $f_*$ és $g_*$ között.*

*Bizonyítás.* Használjuk a 14.1. Konvenció jelöléseit. Legyen $e_n^\alpha$ az $X$ egyik $n$-cellája, $\Phi : e_n^\alpha \to X$ pedig az a leképezés, amelyik a cella belsejében az identitás, a peremen pedig megegyezik a $\phi_n^\alpha$ ragasztó leképezéssel. Az $e_n^\alpha$ cella egy peremes sokaság, és a 15.6. Definícióból azonnal következik, hogy $\Phi_*\big[e_n^\alpha\big]$ éppen az $\big[e_n^\alpha\big] \in \Delta_n^{CW}(X)$ generátor elem. A 15.8. Tétel miatt tehát $\partial\big[e_n^\alpha\big] = \Phi_*\big[\partial e_n^\alpha\big]$. Ha most az $\partial e_n^\alpha$

zárt sokaságra is alkalmazzuk a 15.8. Tételt, akkor azt kapjuk, hogy $\partial^2\big[e_n^\alpha\big] = 0$. Ez $\Delta_n^{CW}(X)$ minden generátorára teljesül, amiből következik az (a) állítás.

A $f \circ \Phi$ kompozítió az $e_n^\alpha$ peremes sokáságot az $Y$ CW-komplexusba képezi. Összevetve a 15.6. Definíciót a 15.5. Definícióval láthatjuk, hogy az $f_*[e_n^\alpha]$ lánc megegyezik az $(f \circ \Phi)_*[e_n^\alpha]$ lánccal. A 15.8. Tétel miatt tehát $\partial\big(f_*[e_n^\alpha]\big) = (f \circ \Phi)_*[\partial e_n^\alpha]$, amiről az (a) pontban már láttuk, hogy megegyezik az $f_*\big(\partial[e_n^\alpha]\big)$ lánccal. Ezzel beláttuk a (b) állítást.

Végül a $h$ homotópia segítségével definiálunk minden $n$-re egy $L_h : \Delta_n^{CW}(X) \to \Delta_{n+1}^{CW}(Y)$ homomorfizmust:

$$L_n\big([e_n^\alpha]\big) = h_*[e_n^\alpha \times [0,1]] \ .$$

Az $e_n^\alpha \times [0,1]$ határa három, a peremük mentén összeragasztott, peremes sokaságból áll:

$$\partial\big(e_n^\alpha \times [0,1]\big) = \partial e_n^\alpha \times [0,1] \cup e_n\alpha \times \{0\} \cup e_n\alpha \times \{1\} \ .$$

Szigorúan véva $e_n^\alpha \times [0,1]$ nem peremes sokaság (éle van), de homeomorf egy $B$ tömör golyóval, tehát alkalmazhatjuk rá a 15.8. Tételt. Mivel $h$ az „éleket” az $X$ $(n-1)$-vázába viszi, azért jogos $h_*[\partial B]$ összegre bontása az aábbi egyenletben:

$$\partial L_n\big([e_n^\alpha]\big) = \partial h_*\big[e_n^\alpha \times [0,1]\big] = h_*[\partial B] =$$

$$= h_*\big[\partial e_n^\alpha \times [0,1]\big] + h_*\big[e_n\alpha \times \{0\}\big] + h_*\big[e_n\alpha \times \{1\}\big] = L_{n-1}\big(\partial[e_n]\big) + f_*[e_n] - g_*[e_n]$$

Ebből látjuk, hogy az $L_n$ homomorfizmusok összeállnak egy $f_*$ és $g_*$ közti $\Delta_\cdot^{CW}(X) \to \Delta_\cdot^{CW}(Y)$ lánc-homotópiává. Beláttuk a (c) állítást is. □

**15.10. Feladat.** *Legyenek* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ *CW-komplexusok közti CW-függvények. Lásd be, hogy*

$$\Delta_\cdot^{CW}(g \circ f) = \Delta_\cdot^{CW}(g) \circ \Delta_\cdot^{CW}(f)$$

**15.11. Tétel.**

*(a)* $\Delta_\cdot^{CW} : \mathbb{T}\mathrm{op}^{CW} \to \underrightarrow{\mathbb{A}\mathrm{b}}$ *egy kovariáns funktor. (2.2. Definíció és 14.3. Definíció).*

*(b) Ha* $f, g$ *homotóp CW-függvények (tetszőleges folytonosan homotópiával), akkor* $\Delta_\cdot^{CW}(f)$ *és* $\Delta_\cdot^{CW}(g)$ *lánc-homotópok.*

*(c) Ha* $h$ *egy olyan CW-függvény, amelyik gyenge homotóp ekvivalencia, akkor* $\Delta_\cdot^{CW}(h)$ *egy lánc-ekvivalencia.*

*(d) Ha az* $X$ *CW-komplexus pontrahúzható (topologikus térként), akkor* $\Delta_\cdot^{CW}(X)$ *pontrahúzható komplexus (2.17. Következmény).*

*Ötlet:* A 14.10. Feladat miatt létezik egy CW-homotópia $f$ és $g$ között, Whitehead tétele (14.13. Tétel) miatt $h$ egy homotóp ekvivalencia. Ezért a lemma következik a 15.9. Tételből és a 15.10. Feladatból. □

**15.12. Megjegyzés.** *Legyenek $X$, $Y$ CW-komplexusok, $f : X \to Y$ tetszőleges folytonos függvény! A 14.7. Tétel miatt $f$ homotóp egy $\tilde{f} : X \to Y$ CW-függvényhez. A $\Delta^{CW}_{\cdot}(\tilde{f})$ lánc-leképezés függ a $\tilde{f}$ választásától, de a 14.10. Feladat miatt bármely két választás lánc-homotóp leképezéseket ad. Jelöljük $f_*$-gal a $\Delta^{CW}_{\cdot}(\tilde{f})$ homotópia osztályát! A 14.7. Tételből és a 14.10. Feladatból következik, hogy*

*(a) $f_*$ csak az $[f]$ homotópia-osztálytól függ,*
*(b) ha $g : Y \to Z$ egy másik folytonos függvény, akkor $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$,*
*(c) ha $f$ homotóp ekvivalencia, akkor $f_*$ is homotóp ekvivalencia,*
*(d) ha $X$ pontrahúzható, akkor $\Delta^{CW}_{\cdot}(X)$ is pontrahúzható.*

**15.13. Megjegyzés.** *Az előző megjegyzés tovább pontosítható: $\Delta^{CW}_{\cdot}$ kiterjeszthető $\mathbb{T}\mathrm{op}^{CW}$-ből az Abel csoportok derivált kategóriájába menő funktorrá. Ez a funktor homotópia-invariáns, tehát indukál egy funktort a homotópia kategóriából az Abel csoportok derivált kategóriájába.*

**15.14. Definíció.** *Legyen $G$ egy Abel csoport. Definiáljuk a $G$-*együtthatós CW-homológia *és a* CW-kohomológia *funktorokat:*

$$\begin{aligned} H_n^{CW}(X; G) &= H_n^{CW}\Big(\Delta^{CW}_{\cdot}(X) \otimes G\Big) \\ H^n_{CW}(X; G) &= H^n_{CW}\Big(\operatorname{Hom}\big(\Delta^{CW}_{\cdot}(X), G\big)\Big) \end{aligned}$$

*Mindent általánosíthatunk CW-párokra is:*

$$\begin{aligned} \Delta^{CW}_{\cdot}(X, A) &= \Delta^{CW}_{\cdot}(X)/\Delta^{CW}_{\cdot}(A) \\ H_n^{CW}(X, A; G) &= H_n^{CW}\Big(\Delta^{CW}_{\cdot}(X, A) \otimes G\Big) \\ H^n_{CW}(X, A; G) &= H^n_{CW}\Big(\operatorname{Hom}\big(\Delta^{CW}_{\cdot}(X, A), G\big)\Big) \end{aligned}$$

## 16. Szinguláris szimplexek

**16.1. Definíció.** *Tekintsük az $\mathbb{R}^{n+1}$ térben az $e_i$ bázis-vektorok által kifeszített $n$-dimenziós szimplexet — a csúcsokat az $e_i$-kkel azonos sorrendben írjuk, ez adja az irányítást. Ezt a szimplexet $\underline{\Delta}^n$-nel jelöljük, és* standard $n$-szimplexnek *hívjuk.*

**16.2. Definíció.** *Legyen $X$ egy topológikus tér. Egy $n$-dimenziós $n$-*dimenziós szinguláris szimplex *$X$-ben nem más, mint egy folytonos függvény $\phi : \underline{\Delta}^n \to X$. A $\phi$-nek $n+1$* oldala *van, ezek a következő $(n-1)$-dimenziós szimplexek. Minden $0 \leq i \leq n$ értékre tekintjük azt* *a* $\underline{\Delta}^{n-1} \to \underline{\Delta}^n$ *lineáris leképezést, amelyik az* $e_0, e_1, \dots e_{i-1} \in \underline{\Delta}^{n-1}$ *csúcsokat* $\underline{\Delta}^n$ *ugyanilyen nevű csúcsaiba képezi, az* $e_i, e_{i+1}, \dots e_{n-1} \in \underline{\Delta}^{n-1}$ *csúcsokat pedig rendre az* $e_{i+1}, e_{i+2}, \dots e_n \in \underline{\Delta}^n$ *csúcsokba viszi. Ezt a lineáris leképezést* $\phi$*-vel komponálva megkapjuk* $\phi$ *i-edik oldalát,* $\partial_i\phi$*-t.*

**16.3. Definíció.** *Definiáljuk az* $\mathbb{S}$ *funktort, ami topológikus terekhez CW-komplexusokat rendel. Legyen* $X$ *egy topológikus tér.* $\mathbb{S}(X)$ *n-szimplexei éppen az* $X$*-beli* $n$*-dimenziós szinguláris szimplexek lesznek, a ragasztást pedig dimenzió szerinti indukcióval definiáljuk. Legyen* $\phi$ *egy szinguláris* $n$*-szimplex, és tegyük fel, hogy az* $\mathbb{S}(X)$ *komplexus* $(n-1)$*-vázát már elkészítettük. Minden* $0 \le i \le n$ *értékre a* $\partial_i\phi$ *oldal egy* $(n-1)$*-dimenziós szimplex, tehát benne van az* $(n-1)$*-vázban. Ragasszuk hát* $\phi$ *i-edik oldalát ehhez az* $(n-1)$*-szimplexhez!*

*Az* $\mathbb{S}(X)$ *komplexus szimplexei folytonos függvények* $X$*-be. Ezek a függvények a ragasztások mentén jól illeszkednek egymáshoz, tehát összeállnak egy* $\underline{\mathrm{ev}} : \mathbb{S}(X) \to X$ *folytonos függvénnyé, amit* kiértékelésnek *hívunk.*

**16.4. Megjegyzés.** *A 16.3. Definícióban többet is kapunk: egy delta-komplexust építünk fel. A CW-komplexusban megengedünk tetszőleges folytonos ragasztásokat, tehát ezek topológiai objektumok. Ezzel szemben delta-komplexusban viszont élet élhez, háromszöget háromszöghöz, n-szimplexet n-szimplexhez illesztünk, lineáris ragasztó leképezéssel, ezért a delta-komplexusok tisztán kombinatórikai objektumok, amelyeknek van topológiai realizációja. Ebben a jegyzetben elegendő a CW struktúrát ismerni.*

**16.5. Tétel.** *Legyen* $X$ *egy topológikus tér. Az* $\underline{\mathrm{ev}} : \mathbb{S}(X) \to X$ *kiértékelés egy gyenge homotóp ekvivalencia.*

*Bizonyítás.* Be kell látni, hogy $\underline{\mathrm{ev}}_* : \pi_n\big(\mathbb{S}(X)\big) \to \pi_n(X)$ izomorfizmus minden $n$-re. Választunk $S^n$-en egy szimplex-felbontást. Ennek segítségével minden $f : S^n \to X$ folytonos leképezés felemelhető egy $\tilde{f} : S^n \to \mathbb{S}(X)$ folytonos függvénnyé, amelyre $\underline{\mathrm{ev}} \circ \tilde{f} = f$, tehát $\underline{\mathrm{ev}}_*$ szürjektív.

Legyenek most $\tilde{p}, \tilde{q} : S^n \to \mathbb{S}(X)$ folytonos függvények, és $h : S \times [0,1] \to X$ egy homotópia $\underline{\mathrm{ev}} \circ \tilde{p}$ és $\underline{\mathrm{ev}} \circ \tilde{q}$ között. Először lecseréljük $\tilde{p}$-t és $\tilde{q}$-t egy-egy szimplíciális approximációra. Ez ad $S^n \times \{0\}$-án és $S^n \times \{1\}$-en egy-egy szimplex-felbontást, amit kiterjesztünk $S^n \times [0,1]$ szimplex-felbontásává. Ennek segítségével gyártunk olyan $\tilde{h} : S^n \times [0,1] \to \mathbb{S}(X)$ függvényt, amelyre $\underline{\mathrm{ev}} \circ \tilde{h} = h$. Tehát $\underline{\mathrm{ev}}_*$ injektív. □

**16.6. Tétel.**

*(a)* $\mathbb{S} : \mathbb{T}\mathrm{op} \to \mathbb{T}\mathrm{op}^{CW}$ *egy kovariáns funktor. (11.2. Definíció, 14.3. Definíció).*

(b) *Ha $f$ és $g$ homotóp folytonos függvények, akkor $\mathbb{S}(f)$ és $\mathbb{S}(g)$ között van egy CW-homotópia.*
(c) *Ha $f$ gyenge homotóp ekvivalencia, akkor $\mathbb{S}(f)$ egy CW-függvény, amelyik homotóp ekvivalencia.*
(d) *Ha az $X$ tér olyan, hogy $\pi_n(X) = \{1\}$ minden $n$-re, akkor $\mathbb{S}(X)$ pontrahúzható (topológikus térként).*

*Bizonyítás.* Ha $\sigma$ egy szinguláris szimplex $X$-ben, és komponáljuk őt egy $f$ és $g$ közötti homotópiával, akkor az $f(\sigma)$ és $g(\sigma)$ szinguláris szimplexek közti homotópiát kapunk. Ezek a homotópiák összeragadnak egy $\mathbb{S}(f)$ és $\mathbb{S}(g)$ közötti CW-homotópiává. A többi állítás azonnal következik Whitehead tételéből (14.13. Tétel) és a 16.5. Tételből. □

**16.7. Lemma.** *Legyen $X$ egy topológikus tér, $\mathcal{U}$ egy nyílt fedés. Jelölje $\mathbb{S}^{\mathcal{U}}(X) \subseteq \mathbb{S}(X)$ azt a rész-komplexust, amelyet azon $\phi : \underline{\Delta}^n \to X$ szimplexek alkotnak, amelyekre $\mathrm{Im}(\phi)$ teljes egészében valamelyik $\mathcal{U}$-beli nyílt halmazba esik. Ekkor az $\mathbb{S}^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow \mathbb{S}(X)$ beágyazás egy homotóp ekvivalencia.*

*Ötlet:* A 16.5. Tétel bizonyítása kis módosítással azt is megmutatja, hogy az $\mathbb{S}^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow \mathbb{S}(X) \xrightarrow{\mathrm{ev}} X$ kompozíció is gyenge homotóp ekvivalencia. Ezért az $\mathbb{S}^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow \mathbb{S}(X)$ beágyazás is gyenge homotóp ekvivalencia. A lemma tehát következik Whitehead tételéből (14.13. Tétel). □

**16.8. Megjegyzés.** *A 16.7. Lemmának számtalan, ugyanezzel a technikával bizonyítható változata van. Például, ha $X$ egy differenciálható sokaság, akkor tekinthetjük a differenciálható szimplek részkomplexusát, ha pedig $X$ egy metrikus tér, akkor tekinthetjük az $\varepsilon$-nál kisebb átmérőjű szimplexek részkomplexusát — ezek is homotóp ekvivalensek $X$-szel és $\mathbb{S}(X)$-szel.*

## 17. Szinguláris lánc-komplexus, homológia és kohomológia

**17.1. Definíció.** *A* szinguláris lánc-komplexus *funktor az $\mathbb{S}$ funktor és a CW-lánc-komplexus funktor kompozíciója. Tehát a topológikus terek kategóriájából (11.2. Definíció) képez az Abel csoport kompexusok kategóriájába, egy $X$ topológikus térhez az alábbi komplexust rendeli:*

$$\Delta_\cdot(X) = \Delta_\cdot^{CW}\big(\mathbb{S}(X)\big)$$

*Általánosabban, egy $(X, A)$ tér-pár* szinguláris lánc-komplexusa*:*

$$\Delta_\cdot(X, A) = \Delta_\cdot(X)/\Delta_\cdot(A)$$

**17.2. Megjegyzés.** *Sok-sok egymással (többé-kevésbé) lánc-homotóp funktort használunk, a jelölésük is nagyon hasonló:* $\Delta.$, $\Delta_{.}^{CW}$, $\Delta_{.}^{\mathrm{Szimpl}}$, *stb. Ebben a jegyzetben a szinguláris láncokkal tudunk legkényelmesebben dolgozni, azért azt jelöljük* $\Delta.$*-val, megkülönböztető kitevő nélkül.*

**17.3. Tétel.**
(a) $\Delta. : \mathbb{T}\mathrm{op} \to \underrightarrow{\mathbb{A}b}$ *egy kovariáns funktor. (11.2. Definíció, 2.2. Definíció).*
(b) *Ha* $f, g$ *homotóp függvények, akkor* $\Delta.(f)$ *és* $\Delta.(g)$ *lánc-homotópok.*
(c) *Ha egy* $h$ *függvény gyenge homotóp ekvivalencia, akkor* $\Delta.(h)$ *egy lánc-ekvivalencia.*
(d) *Ha az* $X$ *tér olyan, hogy* $\pi_n(X) = \{1\}$ *minden* $n$*-re, akkor* $\Delta.(X)$ *pontrahúzható komplexus (2.17. Következmény).*

*Ötlet:* Azonnal következik a 16.6. Tételből és a 15.11. Tételből. □

**17.4. Definíció.** *Legyen* $G$ *egy Abel csoport. Definiáljuk a* $G$-együtthatós szinguláris homológia *és a* szinguláris kohomológia *funktorokat.*

$$H_n(X; G) = H_n\Big(\Delta.(X) \otimes G\Big)$$
$$H^n(X; G) = H^n\Big(\operatorname{Hom}\big(\Delta.(X), G\big)\Big)$$

*Mindent általánosíthatunk tér-párokra is:*

$$H_n(X, A; G) = H_n\Big(\Delta.(X, A) \otimes G\Big)$$
$$H^n(X, A; G) = H^n\Big(\operatorname{Hom}\big(\Delta.(X, A), G\big)\Big)$$

*Tekintsük azt a ko-láncot, amelyik minden* $0$*-dimenziós szimplexhez ugyanazt a* $g \in G$ *elemet rendeli — ezt is* $g$*-vel fogjuk jelölni (mint a konstans függvényeket). Ez egy ko-ciklus, tehát megad egy* konstans *kohomológia-osztályt, amit szintén* $g$*-vel jelölünk:*

$$g \in H^0(X, A; G) \qquad \textit{minden } g \in G\textit{-re.}$$

*Ebben a jegyzetben, ha mindenféle jelző nélkül* homológiát *illetve* kohomológiát *írunk, akkor az mindig a szinguláris homológiát illetve a szinguláris kohomológiát jelenti.*

**17.5. Tétel.** *Legyen* $X$ *egy CW-komplexus. Létezik egy*

$$\Delta.(X) \xrightarrow{\cong} \Delta_{.}^{CW}(X)$$

*természetes lánc-ekvivalencia.*

*Bizonyítás.* A 16.5. Tétel szerint $\underline{\mathrm{ev}} : \mathbb{S}(X) \to X$ egy gyenge homotóp ekvivalencia. Erre alkalmazzuk a $\Delta_{.}^{CW}$ funktort, a 15.11. Tétel miatt lánc-ekvivalenciát kapunk. □

**17.6. Feladat.** *Legyen $X$ egy szimplíciális komplexus, vagy még általánosabban, egy delta-komplexus. A szimplex felbontás ad egy természetes $\iota : X \to \mathbb{S}(X)$ beágyazást. Mutasd meg, hogy $\iota$ és* <u>ev</u> *(16.3. Definíció) egymás homotópia inverzei!*

*Tekintsük $X$ szimplex-felbontását egy CW-felbontásnak. Az $\iota$ segítségével a 17.5. Tételbeli lánc-ekvivalencia inverze sokkal könnyebben számolható:*

$$\Delta_\cdot(\iota) : \Delta_\cdot^{CW}(X) \xrightarrow{\cong} \Delta_\cdot(X)$$

## 18. Szimplíciális homológia, kohomológia

**18.1. Definíció.** *Legyen $X$ egy szimplíciális komplexus, vagy még általánosabban, egy delta-komplexus. Mivel a szimplexek egyben cellák is, $X$ tekinthető CW-komplexusnak is. Az $X$* szimplíciális lánc-komplexusa*:*

$$\Delta_\cdot^{\text{Szimpl}}(X) = \Delta_\cdot^{CW}(X)\ ,$$

*az $X$* szimplíciális homológiái *illetve* kohomológiái*:*

$$H_n^{\text{Szimpl}}(X;G) = H_n^{CW}(X;G) \quad , \qquad H^n_{\text{Szimpl}}(X;G) = H^n_{CW}(X;G)$$

*Ugyanez a definíció átvihető tér-párokra is.*

**18.2. Megjegyzés.** *Még általánosabb fogalom: a szimplíciális halmazok. Íme, egy másik bevezető.*

**18.3. Megjegyzés.** *A 16.4. Megjegyzés alapján könnyen látható, hogy $\Delta_\cdot^{\text{simpl}}$ tisztán kombinatórikai objektum, míg $\Delta_\cdot$ és $\Delta_\cdot^{CW}$ a topológiában élnek.*

**18.4. Megjegyzés.** *Ebben a jegyzetben nem foglalkozunk szimplíciális homológiával, de érdemes megjegyezni, hogy a 17.6. Feladat állítása átfogalmazható: az $X$* szimplíciális lánc-komplexusa*, $\Delta_\cdot^{\text{simpl}}(X)$, lánc-homotóp az $X$ szinguláris lánc-komplexusával, tehát a megfeleő homológia- és kohomológiacsoportok izomorfak.*

## 19. Čech kohomológia

**19.1. Definíció.** *Egy $X$ topológikus tér $\{U_i\}_{i\in I}$ nyílt fedését* jó fedésnek *mondjuk, ha minden $J \subseteq I$ véges részhalmazra a $\{U_i\}_{i\in I}$ metszet vagy üres, vagy pontrahúzható.*

**19.2. Konstrukció.** *Legyen $X$ egy topológikus tér, és $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ nyílt halmazok egy rendszere. Az $\mathcal{U}$* idege *a következő, $\mathcal{N}(X,\mathcal{U})$-vel jelölt szimplíciális komplexus: Minden $(n+1)$-elemű $J \subseteq I$ részhalmazhoz, amelyre $\bigcap_{i\in J} U_i \neq \emptyset$ tartozik egy $\Delta_J$-vel jelölt $n$-szimplex, melynek csúcsait megcímkézzük $J$ elemeivel. Ezért $n \geq 1$ esetén a $\Delta_J$ minden oldalán egy $n$-elemű $J' \subset J$ részhalmazt olvashatunk: ezt az oldalt a*

*$\Delta_{J'}$ szimplexhez ragasztjuk, mégpedig úgy, hogy az azonosan címkézett csúcsok illeszkedjenek egymáshoz.*

**19.3. Definíció.** *Legyen $X$ egy topológikus tér, és $\mathcal{U}$ egy jó fedése. A* fedéshez tartozó *$G$ együtthatójú* Čech komplexus*:*

$$\check{C}^{\cdot}\big(X,\mathcal{U};\ G\big) = \operatorname{Hom}\Big(\Delta_{\cdot}^{\text{Szimpl}}\big(\mathcal{N}(X,\mathcal{U})\big), G\Big)$$

*Ennek homológiáit* Čech kohomológiának hívjuk*:*

$$\check{H}^n(X;G) = H^n\Big(\check{C}^{\cdot}\big(X,\mathcal{U};\ G\big)\Big)$$

*Vegyük észre, hogy ez nem más, mint az $\mathcal{N}(X,\mathcal{U})$ tér $G$ együtthatójú szimplíciális kohomológiája.*

**19.4. Megjegyzés.** *A 19.3. Definíció csak akkor használható, ha az $X$ térnek létezik jó fedése. Természetesen létezik ennél általánosabb definíció is, de nekünk most elég ez a speciális eset.*

**19.5. Tétel.** *Legyen $X$ egy topológikus tér, amelynek létezik jó fedése. A Čech kohomológia nem függ a jó fedéstől (tehát a jelölés korrekt). Bármely $G$ együttható csoportra, és minden $\mathcal{U}$ fedésre a $\check{C}^{\cdot}\big(X,\mathcal{U};\ G\big)$ Čech komplexus lánc-ekvivalens a $\operatorname{Hom}\big(\Delta_{\cdot}(X), G\big)$ kolánc komplexussal, tehát minden $n$-re*

$$\check{H}^n(X;\ G) \cong H^n(X;\ G)\ .$$

*A lánc-ekvivalencia, és így az izomorfizmus is természetes transzformáció (mind a két változóban).*

Először adunk egy algebrai bizonyítást, utána egy geometriait. A geometriai bizonyítás hosszabb, de elemibb.

*Algebrai bizonyítás.* Elég az izomorfizmust belátni, abból már következik a függetlenség is. Idézzük fel a 16.7. Lemmában szereplő $\mathbb{S}^{\mathcal{U}}(X) \subseteq \mathbb{S}(X)$ rész-komplexust! Ehhez tartozik egy $\Delta_{\cdot}^{\mathcal{U}}(X) \leq \Delta_{\cdot}(X)$ részkomplexust, melyet a $\mathbb{S}^{\mathcal{U}}(X)$-beli szimplexek generálnak. A 16.7. Lemma miatt $\Delta_{\cdot}^{\mathcal{U}}(X) \cong \Delta_{\cdot}(X)$ lánc-ekvivalensek. A 19.5. Tétel tehát azonnal következik az alábbi lánc-ekvivalenciából:

$$\check{C}^{\cdot}\big(X,\mathcal{U};\ G\big) \cong \operatorname{Hom}\big(\Delta_{\cdot}^{\mathcal{U}}(X),\ G\big)$$

Abban az esetben, ha $\mathcal{U}$ egyetlen nyílt halmazból áll, ez következik a 17.3. Tétel (d) pontjából. Az általános eset pedig azonnal következik a 3.24. Következményből, csak a megfelelő kettős komplexust kell kitölteni — amit az olvasóra bízunk! □

**19.6. Feladat.** *Töltsd ki az előző bizonyítás végén felbukkanó kettős komplexust! Lásd be, hogy a sorok és az oszlopok valóban egzaktak!*

*Ötlet:* Minden $(p+1)$-elemű $J \subseteq I$ részhalmazhoz készítsd el a

$$\mathrm{Hom}\Big(\Delta_q\big(\textstyle\bigcap_{j\in J} U_j\big),\, G\Big)$$

csoportot. Ezek direkt szorzata (rögzített $p, q$ értékre) legyen a 3.24. Következményben keresett $M^{p,q}$ csoport! Lásd be a sorok és az oszlopok egzaktságát! Az egzaktság bizonyításában felhasználhatod, hogy a tétel igaz abban az esetben, amikor $\mathcal{U}$ egyelemű. □

**19.7. Konstrukció.** *Legyen $X$ egy topológikus tér, és $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ egy jó fedése. Jelölje $\mathcal{N}^*\big(X,\mathcal{U}\big)$ az $\mathcal{N}\big(X,\mathcal{U}\big)$ komplexus súlyponti felosztását. Tetszőleges $J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_n \subseteq I$ véges részhalmaz-sorozatra jelölje*

$$\Delta^*_{J_0,J_1,\dots J_n} \subset \mathcal{N}^*\big(X,\mathcal{U}\big)$$

*azt a szimplexet, amit az $\mathcal{N}\big(X,\mathcal{U}\big)$-beli $\Delta_{J_0} \subset \Delta_{J_1} \subset \Delta_{J_2} \cdots \subset \Delta_{J_n}$ egymásba ágyazott szimplexek súlypontjai feszítenek ki. Dimenzió szerinti indukcióval építünk egy*

$$\underline{\mathrm{ev}} : \mathcal{N}\big(X,\mathcal{U}\big) \cong \mathcal{N}^*\big(X,\mathcal{U}\big) \longrightarrow X$$

*folyonos leképezést az alábbi tulajdonsággal:*

$$\underline{\mathrm{ev}}\left(\Delta^*_{J_0,J_1,\dots J_n}\right) \subseteq \bigcap_{j=0}^{n} U_{J_j} \qquad \mathcal{N}^*\big(X,\mathcal{U}\big) \textit{ minden szimplexére.} \tag{4}$$

*Tegyük fel, hogy a $\Delta^*_{J_0,J_1,\dots J_n}$ szimplex peremén már elkészült az $\underline{\mathrm{ev}}$ függvény, és ott teljesíti a (4) követelményt. Mivel a $\bigcap_{j=0}^{n} U_{J_j}$ nyílt halmaz pontrahúzható, a függvénytkönnyű beterjeszteni a szimplex belsejébe is.*

**19.8. Feladat.** *Lásd be, hogy a (4) tulajdonság homotópia erejéig egyértelműen meghatározza az $\underline{\mathrm{ev}} : \mathcal{N}\big(X,\mathcal{U}\big) \to X$ függvényt!*

**19.9. Lemma.** *Legyen $X$ egy topológikus tér, és $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ egy jó fedése. Legyen továbbá $Y$ egy véges szimplíciális komplexus és $f : Y \to X$ egy folytonos függvény.*

*(a) Ekkor létezik egy $\phi : Y \to \mathcal{N}(X,\mathcal{U})$ folytonos leképezés, melyre az $\underline{\mathrm{ev}} \circ \phi$ kompozíció homotóp $f$-fel.*
*(b) Tegyük fel, hogy $A \leq Y$ egy rész-komplexus, $\phi_A : A \to \mathcal{N}(X,\mathcal{U})$ egy olyan szimplíciális leképezés, melyre az $\underline{\mathrm{ev}} \circ \phi_A$ kompozíció megegyezik az $f$ függvény $A$-ra való megszorításával. Ilyenkor van olyan $\phi$ is, amelyik az $A$ halmazon megegyezik $\phi_A$-val.*

*Bizonyítás.* Elég a (b) állítást bizonyítani, az (a) ennek speciális esete (üres $A$-val). A feltétel miatt $f$ az $A$ minden szimplexét beleképezi valamelyik $\mathcal{U}$-beli nyílt halmazba. A Lebesgue Lemma segítségével az $A$ komplementerében lévő szimplexeket is felbontjuk kisebb szimplexekre úgy, hogy $f$ az új szimplexek mindegyikét beleképezze valamelyik

$\mathcal{U}$-beli nyílt halmazba. Jelölje $\tilde{Y}$ az $Y$ teret ezzel az új szimplex felbontással, $\tilde{Y}^*$ pedig az $\tilde{Y}$ súlyponti felosztását. Mivel $f(\tilde{Y}^*)$ kompakt, van olyan $\tilde{I} \subset I$ véges részhalmaz, melyre $\{U_i\}_{i \in \tilde{I}}$ lefedi $f(\tilde{Y}^*)$-ot. Először definiáljuk a $\phi$ függvényt az $\tilde{Y}^*$ csúcsain.

Legyen $P$ az $\tilde{Y}^*$ tetszőleges csúcsa, tehát egy $\sigma \subseteq Y$ szimplex súlypontja. Jelölje $J_\sigma \subseteq \tilde{I}$ azon $j \in \tilde{I}$ indexek halmazát, melyekre $f(\sigma_\sigma) \subseteq U_j$. Legyen $\phi(P)$ a $\Delta_{J_\sigma} \subseteq \mathcal{N}(X,\mathcal{U})$ szimplex súlypontja, ami az $\mathcal{N}^*(X,\mathcal{U})$ komplexus egyik csúcsa.

Legyen most $\delta$ az $\tilde{Y}^*$ tetszőleges $n$-szimplexe. Enne csúcsai bizonyos $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \cdots \subset \sigma_n$ $\tilde{Y}$-beli szimplexek súlypontjai. A $\phi$ függvény a $\delta$ csúcsait éppen a $\Delta_{J_{\sigma_0}, J_{\sigma_1}, \dots J_{\sigma_n}}$ $\mathcal{N}^*(X,\mathcal{U})$-beli szimplex csúcsaiba viszi, kiterjesztjük lineárisan az egész $\delta$ szimplexre. Ezt minden szimplexre elvégezve megkapjuk a keresett $\phi$ függvényt. □

**19.10. Feladat.** *Lásd be, hogy a 19.9. Lemma bizonyításában a $\phi$ függvény jól definiált! ha $\delta_1, \delta_2$ két szimplex $\tilde{Y}$-ban, akkor a $\delta_1$-re való kiterjesztés a $\delta_1 \cap \delta_2$ szimplexen megegyezik a $\delta_2$-re való kiterjesztéssel.*

*Ötlet:* Ha $\delta_1$ a $\delta$ szimplex egyik oldala, akkor $\phi$-t a $\delta_1$ szimplexen kétféleképpen is definiáltuk: $\delta$-ra, illetve $\delta_1$-ra való kiterjesztéssel. Miért ugyanaz a két kiterjesztés? □

**19.11. Feladat.** *Lásd be, hogy a 19.9. Lemma bizonyításában a $\phi$ függvény az $A$ halmazon megegyezik $\phi_A$-val!*

**19.12. Következmény.** *Legyen $X$ egy topológikus tér, és $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ egy jó fedése. Az $\underline{\mathrm{ev}} : \mathcal{N}(X,\mathcal{U}) \to X$ leképezés egy gyenge homotóp ekvivalencia.*

*A 19.5. Tétel geometriai bizonyítása.* Azonnal következik a definícióból és a 19.12. Következményből. □

## 20. DeRham kohomológia

**20.1. Definíció.** *Legyen $M$ egy differenciálható sokaság. $T^*M$ jelöli az érintő nyaláb duálisát — ezt* ko-érintő nyalábnak *is nevezik, ennek szelései az* 1*-formák. $\bigwedge^k T^*M$ jelöli a ko-érintő nyaláb $k$-adik külső hatványát — ennek szelései a $k$-formák. Jelölje $\Omega^k(M)$ az egész $M$-en értelmezett $k$-formák terét! A külső deriválás minden $k$-ra egy $d : \bigwedge^k T^M \to \bigwedge^{k+1} T^*M$ differenciál operátor, tehát egy $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ lineáris leképezés ami kielégíti a Leibnitz-szabályt. Érdemes megemlíteni, hogy $d^2 = 0$, és hogy $\Omega^0(M)$ nem más, mint az $M$-en értelmezett sima függvények tere.*

**20.2. Definíció.** *Legyenek $M$, $N$ differenciálható sokaságok, és $f: M \to N$ egy sima függvény! Jelölje $f^*TN$ az $N$ érintő-nyalábjának visszahúzottját! Az $f$ deriváltja felfogható egy $df : TM \to f^*TN$ nyaláb-leképezésnek, azaz a* $\mathrm{Hom}\big(TM, f^*TN\big)$ *nyaláb egy szelésének. (Lokális koordinátarendszerben ez egy mátrix-értékű függvény: az $f$ Jacobi-mátrixa.) Ennek a duálisa indukál $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ homomorfizmusokat minden $k$-ra. (Tehát a differenciál-formákat „vissza lehet húzni”.)*

Mézd még meg Stokes tételét!

**20.3. Definíció.** *Legyen $M$ egy differenciálható sokaság. Az alábbi komplexust* de Rham komplexusnak *nevezzük:*

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \dots$$

*Ez valóban komplexus, hiszen $d^2 = 0$. Az ő $k$-adik homológiája az $M$ $k$-adik* de Rham kohomológiája *(ez egy valós vektortér), jelölésben: $H^k_{dR}(M)$. Bővebb információt itt találsz.*

**20.4. Feladat.** *Lásd be, hogy $\Omega^\cdot$ egy kontravariáns funktor a differenciálható sokaságok (és sima leképezések) kategóriájából a vektortér komplexusok kategóriájába!*

*Ötlet.* Lásd be, hogy a differenciál-formák visszahúzása kommutál a $d$ operátorral! $\square$

**20.5. Feladat.** *Legyen $M$ egy sokaság, jelölje $\Delta^{\mathrm{diff}}_\cdot(M) \leq \Delta_\cdot(M)$ azt a rész-komplexust, amit a folytonosan differenciálható szinguláris szimplexek generálnak! Lásd be, hogy a $\Delta^{\mathrm{diff}}_\cdot(M) \leq \Delta_\cdot(M)$ beágyazás lánc-ekvivalencia!*

*Ötlet:* Imitáld a 16.7. Lemmát, és a bizonyítását. Ehhez szükséged lehet a 13.6. Tételre. $\square$

**20.6. Feladat.** *Legyen $M$ egy sokaság, $\omega$ egy $n$-forma. Minden $\sigma$ folytonosan differenciálható szinguláris $n$-szimplexhez rendeljük hozzá az $\int_\sigma \omega$ valós számot. Ezt lineárisan kiterjesztjük egy $\mathcal{I}^n : \Omega^n(M) \to$* $\mathrm{Hom}\big(\Delta^{\mathrm{diff}}_n(M), \mathbb{R}\big)$ *homomorfizmussá. Stokes tétele segítségével lásd be, hogy ezek összeállnak egy*

$$\mathcal{I} : \Omega^\cdot(M) \to \mathrm{Hom}\big(\Delta^{\mathrm{diff}}_\cdot(M), \mathbb{R}\big)$$

*lánc-homomorfizmussá, sőt, $\mathcal{I}$ egy természetes transzformáció az $\Omega^\cdot$ és a* $\mathrm{Hom}\big(\Delta^{\mathrm{diff}}_\cdot, \mathbb{R}\big)$ *funktorok között!*

**20.7. Tétel** (Homotóp invariancia)**.** *Legyenek $M$, $N$ differenciálható sokaságok, $f, g : M \to N$ egymással homotóp sima leképezések. A* *hozzájuk tartozó két visszahúzás, $f_*, g_* : \Omega^{\cdot}(N) \to \Omega^{\cdot}(M)$, homotóp ekvivalens.*

*Bizonyítás.* Egy bizonyítást itt olvashatsz. □

**20.8. Következmény** (Poincaré lemma)**.** *Legyen $M$ egy pontrahúzható sokaság, és $\phi \in \Omega^k(M)$, $1 \le k \le \dim(M)$, egy olyan $k$-forma, amelyre $d\omega = 0$ (azaz $\omega$* zárt forma*). Ekkor van olyan $\psi \in \Omega^{k-1}(M)$, amelyre $d\psi = \phi$ (azaz $\phi$* egzakt forma*). Ebből azonnal következik, hogy az $\Omega^{\cdot}(M)$ de Rham komplexus pontrahúzható (2.17. Következmény).*

*Bizonyítás.* Következik a 20.7. Tételből. □

**20.9. Feladat** (Poincaré lemma változata)**.** *Legyen $M$ megint egy pontrahúzható sokaság, és jelölje $\mathbb{R}_M \subseteq \Omega^0(M)$ az $M \to \mathbb{R}$ konstans függvények halmazát. Mutasd meg, hogy az alábbi sorozat egzakt:*

$$0 \to \mathbb{R}_M \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \cdots$$

**20.10. Tétel** (de Rham tétele)**.** *A 20.6. Feladatban szereplő $\mathcal{I} : \Omega^{\cdot} \to \mathrm{Hom}\left(\Delta^{\mathrm{diff}}_{\cdot}\right)$ lánc-leképezés lánc-homotóp-ekvivalencia.*

*Bizonyítás.* Legyen $\mathcal{T}$ az $M$ sokaság egy szimplex-felbontása (ilyen van Whitney tétele miatt), jelöljük $\mathcal{T}_k$-val a $\mathcal{T}$-beli $k$-szimplexek halmazát! Vegyük észre, hogy a szimplex-felbontásunk lokálisan véges, azaz minden pontnak van olyan környezete amelyet csak véges sok szimplex metsz! Ha a differenciál-formákat csak a $\mathcal{T}$-beli szimplexeken integráljuk, akkor az $\mathcal{I}$ leképezés mintájára egy $\tilde{\mathcal{I}} : \Omega^{\cdot}(M) \to \mathrm{Hom}\left(\Delta^{\mathrm{szimpl}}_{\cdot}(\mathcal{T}), \mathbb{R}\right)$ lánc-leképezést. A 20.5. Feladat miatt elég belátnunk, hogy $\tilde{\mathcal{I}}$ lánc-homotóp-ekvivalencia. Ezért konstruálunk egy $\mathcal{J}^{\cdot} : \mathrm{Hom}\left(\Delta^{\mathrm{szimpl}}_{\cdot}(\mathcal{T}), \mathbb{R}\right) \to \Omega^{\cdot}(M)$ homotópia inverzet.

Rögzítünk egy $k \ge 0$ egészet! Minden $\sigma \in \mathcal{T}_k$ szimplexhez választunk egy $U_\sigma \subseteq M$ nyílt halmazt úgy, hogy mindegyik $\sigma \in \mathcal{T}_k$ metszi $U_\sigma$-t, és az $U_\sigma$ halmazok páronként diszjunktak. Minden $\sigma \in \mathcal{T}_k$-ra választunk olyan $\psi_\sigma \in \Omega^k(M)$ differenciál-formát, amelyik nulla az $U_\sigma$ halmazon kívül, és $\int_\sigma \psi_\sigma = 1$. Ezután minden $f : \Delta_k(M) \to \mathbb{R}$ koláncra legyen

$$\mathcal{J}^k(f) = \sum_{\sigma \in \mathcal{T}_k} f(\sigma) \cdot \psi_\sigma \,.$$

Világos, hogy $\tilde{\mathcal{I}}\big(\mathcal{J}^k(f)\big) = f$. Az is igaz, hogy $\mathcal{J}^{\cdot} \circ \tilde{\mathcal{I}}$ homotóp az identitáshoz (az $\Omega^{\cdot}(M)$ komplexuson), de azt most nem bizonyítjuk. □

**20.11. Tétel.** *Legyen $M$ egy differenciálható sokaság, $\mathcal{U}$ egy jó fedése. Az $M$ de Rham komplexusa lánc-ekvivalens a $\check{C}^{\cdot}\left(X,\mathcal{U};\ G\right)$ Čech* *komplexussal. Ezért minden $n$-re:*

$$H^n_{dR}(M) \cong \check{H}^n(X;\mathbb{R})$$

*Bizonyítás.* A azonnal következik a 3.24. Következményből, csak a megfelelő kettős komplexust kell kitölteni — amit az olvasóra bízunk! $\square$

**20.12. Feladat.** *Töltsd ki az előző bizonyítás végén felbukkanó kettős komplexust! Lásd be, hogy a sorok és az oszlopok valóban egzaktak!*

*Ötlet:* Minden $(p+1)$-elemű $J \subseteq I$ részhalmazhoz készítsd el a

$$\Omega^q\left(\bigcap_{j\in J} U_j\right)$$

csoportot. Ezek direkt szorzata legyen a 3.24. Következményben keresett $M^{p,q}$ csoport! A $q$ irányban a differenciál legyen a differenciál formák $d$ operátora. A $p$ iránban pedig imitáld a Čech komplexus differenciálját! Minden $q$ irányú oszlop DeRham komplexusok direkt szorzata, az egzaktság a Poincaré lemmából következik. Tekints egy $p$ irányú sort, egység-osztás segítségével lásd be, hogy pontrahúzható (2.17. Következmény). Ebből következik a $p$ irányú egzaktság. $\square$

**20.13. Feladat** (de Rham tétel másik bizonyítása)**.** *Lásd be a 20.10. Tételt a 20.11. Tétel és a 19.5. Tétel segítségével.*

**20.14. Feladat** (de Rham tétel harmadik bizonyítása)**.** *Lásd be a Mayer-Vietoris tétel (21.5. Tétel) de Rham kohomológiára vonatkozó változatát! Mutasd meg, hogy ebből is következik a 20.10. Tétel!*

## 21. Kivágás, Mayer-Vietoris sorozat

**21.1. Tétel** (Kivágás)**.** *Legyenek $A$ és $B$ olyan részhalmazok az $X$ topológikus térben, melyekre $\overline{B} \subseteq \mathrm{int}(A)$. Ekkor a $\Delta.(X\setminus B, A\setminus B) \to \Delta.(X,A)$ lánc-leképezés egy lánc-ekvivalencia.*

**21.2. Definíció.** *Legyenek $X$, $Y$ egy topológikus tér alterei. Azt mondjuk, hogy $\{X,Y\}$* jól vág *(angolul:* excisive*), ha*

$$X\cup Y = \mathrm{int}(X)\cup\mathrm{int}(Y),$$

*ahol a halmazok belsejét az $X\cup Y$ topológiájában számoljuk. Speciálisan, ha $Y\subseteq X$, akkor $\{X,Y\}$ jól vág.*

**21.3. Lemma.** *Ha $\{X,Y\}$ jól vág, akkor az alábbi (szinguláris) lánckomplexusok közti beágyazás lánc-ekvivalencia:*

$$\Delta.(X)+\Delta.(Y)\hookrightarrow\Delta.(X\cup Y)$$

*Ebből tenzor-szorzás, illetve a Hom funktor segítségével kapjuk az alábbi lánc-leképezéseket, ezek is lánc-ekvivalenciák. (G tetszőleges abel-csoport.)*

$$\Delta.(X) \otimes G + \Delta.(Y) \otimes G \hookrightarrow \Delta.(X \cup Y) \otimes G$$

$$\mathrm{Hom}\big(\Delta.(X), G\big) + \mathrm{Hom}\big(\Delta.(Y), G\big) \hookrightarrow \mathrm{Hom}\big(\Delta.(X \cup Y), G\big)$$

**21.4. Feladat.** *Lásd be a 21.1. Tétel következő általánosítását: ha $\{X, Y\}$ jól vág jól, akkor $(X, X \cap Y) \hookrightarrow (X \cup Y, Y)$ izomorfizmust indukál a szinguláris homológiákon, és kohomológiákon!*

**21.5. Tétel** (Mayer-Vietoris sorozat)**.** *Legyenek $X, Y, A, B$ alterek egy topológikus térben, melyekre $A \subseteq X$ és $B \subseteq Y$. Tegyük fel, hogy $\{X, Y\}$ és $\{A, B\}$ jól vágnak. Tekintsük az alábbi funktoriális rövid egzakt sorozat:*

$$0 \to \Delta.(X \cap Y, A \cap B) \to \Delta.(X, A) \oplus \Delta.(Y, B) \to \Big(\Delta.(X) + \Delta.(Y)\Big) \Big/ \Big(\Delta.(A) + \Delta.(B)\Big) \to 0$$

*Alább láthatók hozzá tartozó hosszú egzakt sorozatok (homológiára és kohomológiára). Tetszőleges együttható-csoporttal (vagy modulussal) érvényesek, az olvashatóság kedvéért az együtthatókat nem tüntettük fel:*

$$\xrightarrow{\delta_*} H_q(X \cap Y, A \cap B) \xrightarrow{i_*} H_q(X, A) \oplus H_q(Y, B) \xrightarrow{j_*} H_q(X \cup Y, A \cup B) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(X \cap Y, A \cap B) \xrightarrow{i_*}$$

$$\xrightarrow{\delta^*} H^q(X \cup Y, A \cup B) \xrightarrow{j^*} H^q(X, A) \oplus H^q(Y, B) \xrightarrow{i^*} H^q(X \cap Y, A \cap B) \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1}(X \cup Y, A \cup B) \xrightarrow{j^*}$$

## 22. Direkt szorzat és a $\Delta.$ funktor

**22.1. Tétel** (Eilenberg-Zilber)**.** *Legyenek $X, Y$ tópologikus terek. Létezik egy*

$$\Delta.(X \times Y) \cong \Delta.(X) \otimes \Delta.(Y)$$

*lánc-ekvivalencia, amelyk kanonikusan függ $X$-től és $Y$-tól.*

*Bizonyítás.* Ha $A$ és $B$ CW-komplexusok, akkor

$$\Delta^{CW}_{.}(A \times_{CW} B) \cong \Delta^{CW}_{.}(A) \otimes \Delta^{CW}_{.}(B) \tag{5}$$

kanonikusan izomorf (14.2. Definíció). Ezt az azonosságot az $A = \mathbb{S}(X)$ és a $B = \mathbb{S}(Y)$ CW-komplexusokra akarjuk alkalmazni. $X$ gyengén homotóp ekvivalens az $\mathbb{S}(X)$ CW-komplexussal (lásd a 16.5. Tételt), $Y$ gyengén homotóp ekvivalens $\mathbb{S}(Y)$-nal, ezért aztán $X \times Y$ gyengén homotóp ekvivalens az $\mathbb{S}(X) \times \mathbb{S}(Y)$ szorzattal, ami viszont gyengén homotóp ekvivalens az $\mathbb{S}(X) \times_{CW} \mathbb{S}(Y)$ CW-szorzattal (14.6. Feladat). Ezért a tétel következik az (5) azonosságból. $\square$

**22.2. Következmény.** *Legyenek* $(X, A)$ *és* $(Y, B)$ *olyan tér-párok (11.1. Definíció), melyekre* $\{X \times B, A \times Y\}$ *jól vág (21.2. Definíció). Ekkor van egy természetes lánc-ekvivalencia:*

$$\Delta.\Big(X \times Y,\, \big(A \times Y \cup X \times B\big)\Big) \cong \Delta.(X, A) \otimes \Delta.(Y, B)$$

*Ötlet:* Használjuk a 22.1. Tételt és a következő, modulusokra vonatkozó azonosságot:

$$\big(M/N\big) \otimes \big(P/Q\big) \cong \big(M \otimes N\big)\Big/\big(M \otimes Q + N \otimes P\big) \tag{6}$$

□

**22.3. Feladat.** *Igazold a (6) azonosságot!*

**22.4. Megjegyzés.** *Érdekes az analógia van a szabad algebrák és az alábbi tétel között. Adott algebrai struktúrák egy* $\mathcal{A}$ *osztálya és egy* $X$ *halmaz. Az* $X$ *által generált* szabad algebra *egy olyan* $F_X \in \mathcal{A}$ *algebra, amely tartalmazza* $X$*-et, és tetszőleges* $A \in \mathcal{A}$ *algebrába képező tetszőleges* $X \to A$ *függvény egyértelműen kiterjeszthető egy* $F_x \to A$ *homomorfizmussá. Az* $X$ *halmazt hívjuk az* $F_X$ szabad generátor rendszerének*. Az* $F_X$ *szabad algebra, ha létezik, izomorfizmus erejéig egyértelmű, csak az* $X$ *számosságától függ (meg persze* $\mathcal{A}$*-tól). Szép* $\mathcal{A}$ *osztály esetén (pl. ha* $\mathcal{A}$*-t azonosságokkal definiáljuk) a létezése is könnyen bizonyítható.*

*Tekintsük a „pozitív dimenzióban aciklikus" funktorok világát. Az alábbi tételünk arról szól, hogy* $\Delta.$ *„szabad funktor"-ként működik ebben a világban,* $H_0(\Delta.)$ *játssza a „szabad generátor rendszer" szerepét. A bizonyítás még hangsúlyosabbá teszi az analógiát: az aciklikusságot „azonosság"-ként értelmezzük.*

**22.5. Tétel** (Eilenberg, aciklikus modellek módszere)**.** *Legyen* $\mathcal{G}.$ *egy funktor, ami topológikus terekhez komplexusokat rendel (és folytonos függvényekhez lánc-homomorfizmusokat). Tegyük fel, hogy*

$$H_n\big(\mathcal{G}.(\underline{\Delta}^m)\big) = 0 \quad \text{ha } n \geq 1 \text{ és } m \geq 0,$$

*ahok* $\underline{\Delta}^m$ *jelöli az* $m$*-dimenziós szimplexet (16.1. Definíció). Ekkor*

(a) *Minden* $t : H_0(X; \mathbb{Z}) \to H_0\big(\mathcal{G}.(X)\big)$ *természetes transzformáció egy (*$X$*-től függő) természetes* $\tau. : \Delta. \to \mathcal{G}.$ *lánc-homomorfizmusból származik:* $t = H_0(\tau.)$*.*

(b) *A fenti* $\tau.$ *nem feltétlenül egyértelmű. Ha* $\tilde{\tau}. : \Delta. \to \mathcal{G}.$ *egy másik természetes lánc-homomorfizmus amire* $H_0(\tau.) = H_0(\tilde{\tau}.)$*, akkor* $\tau.$ *és* $\tilde{\tau}.$ *lánc-homotópok egy* $D.$ *(*$X$*-től függő) természetes lánc-homotópiával.*

**22.6. Feladat.** *Lásd be, hogy* $H_0\big(\Delta.(X)\big)$ *kanonikusan izomorf az* $X$ *összefüggő komponenzei által szabadon generált szabad Abel csoporttal. Konstruálj ez alapján egy* $H_0(\Delta.) \to H_0(\Delta.)\otimes H_0(\Delta.)$ *természetes transzformációt!*

**22.7. Következmény.** *Létezik egy olyan* $\Delta. \xrightarrow{\tau.} \Delta.\otimes\Delta.$ *természetes transzformáció, amire* $H_0(\tau.)$ *éppen a 22.6. Feladat természetes transzformációja, és bármely két ilyen transzformációt összeköt egy természetes lánc-homotópia.*

*Bizonyítás.* A $\mathcal{G}. = \Delta.\otimes\Delta.$ funktor kielégíti a 22.5. Tétel feltételeit. $\square$

**22.8. Konstrukció.** *Az alábbi diagramon* $\delta$ *jelöli az* $X \to X \times X$ *átló-leképezést,* $EZ$ *pedig az Eilenberg-Zilber tételben (22.1. Tétel) szereplő lánc-ekvivalenciát,* $\tau.$ *pedig a két másik lánc-homomorfizmus kompozíciója:*

$$\begin{tikzcd} \Delta.(X) \arrow[r, "\Delta.(\delta)"] \arrow[rr, bend left, "\tau."] & \Delta.(X\times X) \arrow[r, "EZ"] & \Delta.(X)\otimes\Delta.(X) \end{tikzcd}$$

*Ez a* $\tau.$ *nyilván kielégíti a 22.7. Következmény feltételeit. Sajnos az* $EZ$ *leképezés definíciója nem konstruktív, invertálni kell hozzá néhány lánc-ekvivalenciát. Íme, egy másik, teljesen explicit konstrukció, az* Alexander-Whitney lánc-homomorfizmus*:*

$$\tau_n : \Delta_n \to \bigoplus_{p+q=n} \Delta_p \otimes \Delta_q \ , \quad \sigma \to \sum_{p+q=n} {}_p\sigma \otimes \sigma_q \ ,$$

*ahol* $\sigma$ *egy szinguláris* $n$*-szimplex,* ${}_p\sigma$ *illetve* $\sigma_q$ *jelöli a* $\sigma$ *szimplex első* $p+1$*, illetve utolsó* $q+1$ *csúcsa által kifeszített lapot. Tehát* $\dim\big({}_p\sigma\big) = p$*,* $\dim\big(\sigma_q\big) = q$*, és a két lapnak egyetlen közös csúcsa van: a* $(p+1)$*-edik. A két konstrukció természetesen különböző* $\tau.$ *lánc-homomorfizmusokat ad, de a 22.7. Következmény miatt ezek lánc-homotópok.*

**22.9. Feladat.** *Tekintsük a 22.8. Konstrukciót.*

(a) *Lásd be, hogy az Alexander-Whitney lánc-homomorfizmus valóban lánc-homomorfizmus!*
(b) *Lásd be, hogy mindkét* $\tau.$ *transzformáció kielégíti a 22.7. Következmény feltételeit! (Tehát lásd be, hogy természetes transzformációk, és lásd be, hogy* $H_0(\tau.)$ *éppen a 22.6. Feladatbeli homomorfiznus!)*
(c) *Ebből persze következik, hogy a két konstrukció egymással lánc-ekvivalens* $\tau.$ *lánc-homomorfizmusokat ad.*

**22.10. Tétel.** *Legyn* $\tau.$ *a 22.7. Következménybeli lánc-homomorfizmus!*

(a) *Jelölje* $\sigma. : \Delta.(X)\otimes\Delta.(X) \xrightarrow{\cong} \Delta.(X)\otimes\Delta.(X)$ *az* $x\otimes y \to y\otimes x$ *szimmetriát. Az alábbi kompozíció lánc-homotóp* $\tau.$*-val:*

$$\Delta.(X) \xrightarrow{\tau.} \Delta.(X)\otimes\Delta.(X) \xrightarrow{\sigma.} \Delta.(X)\otimes\Delta.(X)$$

(b) *Jelolje* $\psi$ *tenzor szorzat asszociativitás-izomorfizmusát. Tekintsük az alábbi diagramot:*

$$\begin{tikzcd}
 & & \Delta.(X)\otimes\Delta.(X)\otimes\Delta.(X) \arrow[d, "\psi"'] \\
\Delta.(X) \arrow[r, "\tau."] & \Delta.(X)\otimes\Delta.(X) \arrow[ur, "\mathrm{id}_{\Delta.(X)}\otimes\tau."] \arrow[dr, "\tau.\otimes\mathrm{id}_{\Delta.(X)}"'] & \\
 & & \Delta.(X)\otimes\Delta.(X)\otimes\Delta.(X)
\end{tikzcd}$$

*A következő két kompozíció lánc-homotóp:*

$$\psi\circ\left(\mathrm{id}_{\Delta.(X)}\otimes\tau.\right)\circ\tau. \sim \left(\tau.\otimes\mathrm{id}_{\Delta.(X)}\right)\circ\tau.$$

*Bizonyítás.* Mindkét állítás azonnal következik a 22.5. Tételből. □

**22.11. Feladat.** *Tekintsük az olyan* $(X,A,B)$ *hármasok kategóriáját, amelyekben* $X$ *topológikus tér,* $A,B\subseteq X$, *és* $\{A,B\}$ *jól vágnak.*

(a) *Lásd be a 22.5. Tétel analógját az* $(X,A,B)\to\Delta.(X,A\cup B)$ *funktorra!*

(b) *Ez alapján mutasd meg a 22.7. Következmény általánosítását: hogy van egy lánc-homotópia erejéig egyértelmű természetes transzformáció:*

$$\Delta.(X,A\cup B)\to\Delta.(X,A)\otimes\Delta.(X,B)$$

## 23. Univerzális Együttható Tételek — topológia

Az univerzális együttható tételekre úgy érdemes gondolni, hogy az egészegyütthatós homológia-csoportok „lényegében meghatározzák” a tetszőleges $G$ együtthatóval számolt homológia- és kohomológia-csoportokat.

**23.1. Tétel** (Univerzális Együttható tétel homológiára)**.** *Legyen* $X$ *egy topológikus tér,* $G$ *egy együttható csoport. Minden* $n$*-re létezik egy egzakt sorozat, amelyik funktoriálisan függ* $X$*-től és* $G$*-től:*

$$0\to H_n(X;\mathbb{Z})\otimes G\to H_n\big(X;G\big)\to \mathrm{Tor}_1\Big(H_{n-1}(X;\mathbb{Z}),G\Big)\to 0$$

*Legyen most* $(X,A)$ *egy tér-pár (11.1. Definíció). Ehhez is tartozik egy egzakt sorozat, amelyik funktoriálisan függ az* $(X,A)$ *pártól és* $G$*-től:*

$$0\to H_n(X,A;\mathbb{Z})\otimes G\to H_n\big(X,A;G\big)\to \mathrm{Tor}_1\Big(H_{n-1}(X,A;\mathbb{Z}),G\Big)\to 0$$

*A fenti egzakt sorozatok felhasadnak. (A felhasadás nem kanonikus.)*

*Bizonyítás.* Alkalmazzuk a 7.1. Tételt a $\Delta.(X)$ illetve a $\Delta.(X,A)$ komplexusokra. □

**23.2. Tétel** (Univerzális Együttható tétel kohomológiára)**.** *Legyen $X$ egy topológikus tér, $G$ egy együttható csoport. Minden $n$-re létezik egy egzakt sorozat:*

$$0 \to \operatorname{Ext}^1\Big(H_{n-1}(X;\mathbb{Z}),G\Big) \to H^n\big(X;G\big) \to \operatorname{Hom}\Big(H_n(X;\mathbb{Z}),G\Big) \to 0$$

*amelyik funktoriálisan függ $X$-től és $G$-től. Legyen most $(X,A)$ egy topológikus pár (11.1. Definíció). Ehhez is tartozik egy egzakt sorozat:*

$$0 \to \operatorname{Ext}^1\Big(H_{n-1}(X,A;\mathbb{Z}),G\Big) \to H^n\big(X,A;G\big) \to \operatorname{Hom}\Big(H^n(X,A;\mathbb{Z}),G\Big) \to 0$$

*amelyik funktoriálisan függ az $(X,A)$ pártól és $G$-től. A fenti egzakt sorozatok felhasadnak. (A felhasadás nem kanonikus.)*

*Bizonyítás.* Alkalmazzuk a 7.4. Tételt a $\Delta.(X)$ illetve a $\Delta.(X,A)$ komplexusokra. □

Az univerzális együttható tételek egy variációja pedig azt mutatja, hogy (bizonyos végességi feeltételek mellett) az egészegyütthatós kohomológia-csoportok is „lényegében meghatározzák" a tetszőleges $G$ együtthatóval számolt homológia- és kohomológia-csoportokat.

**23.3. Tétel** (Univerzális Együttható tétel komológiára II.)**.** *Legyen $X$ egy topológikus tér, $G$ egy együttható csoport. Tegyük fel vagy azt, hogy $G$ végesen generált, vagy pedig azt, hogy $H^n(X;\mathbb{Z})$ végesen generált minden $n$-re. Ekkor minden $n$-re létezik egy egzakt sorozat:*

$$0 \to H^n(X;\mathbb{Z}) \otimes G \to H^n\big(X;G\big) \to \operatorname{Tor}_1\Big(H^{n+1}(X;\mathbb{Z}),G\Big) \to 0$$

*amelyik funktoriálisan függ $X$-től és $G$-től. Legyen most $(X,A)$ egy topológikus pár (11.1. Definíció) most is feltesszük vagy azt, hogy $G$ végesen generált, vagy pedig azt, hogy $H^n(X,A;\mathbb{Z})$ végesen generált minden $n$-re. Ekkor minden $n$-re létezik egy egzakt sorozat:*

$$0 \to H^n(X,A;\mathbb{Z}) \otimes G \to H^n\big(X,A;G\big) \to \operatorname{Tor}_1\Big(H^{n+1}(X,A;\mathbb{Z}),G\Big) \to 0$$

*amelyik funktoriálisan függ az $(X,A)$ pártól és $G$-től. Ezek az egzakt sorozatok felhasadnak. (A felhasadás nem kanonikus.)*

*Bizonyítás.* Alkalmazzuk a 7.1. Tételt a $\operatorname{Hom}\Big(\Delta.(X),\mathbb{Z}\Big)$ illetve a $\operatorname{Hom}\Big(\Delta.(X,A),\mathbb{Z}\Big)$ komplexusokra. Menet közben használni kell az alábbi azonosságot:

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{A},\mathbb{Z}) \otimes G = \operatorname{Hom}(\mathcal{A},G) \tag{7}$$

ahol $\mathcal{A}$ is egy Abel csoport, és vagy $\mathcal{A}$ vagy $G$ végesen generált. □

**23.4. Feladat.** *Lásd be a (7) azonosságot (az ott megadott feltételek mellett)! Mutass rá ellenpéldát abban az esetben, ha sem $\mathcal{A}$ sem $G$ nem végesen generált!*

**23.5. Feladat.** *A 23.3. Tétel* $\mathrm{Tor}_1$*-es tagjában és az alábbi 23.6. Tétel* $\mathrm{Ext}^1$*-es tagjában* $(n+1)$*-edik kohomológia szerepel, pedig a bizonyításban használt 7.1. Tételben és a 7.4. Tételben* $(n-1)$*-edik homológia szerepelt. Hogyan lehetséges ez?*

**23.6. Tétel** (Univerzális Együttható tétel homológiára II.)**.** *Legyen* $X$ *egy topológikus tér,* $G$ *egy együttható csoport. Tegyük fel, hogy* $H^n(X;\mathbb{Z})$ *végesen generált minden* $n$*-re. Ekkor minden* $n$*-re létezik egy egzakt sorozat, amelyik funktoriálisan függ* $X$*-től és* $G$*-től:*

$$0 \to \mathrm{Ext}^1\Big(H^{n+1}(X;\mathbb{Z}), G\Big) \to H_n\big(X;G\big) \to \mathrm{Hom}\Big(H^n(X;\mathbb{Z}), G\Big) \to 0$$

*Legyen most* $(X, A)$ *egy topológikus pár (11.1. Definíció) Ehhez is tartozik egy egzakt sorozat, amelyik funktoriálisan függ az* $(X, A)$ *pártól és* $G$*-től:*

$$0 \to \mathrm{Ext}^1\Big(H^{n+1}(X,A;\mathbb{Z}), G\Big) \to H_n\big(X,A;G\big) \to \mathrm{Hom}\Big(H^n(X,A;\mathbb{Z}), G\Big) \to 0$$

*A fenti egzakt sorozatok felhasadnak. (A felhasadás nem kanonikus.)*

*Bizonyítás.* A 4.9. Lemma segítségével választunk végesen generált szabad approximációkat a $\mathrm{Hom}\Big(\Delta_\cdot(X),\mathbb{Z}\Big)$ és a $\mathrm{Hom}\Big(\Delta_\cdot(X,A),\mathbb{Z}\Big)$ Abel csoport komplexusokhoz. Ezekre alkalmazzuk a 7.4. Tételt. Menet közben használni kell az alábbi azonosságot:

$$\mathrm{Hom}\Big(\mathrm{Hom}(F,\mathbb{Z}), G\Big) = F \otimes G \tag{8}$$

ahol $F$ egy végesen generált szabad Abel csoport. $\square$

**23.7. Feladat.** *Lásd be a (8) azonosságot (az ott megadott feltételek mellett)! Mutass rá ellenpéldát abban az esetben, ha* $F$ *nem szabad, vagy nem végesen generált!*

## 24. Külső szorzás — topológia

**24.1. Konstrukció** (Külső szorzat — kohomológia)**.** *Tetszőleges* $X$ *és* $Y$ *topológikus terekhez,* $M$ *és* $N$ *modulusokhoz,* $p, q$ *egészekhez hozzárendelünk egy*

$$H^p(X;M) \otimes H^q(Y;N) \xrightarrow{\times} H^{p+q}\Big(X \times Y; M \otimes N\Big)$$

külső szorzás *homomorfizmust (angolul:*cross product*), ami minden változójában természetes transzformáció. A hozzárendelés az alábbi, tér-párokra vonatkozó konstrukció speciális esete,* $A = B = \emptyset$ *választással.*

*Legyenek $(X, A)$ és $(Y, B)$ olyan tér-párok (11.1. Definíció), melyekre $\{X \times B, A \times Y\}$ jól vág (21.2. Definíció), és legyenek $M$, $N$ modulusok. Tekintsük az alábbi diagramot, ahol az első lánc-homomorfizmus a 8.4. Feladatbeli külső szorzás, a másodikat pedig az Eilenberg-Zilber tételből (22.2. Következmény) kapjuk:*

$$\begin{array}{c}
\mathrm{Hom}\big(\Delta_\cdot(X,A),\,M\big) \otimes \mathrm{Hom}\big(\Delta_\cdot(Y,B),\,N\big) \\
\big\downarrow \times \\
\mathrm{Hom}\Big(\Delta_\cdot(X,A) \otimes \Delta_\cdot(Y,B),\,M \otimes N\Big) \\
\big\downarrow \mathrm{EZ} \\
\mathrm{Hom}\Big(\Delta_\cdot\big(X \times Y,\,(A \times Y \cup X \times B)\big),\,M \otimes N\Big)
\end{array}$$

*Ha a kompozícióra alkalmazzuk a homológia funktort, és használjuk a 8.1. Tétel, akkor a* külső szorzás *(angolul:*cross product*) homomorfizmushoz jutunk:*

$$H^p(X, A;\, M) \otimes H^q(Y, B;\, N) \xrightarrow{\times} H^{p+q}\Big(X \times Y,\, \big(X \times B \cup A \times Y\big);\, M \otimes N\Big)$$

*Ez minden változójában természetes transzformáció.*

**24.2. Feladat** (Külső szorzat — homológia)**.** *A 24.1. Konstrukció mintájára konstruáld meg az alábbi* külső szorzás *homomorfizmusokat:*

$$H_p(X;\, M) \otimes H_q(Y;\, N) \xrightarrow{\times} H_{p+q}\Big(X \times Y;\, M \otimes N\Big)$$

$$H_p(X, A;\, M) \otimes H_q(Y, B;\, N) \xrightarrow{\times} H_{p+q}\Big(X \times Y,\, \big(X \times B \cup A \times Y\big);\, M \otimes N\Big)$$

## 25. Künneth formulák — topológia

Künneth formulái segítségével topológikus terek direkt szorzatának a homológia- illetve kohomológia-csoportjait számíthatjuk ki. Ebben a fejezetben csak kohomológia-csoportokkal foglalkozunk. Természetesen léteznek ezekkel analóg, homológia-csoportokra vonatkozó formulák is, amelyek ugyanilyen módon bizonyíthatók.

**25.1. Tétel** (Künneth formula kohomológiára — I)**.** *Legyenek $X$ és $Y$ topológikus terek, $\mathbb{F}$ egy test. Ekkor a külső szorzat (lásd a 24.1. Konstrukciót) izomorfizmust indukál:*

$$H^n\Big(X \times Y;\, \mathbb{F}\Big) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^p(X;\, \mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} H^q(Y;\, \mathbb{F})$$

*Bizonyítás.* Következik a 9.2. Feladat állításából. □

**25.2. Tétel** (Künneth formula kohomológiára — II)**.** *Legyenek $X$ és $Y$ topológikus terek, $M$ és $N$ modulusok az $R$ gyűrű felett. Tegyük fel, hogy $H^q(Y;R)$ szabad $R$-modulus minden $q$-ra. Ekkor a külső szorzat (lásd a 24.1. Konstrukciót) izomorfizmust indukál:*

$$H^n\Big(X \times Y;\, M \otimes N\Big) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^p(X;\, M) \otimes H^q(Y;\, N)$$

*Bizonyítás.* Következik a 9.7. Tételből. □

## 26. Általános Künneth tételek — topológia

**26.1. Tétel** (Künneth formula kohomológiára — III)**.** *Legyenek $X$, $Y$ topológikus terek, $M$ modulus az $R$ gyűrű felett. Ekkor létezik az alábbi (nem kanonikus) izomorfizmus:*

$$H^n\big(X \times Y;\, M\big) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^p\Big(X;\, H^q\big(Y;\, M\big)\Big)$$

*Ha $R$ test, akkor $H^p\Big(X;\, H^q\big(Y;\, M\big)\Big) \cong H^p(X;\, R) \otimes H^q(X;\, M)$, és a fenti izomorfizmus inverze éppen a külső szorzat (24.1. Konstrukció, összegezve $p+q=n$-re).*

*Ötlet:* Alkalmazzuk a 10.4. Tételt az következő szereposztásban:

$$\mathcal{E}_\cdot = \Delta_\cdot(X, A)\,, \quad \mathcal{F}^\cdot = \operatorname{Hom}\big(\Delta_\cdot(Y, B), M\big)\,.$$

□

**26.2. Feladat.** *Fogalmazd meg, és bizonyítsd be a 26.1. Tétel térpárokra vonatkozó általánosítását!*

**26.3. Tétel** (Künneth egzakt sorozat kohomológiára)**.** *Legyenek $X$, $Y$ topológikus terek, $R$ nullosztómentes főideálgyűrű, $M$, $N$ $R$-modulusok. Tegyük fel, hogy az alábbi végességi feltételek közül legalább az egyik teljesül:*

*— $H^n(X;\, \mathbb{Z})$ és $H^n(Y;\, \mathbb{Z})$ végesen generált minden $n$-re,*
*— $H^n(X;\, \mathbb{Z})$ végesen generált, minden $n$-re, és $N$ is végesen generált.*

*Ekkor létezik az alábbi funktoriális rövid egzakt sorozat:*

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H^p(X\,, M) \otimes H^q(Y;\, N) \to H^n\big(X \times Y;\, M \otimes N\big) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \bigoplus_{p+q=n+1} \operatorname{Tor}_1\Big(H^p(X\,, M),\, H^q(Y;\, N)\Big) \to 0$$

*Ez a sorozat (nem kanonikusan) felhasad.*

*Ötlet:* Használd Eilenberg-Zilber tételt (22.1. Tétel), a 4.9. Lemmát, a 23.3. Tétel bizonyításában szereplő (7) azonosságot, és a 10.2. Tételt. □

**26.4. Feladat.** *Fogalmazd meg, és bizonyítsd be a 26.3. Tétel térpárokra vonatkozó általánosítását!*

**26.5. Feladat.** *Lásd be, hogy a 26.3. Tételben szereplő*

$$\bigoplus_{p+q=n} H^p(X\ , M) \otimes H^q(Y;\, N) \to H^n\big(X \times Y;\, M \otimes N\big)$$

*homomorfizmus nem más, mint a külső szorzás (24.1. Konstrukció).*

**26.6. Feladat.** *Ha R test, akkor a 26.3. Tétel ad egy*

$$H^n\big(X \times Y;\, M \otimes N\big) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^p(X\ , M) \otimes H^q(Y;\, N)$$

*izomorfizmust (feltéve, hogy a végességi feltétel teljesül). Lásd be, hogy ez ugyanaz az izomorfizmus, mint amit a 26.1. Tétel ígér. (Sőt, a 26.5. Feladat alapján ez megegyezik a külső szorzással is.)*

**26.7. Feladat.** *Fogalmazd meg, és bizonyítsd be a Künneth formulák (26.1 és 26.3) homológia-csoportokra vonatkozó variánsát. (Használd a 10.2. Tételt!)*

## 27. Szorzat struktúrák

**27.1. Konstrukció** (csésze szorzat)**.** *Legyen $X$ egy topologikus tér, $A, B \leq X$ alterek, $M$ és $N$ modulusok egy $R$ gyűrű fölött. Tegyük fel, hogy $\{A, B\}$ jól vág (21.2. Definíció). Megépítjük az alábbi* csésze szorzás *homomorfizmusokat (angolul:* cup product*):*

$$H^p\big(X;\, R\big) \otimes H^q\big(X;\, R\big) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}\big(X;\, R\big)$$

$$H^p\big(X, A;\, M\big) \otimes H^q\big(X, B;\, N\big) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}\Big(X,\, (A \cup B);\, M \otimes N\Big)$$

*Mindkét sorozat minden változóban természetes transzformáció.*

*Az alábbi diagrammokon az első nyíl a külső szorzás (8.4. Feladat), a második a 22.2. Következményből, a harmadik pedig az $X \to X \times X$*

*átlós beágyazásból származó lánc-homomorfizmus:*

$$\begin{gathered}\operatorname{Hom}\big(\Delta.(X),\, R\big)\otimes\operatorname{Hom}\big(\Delta.(X),\, R\big)\\ \downarrow\\ \operatorname{Hom}\big(\Delta.(X)\otimes\Delta.(X),\, R\big)\\ \downarrow\\ \operatorname{Hom}\big(\Delta.(X\times X),\, R\big)\\ \downarrow\\ \operatorname{Hom}\Big(\Delta.(X),\, R\Big)\end{gathered}$$

*A diagrammon szereplő leképezések kompozíciójára alkalmazzuk a 8.1. Tételt, így kapjuk a csésze szorzást. A térpárokra vonatkozó csésze szorzást pedig az alábbi diagrammból kapjuk:*

$$\begin{gathered}\operatorname{Hom}\big(\Delta.(X,A),\, M\big)\otimes\operatorname{Hom}\big(\Delta.(X,B),\, N\big)\\ \downarrow\\ \operatorname{Hom}\Big(\Delta.(X,A)\otimes\Delta.(X,B),\, M\otimes N\Big)\\ \downarrow\\ \operatorname{Hom}\Big(\Delta.\big(X\times X,\, (A\times X\cup X\times B)\big),\, M\otimes N\Big)\\ \downarrow\\ \operatorname{Hom}\Big(\Delta.\big(X,\, (A\cup B)\big),\, M\otimes N\Big)\end{gathered}$$

**27.2. Feladat.** *A 24.1. Konstrukció ad egy*

$$H^p(X,A;\, M)\otimes H^q(X,B;\, N)\xrightarrow{\times} H^{p+q}\Big(X\times X,\, \big(X\times B\cup A\times X\big);\, M\otimes N\Big)$$

*homomorfizmust, ezt komponáljuk az $X\to X\times X$ átló menti visszahúzással. Lásd be, hogy éppen a 27.1. Konstrukcióbeli csésze szorzást kapjuk!*

**27.3. Konstrukció** (sapka szorzat)**.** *Legyen $X$ egy topológikus tér, $A, B\le X$ alterek, $M$ és $N$ modulusok egy $R$ gyűrű fölött. Tegyük fel, hogy $\{A,B\}$ jól vág (21.2. Definíció). Megépítjük az alábbi* sapka szorzás *homomorfizmusokat (angolul:* cap product*):*

$$H^p\big(X;\, R\big)\otimes H_n\big(X;\, R\big)\xrightarrow{\cap} H_{n-p}\big(X;\, R\big)$$

$$H^p\big(X,A;\, M\big)\otimes H_n\Big(X,\, (A\cup B);\, N\Big)\xrightarrow{\cap} H_{n-p}\big(X,B;\, M\otimes N\big)$$

*Mindkét sorozat minden változóban természetes transzformáció.*

*Az alábbi diagrammon az első lánc-homomorfizmus az* $X \xrightarrow{\delta} X \times X$ *átlós leképezésből, a második az Eilenberg-Zilber tétel (22.2. Következmény)* $\tau_*$ *lánc-ekvivalenciájából származik, a harmadik leképezés pedig a* $\operatorname{Hom}\big(\Delta.(X),\, R\big)$*-beli homomorfizmusok kiértékelése az első* $\Delta.(X)$ *elemein, tehát egy* $f \otimes x \otimes y$ *alakú szorzathoz az* $f(x)y$ *elemet rendeli:*

$$\begin{array}{c}
\operatorname{Hom}\big(\Delta.(X),\, R\big) \otimes \Delta.(X) \\
\big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\delta_*} \\
\operatorname{Hom}\big(\Delta.(X),\, R\big) \otimes \Delta.(X \times X) \\
\big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\tau_*} \\
\operatorname{Hom}\big(\Delta.(X),\, R\big) \otimes \Delta.(X) \otimes \Delta.(X) \\
\big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{eval}\otimes\mathrm{id}} \\
R \otimes \Delta.(X)
\end{array}$$

*Fontos észrevétel, hogy amíg az első két leképezés lánc-homomorfizmus, a harmadik,* $\mathrm{eval} \otimes \mathrm{id}$*, csak fokszámtartó abelcsoport homomorfizmus, de nem feltétlenül kommutál a komplexusok határ-homomorfizmusával. Ezzel szemben ha* $c$ *egy tetszőleges kolánc* $\operatorname{Hom}\big(\Delta.(X),\, R\big)$*-ben, azaz* $\partial c = 0$*, akkor a* $\{c\} \otimes \Delta.(X) \otimes \Delta.(X) \xrightarrow{\mathrm{eval}\otimes\mathrm{id}} R \otimes \Delta.(X)$ *leképezés egy lánc-homomorfizmus.*

*A tenzor-szorzat totális komplexusában most alsó indexeket fogunk használni. Az egyik tényező felső indexet használ — szokásunkhoz híven ezt negatívan számítjuk a totális komplexus indexébe. Tehát a 8.1. Tétel és a diagrammon szereplő első két lánc-homomorfizmus segítségével kapunk egy*

$$H^p(X;R) \otimes_R H_n(X;R) \to H_{n-p}\Big(\overline{\operatorname{Hom}\big(\Delta.(X),\, R\big) \otimes \Delta.(X) \otimes \Delta.(X)}\Big)$$

*homomorfizmust. Könnyű ellenőrizni, hogy* $\mathrm{eval} \otimes \mathrm{id}$ *is indukál egy*

$$H_{n-p}\Big(\operatorname{Hom}\big(\Delta.(X),\, R\big) \otimes \Delta.(X) \otimes \Delta.(X)\Big) \to H_{n-p}(X;R)$$

*homomorfizmust, annak ellenére, hogy ő maga nem lánc-homomorfizmus. Az utóbbi két homomorfizmus kompozíciója a sapka szorzás. A térpárokra vonatkozó sapka szorzást pedig az alábbi diagrammból kapjuk:*

$$\begin{array}{c}
\operatorname{Hom}\big(\Delta.(X,A),\ M\big)\otimes\Delta.\big(X,\ (A\cup B)\big)\otimes N\\
\big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\delta_*}\\
\operatorname{Hom}\big(\Delta.(X,A),\ M\big)\otimes\Delta.\big(X\times X,\ (A\times Y\ \cup\ X\times B)\big)\otimes N\\
\big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\tau_*}\\
\operatorname{Hom}\big(\Delta.(X,A),\ M\big)\otimes\Delta.(X,A)\otimes\Delta.(X,B)\otimes N\\
\big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{eval}\otimes\mathrm{id}}\\
M\otimes\Delta.(X,B)\otimes N
\end{array}$$

**27.4. Feladat.** *Lást be, hogy a 27.3. Konstrukcióban szereplő* $\mathrm{eval}\otimes\mathrm{id}$ *leképezés, annak ellenére, hogy nem lánc-homomorfizmus, mégiscsak indukál egy leképezést a megfelelő homológia csopotok között!*

**27.5. Tétel.** *Legyenek $(X,A)$ és $(Y,B)$ tér-párok, és tegyük fel, hogy $\{X\times B, A\times Y\}$ jól vág (21.2. Definíció). Lelölje $f : X\times Y\to X$ és $g : X\times Y\to Y$ a vetítéseket. Ekkor tetszőleges $a\in H^p(X,A;\,M)$ és $b\in H^q(X,B;\,N)$ kohomológia-osztályokra:*

$$a\times b = f^*(a)\cup g^*(b)$$

*Másrészt, ha $X=Y$, akor a feltétel miatt $\{A,B\}$ jól vág, és a $\phi : X\to X\times X$ átlós leképezés ($\phi(x)=(x,x)$) segítségével:*

$$a\cup b=\phi^*(a\times b)$$

**27.6. Tétel** (Szorzat-azonosságok)**.** *Rögzítsünk egy $R$ gyűrűt. Az alábbi azonosságokban minden homológiát és kohomológiát $R$-modulus együtthatókkal számolunk. $a,b,c,d$ kohomológia-osztályokat, $x,y$ pedig homológia-osztályokat jelölnek, $1$ jelöli a konstans $1$ kohomológia-osztályt (17.4. Definíció, olyan esetben, ha az együttható-csoport éppen $R$), $f$ terek vagy tér-párok közti folytonos függvény. Nem részletezzük, hogy pontosan melyik térhez vagy térpárhoz tartoznak — az azonosságok minden olyan esetben érvényesek, ha a bennük előírt műveletek elvégezhetők:*

$$a\cup b=(-1)^{\deg(b)\deg(a)}b\cup a$$

$$(a\cup b)\cup c=a\cup(b\cup c)\ ,\quad (a\cup b)\cap x=a\cap(b\cap x)$$

$$f^*(a\cup b)=f^*a\cup f^*b\ ,\quad f_*\big(f^*a\cap x\big)=a\cap f_*x$$

$$1\cup a=a\cup 1=a\ ,\quad 1\cap x=x$$

$$(a\times b)\cup(c\times d)=(-1)^{\deg(b)\deg(c)}(a\cup c)\times(b\cup d)$$

$$(a\times b)\cap(x\times y)=(-1)^{\deg(x)\deg(b)}(a\cap x)\times(b\cap y)$$

*Ötlet:* Minden következik a korábbi eredményekből: 8.6. Tétel, 22.6. Feladat, 22.7. Következmény, 22.9. Konstrukció, 27.5. Tétel. □

Most megvizsgáljuk, mi a kapcsolat a különféle szorzások, és a Mayer-Vietoris sorozatokban (21.5. Tétel) szereplő $\partial_*$ illetve $\delta^*$ homomorfizmusok között. A Mayer-Vietoris sorozat egy rövid egzakt komplexus-sorozathoz tartozó hosszú egzakt sorozat, tehát a 8.3. Tételtől és a 8.6. Tételtől várhatjuk, hogy a kívánt azonosságokat adják.

**27.7. Tétel** (Sapka-szorzás és a Mayer-Vietoris sorozat)**.** *Legyenek $A, B$ alterek egy $X$ topologikus térben. Tegyük fel, hogy $\{A, B\}$ jól vág. Legyen $x_{A\cap B} \in H_n\big(X, A\cap B; \mathbb{Z}\big)$ egy tetszőleges homológia osztály, jelölje $x_A$, $x_B$ és $x_{A\cup B}$ az $x_{A\cap B}$ képét a $H_n(X, A)$, $H_n(X, B)$ illetve $H_n(X, A\cup B)$ homológia-csoportokban. Az alábbi két sora az $(X, A)\cup(X, B) = \big(X, A\cup B\big)$ fedéshez, illetve az $X\cup X = X$ fedéshez tartozó Mayer-Vietoris sorozatok részlete (lásd a 21.5. Tételt), a diagramm előjel erejéig kommutatív:*

$$\begin{tikzcd} H^p(X, A\cup B) \arrow[r] \arrow[d, "\cap x_{A\cup B}"] & H^p(X,A)\oplus H^p(X,B) \arrow[r] \arrow[d, "\left(\cap x_A, \cap(-x_B)\right)"] & H^p(X, A\cap B) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "\cap x_{A\cap B}"] & H^{p+1}(X, A\cup B) \arrow[d, "\cap x_{A\cup B}"] \\ H_{n-p}(X) \arrow[r] & H_{n-p}(X)\oplus H_{n-p}(X) \arrow[r] & H_{n-p}(X) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{n-p-1}(X) \end{tikzcd}$$

**27.8. Feladat.** *Keresd meg a 27.7. Tétel egy csésze-szorzásra vonatkozó változatát!*

**27.9. Definíció.** *Legyen $(X, A)$ egy tér-pár, $M$ modulus az $R$ gyűrű felett. Bevezetjük a*

$$H^*(X, A;\, R) = \bigoplus_n H^n(X, A;\, R) \qquad \text{és} \qquad H_*(X, A;\, M) = \bigoplus_n H_n(X, A;\, M)$$

*jelöléseket. Az elsőt* kohomológia-gyűrűnek*, a másikat pedig* homológia-modulusnak *hívjuk. Ha $f$ egy térpárok közti leképezés, akkor*

$$H^*(f;\, R) = \bigoplus_n H^n(f;\, R) \qquad \text{és} \qquad H_*(f;\, M) = \bigoplus_n H_n(f;\, M)$$

*jelöli a hozzá tartozó homomorfizmusokat. Ha $A = \emptyset$, akkor kihagyható a jelölésből: $H^*(X;\, R)$, $H_*(X;\, M)$. Ha egyértelmű, hogy melyik gyűrűről illetve modulusról van szó, akkor az együttható is elhagyható: $H^*(X, A)$, $H^*(X)$, $H^*(f)$ illetve $H_*(X, A)$, $H_*(X)$, $H_*(f)$.*

A 27.6. Tétel azonosságaiból azonnal látható:

**27.10. Következmény.** *Rögzítsük az $R$ gyűrűt és az $M$ modulust! Minden kohomológia $R$ együtthatóval, minden homológia $M$ együtthatóval értendő. A tenzor szorzásokat $R$ felett végezzük.*

(a) *Minden $(X,A)$ tér-párra $H^*(X,A)$ a csésze szorzással egy fokszámozott, ferdén kommutatív $R$-algebra, $H_*(X,A)$ a sapka-szorzással egy fokszámozott $H^*(X,A)$-modulus.*

(b) *Minden $f:(X,A)\to(Y,B)$ pár-leképezésre $H^*(f)$ egy fokszámozott $R$-algebra homomorfizmus. Ez fokszámozott $H^*(Y,B)$-modulussá teszi az $(X,A)$ pár homológiáját is, és $H_*(f)$ egy $H^*(Y,B)$-modulus homomorfizmus.*

(c) *Legyenek $(X,A)$ és $(Y,B)$ tér-párok, tegyük fel, hogy $\{A\times Y, X\times B\}$ jól vág (21.2. Definíció). Tekintsük az $(X,A)\times(Y,B)$ szorzatpárt (11.1. Definíció). $R$-algebrák tenzor szorzata ismét $R$-algebra, a kohomológia külső szorzás (24.1. Konstrukció) egy fokszámozott algebra-homomorfizmus:*

$$H^*(X,A)\otimes H^*(Y,B)\xrightarrow{\times} H^*\Big((X,A)\times(Y,B)\Big)$$

*Ez fokszámozott $H^*(X,A)\otimes H^*(Y,B)$-modulussá teszi a szorzatpár homológiáját is, a homológia külső szorzás (24.2. Feladat) egy $H^*(X,A)\otimes H^*(Y,B)$-modulus homomorfizmus:*

$$H_*(X,A)\otimes H_*(Y,B)\xrightarrow{\times} H_*\Big((X,A)\times(Y,B)\Big)$$

(d) *Legyen most $S$ egy $R$-algebra, és $N$ egy $S$-modulus, és $\phi: M\otimes S\to N$ egy $S$-modulus homomorfizmus. Ez indukál egy $S$-algebra homomorfizmust:*

$$H^*(X,A;\,R)\otimes S\to H^*(X,A;\,R)$$

*és egy $H^*(X,A;\,R)\otimes S$-modulus homomorfizmust:*

$$H_*(X,A;\,M)\otimes S\to H_*(X,A;\,S)$$

## 28. A Leray-Hirsch tétel

Direkt szorzatok kohomológia-gyűrűjéről a Künneth tételek adnak nagyon sok információt (lásd a 25. és a 26. szakaszokat). A direkt szorzat egyik általánosítása a nyaláb fogalma (lásd a 12.2. Definíciót). Belátjuk, hogy bizonyos feltételek mellett a nyalábok kohomológiacsoportjai is könnyen számolhatók. A gyűrű-struktúráról viszont ez a módszer nem ad számot.

**28.1. Tétel** (Leray-Hirsch)**.** *Legyen $F\xrightarrow{i}E\xrightarrow{p}B$ egy nyaláb (12.2. Definíciót), és $R$ egy kommutatív gyűrű! A $p^*$ kohomológia-homomorfizmus segítségével a $H^*(E;R)$ kohomológia-gyűrű egy $H^*(B;R)$-modulusnak tekinthető (lásd a 27.10. Következmény (b) pontját). Tegyük fel, hogy*

(a) *$H^n(F;R)$ végesen generált szabad $R$-modulus minden $n$-re,* *(b) vannak olyan $c_j \in H^{k_j}(E;R)$ kohomológia osztályok, amelyeknek tetszőleges $F$ rostra való $i^*c_j$ megszorításai együttvéve a $H^*(F;R)$ szabad $R$-modulus bázisát alkotják.*

*Ekkor $H^*(E;R)$ egy szabad $H^*(B;R)$-modulus, a $c_j$ osztályok egy bázist alkotnak. Az izomorfizmust megadjuk a csésze-szorzat segítségével:*

$$\Phi : H^*(B;R) \otimes_R H^*(F;R) \xrightarrow{\cong} H^*(E;R)\ , \quad \Phi\big(b \otimes i^*c_j\big) = p^*b \cap c_j\ .$$

*Bizonyítás.* Most csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor $B$ egy véges-dimenziós CW-komplexus, az általános eset könnyen visszavezethető erre. Ha $\dim(B) = 0$, akkor $E$ felbomlik a rostjainak diszjunkt uniójára, tehát $H^*(E;R) \cong \prod_{b\in B} H^*(F;R)$, és a tétel igaz ebben az esetben.

Legyen most $\dim(B) = n > 0$, a tételt $n$ szerinti indukcióval bizonyítjuk. Válasszunk minden $n$-cella belsejében egy tömör golyót, legyen $X \subset B$ a golyók uniója, és legyen $Y \subset B$ az $X$ halmaz komplementumának lezártja. Legyen továbbá $\tilde{X} = p^{-1}(X)$ és $\tilde{Y} = p^{-1}(Y)$.

Látható, hogy $X \cap Y$ a golyók peremének uniója, azaz $(n-1)$-dimenziós, $Y$ pedig homotóp ekvivalens a $B$ komplexus $(n-1)$-vázával, tehát szintén $(n-1)$-dimenziós. Mivel a golyók pontrahúzhatók, $X$ homotóp ekvivalens egy 0-dimenziós CW-komplexussal. Az indukciós feltétel miatt tehát a tétel állítása igaz az $F \to \tilde{X} \to X$, az $F \to \tilde{Y} \to Y$ és az $F \to (\tilde{X} \cap \tilde{Y}) \to (X \cap Y)$ nyalábokra. Az alábbi diagrammon a bal oldali oszlop a $B = X \cup Y$ felbontáshoz, a jobboldali pedig az $E = \tilde{X} \cup \tilde{Y}$ felbontáshoz tartozó Mayer-Vietoris sorozatból származik:

$$\begin{tikzcd}
{} & {} \\
H^n(X\cap Y;R)\otimes H^m(F;R) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[u] & H^{n+m}(\tilde{X}\cap\tilde{Y};R) \arrow[u] \\
\Big(H^n(X;R)\oplus H^n(Y;R)\Big)\otimes H^m(F;R) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[u, "j^*"] & H^{n+m}(\tilde{X};R)\oplus H^{n+m}(\tilde{Y};R) \arrow[u, "j^*"] \\
H^n(B;R)\otimes H^m(F;R) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[u, "i^*"] & H^{n+m}(E;R) \arrow[u, "i^*"] \\
H^{n-1}(X\cap Y;R)\otimes H^m(F;R) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[u, "\delta^*"] & H^{n+m-1}(\tilde{X}\cap\tilde{Y};R) \arrow[u, "\delta^*"] \\
\Big(H^{n-1}(X;R)\oplus H^{n-1}(Y;R)\Big)\otimes H^m(F;R) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[u, "j^*"] & H^{n+m-1}(\tilde{X};R)\oplus H^{n+m-1}(\tilde{Y};R) \arrow[u, "j^*"] \\
{} \arrow[u] & {} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Az $i^*$, $j^*$, $\delta^*$ jelöléseket a 21.5. Tételből vettük át. A csésze-szorzat funktorialitása miatt az $i^*$-ot és a $j^*$-ot tartalmazó téglalapok kommutatívak. A $\delta^*$-ot tartalmazó téglalapok pedig a 8.6. Tétel miatt kommutatívak (lásd még a 27.6. Tételt is). Az indukciós feltevés miatt a diagrammon látható öt $\Phi$-vel jelölt homomorfizmus közül négy (a felső kettő és az alsó kettő) izomorfizmus. Az 5-lemma (lásd a 2.9. Lemmát) miatt tehát a középső $\Phi$ is izomorfizmus. $\square$

**28.2. Feladat.** *Mondd ki, és bizonyítsd be a Leray-Hirsch tétel tér-párokra vonatkozó változatát!*

*Ötlet.* Legyenek $(F, F_0)$ és $(B, B_0)$ tér-párok, és $p : (E, E_0) \to B$ egy $(F, F_0)$-nyaláb (lásd a 12.3. Definíciót). Érdemes három változatot is kimondani: az $(E, E_0)$, az $\big(E, p^{-1}(B_0)\big)$, illetve az $\big(E, E_0 \cup p^{-1}(B_0)\big)$ tér-párok kohomológiáira! $\square$

## 29. Poincaré dualitás

Ennek a fejezetnek a célja, hogy bebizonyítsuk a következőt:

**29.1. Tétel** (Poincaré dualitás)**.** *Legyen $M$ egy $n$-dimenziós összefüggő, irányítható, zárt topologikus sokaság. Ekkor $H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, és az $[M] \in H_n(M; \mathbb{Z})$ generátorral való sapka-szorzás izomorfizmus minden dimenzióban:*

$$D_{[M]} : H^k(M; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M; \mathbb{Z}) , \quad D_{[M]}(x) = x \cap [M]$$

Ebben a fejezetben csupa olyan állítással találkozunk, ami egy kis gömb környezetében könnyen kiszámolható. A fő bizonyítási módszerünk a Mayer-Vietoris sorozat (21.5. Tétel), ennek segítségével tudunk nagy kompakt halmazok környezetéről információt szerezni. A módszerünk a lelke mélyén véges, nem tudunk a kompakt halmazoktól elszabadulni. Ezért van szükségünk a kompakt tartójú kohomológia fogalmára.

Legyen $M$ egy topologikus sokaság, $K \subseteq M$ egy kompakt részhalmaz. A $\mathrm{Hom}\big(\Delta_\cdot(X), \mathbb{Z}\big)$ komplexusban keresünk olyan rész-komplexust, amelyik a $K$ halmaz környezetére „koncentrál”. Ha csak olyan koláncokat engedünk meg, amelyek minden $K$-ból kilógó szimlexen nullák, akkor nem kapunk rész-komplexust: egy ilyen kolánc kohatárában szerepelhet egy csomó olyan szimplex, amelynek csak az egyik oldala van $K$-ban. Ehelyett csak azt követeljük majd meg a koláncainktól, hogy a $K$-tól diszjunkt szimplexeken nullák legyenek.

**29.2. Definíció.** *Legyen $X$ egy tetszőleges topológikus tér. A* kompakt tartójú kohomológiáit *így definiáljuk:*

$$H_c^n(X;\,\mathbb{Z}) = \varinjlim_{\substack{K\subseteq X\\ kompact}} H^n(X, X\setminus K)$$

Az alábbi tétel megmutatja, hogy miért nem definiáljuk a „kompakt tartójú homológiákat": a homológia-osztályok már maguktól kompakt tartójúak.

**29.3. Tétel.** *Legyen $X$ tetszőleges topológikus tér, és $A\subseteq X$ egy altér. Az alábbi izomorfizmusra úgy szokás hivatkozni, hogy „a homológiának kompakt tartója van". A képletbeben $(K,B)$ a kompakt párokon fut (lásd a 11.3. Definíciót).*

$$H_n(X,A;\,\mathbb{Z}) \cong \varinjlim_{\substack{(K,B)\subseteq(X,A)\\ kompact}} H_n(K,B;\,\mathbb{Z})$$

*Ötlet:* A tétel azért igaz, mert a direkt limesz funktor egzakt. Az analóg állítás kohomológiákra nem igaz, mert az inverz limesz funktor nem egzakt. $\square$

**29.4. Konvenció.** *Legyen $M$ egy topológikus sokaság, $K\subseteq M$ egy kompakt részhalmaz. Legyen $U$ a $K$ olyan nyílt környezete, melynek a $K$ deformációs retraktuma. Ha az $M$ viselkedését akarjuk megérteni a $K$ környezetében, akkor elég az $\big(U,\,\partial U\big)$ párt (és benne $K$-t) tanulmányozni. De $\big(U,\,\partial U\big)$ homotóp ekvivalens $\big(M,\,M\setminus U\big)$-val, sőt $(M,\,M\setminus K)$-val is. Ezért ebben a fejezetben gyakran dolgozunk $\big(M,\,M\setminus K\big)$ alakú párokkal, érdemes egy jelölést is bevezetni:*

$$(M|K) = \big(M,\,M\setminus K\big) \qquad \Leftrightarrow \quad \text{„}M \text{ a } K \text{ körül"}$$

*Ha $x\in M$ egy pont, akkor pedig:*

$$(M|x) = \big(M,\,M\setminus\{x\}\big) \qquad \Leftrightarrow \quad \text{„}M \text{ az } x \text{ körül"}$$

*Ugyanezekt a jelöléseket használjuk majd homológia- és kohomológia-csoportokban is, mint például:*

$$H_n(M|K;\,\mathbb{Z}) = H_n\big(M,\,M\backslash K;\,\mathbb{Z}\big)\,, \quad H^n(M|x;\,\mathbb{Z}) = H^n\big(M,\,M\backslash\{x\};\,\mathbb{Z}\big)$$

Az alábbi lemma arról szól, hogy egy topológikus sokaságban bármely pont környezetében „lokálisan" érvényes a Poincaré dualitás. Később, a Poincaré dualitás bizonyításakor ezeket a lokális dualitásokat fogjuk majd a Mayer-Vietoris sorozat segítségével összeragasztani.

**29.5. Lemma.** *Legyen $M$ egy $n$-dimenziós topológikus sokaság, $x \in M$ egy pont és $B \subseteq M$ egy $x$-et tartalmazó tömör golyó. Lásd be, hogy*

$$H_i\big(M|x;\,\mathbb{Z}\big) \cong H_i\big(M|B;\,\mathbb{Z}\big) \cong H_i\big(B,\partial B;\,\mathbb{Z}\big) \cong \begin{cases} 0 & ha\ i \neq n \\ \mathbb{Z} & ha\ i = n \end{cases}$$

*és*

$$H^i\big(M|x;\,\mathbb{Z}\big) \cong H^i\big(M|B;\,\mathbb{Z}\big) \cong H_i\big(B,\partial B;\,\mathbb{Z}\big) \cong \begin{cases} 0 & ha\ i \neq n \\ \mathbb{Z} & ha\ i = n \end{cases}$$

*Továbbá, az alábbi diagramon a sapka szorzás éppen az egész számok szorzása (miután az egyes csoportokat $\mathbb{Z}$-vel azonosítottuk)!*

$$H^n(B,\partial B;\,\mathbb{Z}) \otimes H_n(B,\partial B;\,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cap} H_0(B;\,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

*Bizonyítás.* A három szóban forgó tér-pár szinguláris lánc-komplexusa lánc-homotóp a kivágási tétel (21.1) miatt:

$$\Delta_\cdot(M|x) \cong \Delta_\cdot(M|B) \cong \Delta_\cdot(B,\partial B)$$

Ezért a keresett homológia- illetve kohomológia-csoportok izomorfak egymással. Legyen most $n \geq 2$, tekintsük $B$-ben a következő CW-felbontást:

- $P_0 \in \partial B$ egy 0-cella,
- $\eta_{n-1} = \partial B \setminus \{P\}$ egy $(n-1)$-cella, és
- $\sigma_n = \mathrm{int}(B)$ egy $n$-dimenziós cella.

(Az $n < 2$ eset is nagyon hasonló, az olvasóra hagyjuk). Világos, hogy $B$ CW-lánc-komplexusa $n$, $n-1$ és 0 dimenzióban él:

$$\Delta_\cdot^{CW}(B) = \Big\{0 \to \sigma_n \cdot \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \eta_{n-1} \cdot \mathbb{Z} \to 0 \to \cdots \to 0 \to P_0 \cdot \mathbb{Z} \to 0\Big\}$$

és a $(B,\partial B)$ pár CW-lánc-komplexusa csak $n$-dimenziókban különbözik nullától:

$$\Delta_\cdot^{CW}(B,\partial B) = \Big\{0 \to \sigma_n \cdot \mathbb{Z} \to 0\Big\}$$

A két komplexus tenzor szorzata éppen $\Delta_\cdot\big(B \times B,\, B \times \partial B\big)$, és íme a $(B,\partial B) \hookrightarrow \big(B \times B,\, B \times \partial B\big)$ átlós beágyazáshoz tartozó lánc-homomorfizmus:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \sigma_n \otimes \sigma_n \cdot \mathbb{Z} \arrow[r, "\cong"] & \eta_{n-1} \otimes \sigma_n \cdot \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r, dotted, no head] & 0 \arrow[r] & P_0 \otimes \sigma_n \cdot \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r, dotted, no head] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & \sigma_n \cdot \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Ebből könnyen kiolvasható, hogy a $[\sigma_n] \in H^n(B,\partial B;\,\mathbb{Z})$ kohomológia generátor és a $[\sigma_n] \in H_n(B,\partial B;\,\mathbb{Z})$ homológia generátor sapka szorzata éppen a $[P_0] \in H_0(B;\,\mathbb{Z})$ homológia generátor. $\square$

A Poincaré dualitásban kulcs-szerepe van az irányításnak. Klasszikusan az érintő nyaláb segítségével szokás definiálni. Topologikus sokaságokra ez az út nem járható, de van egy jó helyettesítő eszköz: az irányítás nyaláb. A definíció előtt szükség van néhány alapfogalomra.

Legyen $M$ egy $n$-dimenziós topologikus sokaság, $x \in M$ egy pont. Találhatunk egy $x \in U_x \subseteq M$ környezetet, amelyik homeomorf az $n$-dimenziós golyóval. Ha ezeket az $U_x$ környezeteket sikerülne összebarkácsolni egy golyó-nyalábbá, akkor azt használhatnánk az $M$ érintőnyalábjának. Ezt sajnos nem tudjuk megtenni, de legalább imitáljuk: $U_x$ helyett megelégszünk az $(U_x, \partial U_x)$ párral, ami homotóp ekvivalens az $(M|x)$ párral (29.4. Konvenció). Ha $M$ összefüggő, akkor ezek összeállnak egy tér-pár nyalábbá — amit majd ugyanúgy használunk, mintha ő lenne az éritő-nyaláb.

**29.6. Lemma.** *Legyen $M$ egy összefüggő topológikus sokaság, $D \subseteq M \times M$ az átló. Ekkor $M$* homogén *a következő értelemben: Bármely két $x, y \in M$ pontra $M \setminus \{x\}$ homeomorf $M \setminus \{y\}$-nal. Az alábbi diagramon az $M \times M$ direkt szorzat vetítése látható a második tényezőre:*

$$\mathcal{T} : \big(M \times M \,\big|\, D\big) \longrightarrow M$$

*Ez egy tér-pár nyaláb (12.3. Definíció), a rostja minden $x \in M$ pontban az $(M|x)$ pár.*

**29.7. Megjegyzés.** *Legyen $M$ egy $n$-dimenziós topológikus sokaság. Egy $x \in M$ pontban kétféleképpen irányíthatjuk: az irányítást reprezentálhatjuk ppéldául a $H_n\big(M|x; \mathbb{Z}\big)$ csoport két generátorával (azaz kétféle képpen azonosíthatjuk $Z$-vel). Ez analóg azzal, hogy differenciálható sokaságokon az irányítást megadhatjuk térfogati formával. A differenciálható esetben tehát az $\bigwedge^n T^*M$ a kulcs az irányításhoz. Ennek az analógja az alábbi irányítás nyaláb.*

**29.8. Definíció** (irányítás nyaláb)**.** *Legyen $M$ egy $n$-dimenziós topológikus sokaság. A 29.6. Lemma megad minden $M_i \subseteq M$ összefüggő komponensen egy-egy $\mathcal{T}_i$ tér-pár nyalábot. A $\mathcal{H}(\mathcal{T}_i; \mathbb{Z})$ rostonkénti homológia (12.10. Konstrukció) egy $\mathbb{Z}$-nyaláb az $M_i$ komponensen, ezek együttvéve egy $\mathbb{Z}$-nyalábot alkotnak az egész $M$-en. Ezt nevezzük az $M$* irányítás nyalábjának.

**29.9. Definíció.** *Legyen $M$ egy $n$-dimenziós topológikus sokaság, $\mathcal{I}$ az irányítás nyalábja, $K \subseteq M$ egy kompakt részhalmaz. $H_n(M|K)$ elemeit megszorítjuk $H_n(M|x)$-re, ahol $x$ végigfut $K$ pontjain. Így minden $H_n(M|K)$-beli homológia-osztályhoz egy $K \to \mathcal{I}$ folytonos szelést rendeltünk. Ez a hozzárendelés egy természetes homomorfizmus:*

$$\iota_K : H_n\big(M|K; \mathbb{Z}\big) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{I}, K)$$

**29.10. Lemma.** *Legyen $M$ egy $n$-dimenziós topológikus sokaság, $\mathcal{I}$ az irányítás nyalábja. Ekkor minden $A \subseteq M$ kompakt részhalmazra $H_i(M|A, \mathbb{Z}) = 0$ ha $i > n$, és a 29.9. Definícióbeli $\iota_A$ izomorfizmus.*

*Bizonyítás.* Ebben a bizonyításban egész együtthatós homológiát használunk, elhagyjuk a $\mathbb{Z}$-t a jelölésből. Először belátjuk a következő redukciós lépést: ha az $A$, $B$, $A \cap B$ halmazok teljesítik a lemma feltételeit, akkor $A \cup B$ is teljesíti azokat. Tegyük hát fel, hogy $A$ és $B$ ilyen kompakt halmazok, és írjuk fel rájuk vonatkozó Mayer-Vietoris sorozat (21.5. Tétel) egy darabkáját:

$$H_{j+1}(M|A \cap B) \to H_j(M|A \cup B) \to H_j(M|A) \oplus H_j(M|B) \to H_j(M|A \cap B)$$

Ha $j > n$, akkor $H_j(A \cup B)$ mindkét oldalán nulla áll, tehát ő maga is nulla. Ha pedig $j = n$, ezt látjuk:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_n(M|A \cup B) \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{A\cup B}"] & H_n(M|A) \oplus H_n(M|B) \arrow[r] \arrow[d, "\iota_A \oplus \iota_B"] & H_n(M|A \cap B) \arrow[d, "\iota_{A\cap B}"] \\
0 \arrow[r] & \Gamma(A \cup B, \mathcal{I}) \arrow[r] & \Gamma(A, \mathcal{I}) \oplus \Gamma(B, \mathcal{I}) \arrow[r] & \Gamma(A \cap B, \mathcal{I})
\end{tikzcd}$$

ahol a baloldalt a fölső sor szélén $H_{n+1}(M|A \cap B) = 0$ szerepel. Az alsó sor egzaktsága éppen azt fejezi ki, hogy egy $A \to \mathcal{I}$ és egy $B \to \mathcal{I}$ szelés pontosan akkor áll össze egy $A \cup B \to \mathcal{I}$ szeléssé, ha az $A \cap B$ felett a különbségük nulla. A két jobboldali függőleges nyíl a feltétel miatt izomorfizmus, tehát az 5-lemma (2.9. Lemma) miatt $\iota_{A\cup B}$ is izomorfizmus. Ezzel igazoltuk a redukciós lépést.

Nevezzük tömör golyónak az olyan $A \subset M$ részhalmazokat, amelyek tömör golyók egy $\mathbb{R}^n$-nel homeomorf nyílt halmazban. Ha $A$ egy tömör golyó, akkor pontrahúzható, ezért $\mathcal{I}$ triviális nyaláb $A$ fölött, és így $\Gamma(A, \mathcal{I}) \cong \mathbb{Z}$. Másrészt az $(M|A)$ pár az $(M|x)$ pár deformációs retraktuma, ahol $x \in M$ tetszőleges pont, ezért a $H_n(M|A) \to H_n(M|x)$ megszorítás izomorfizmus minden $x \in A$ pontban, és így $\iota_A$ izomorfizmus. A redukciós lépést többször egymás után alkalmazva láthatjuk, hogy a a lemma teljesül minden olyan kompakt halmazra, amelyik véges sok tömör golyó uniója.

Legyen most $A$ tetszőleges kompakt halmaz, tekintsünk egy olyan $z \in \Delta_i(M)$ láncot, melyre $\partial z \in \Delta_{i-1}(M \setminus A)$, azaz $\partial z$ elkerüli az $A$ halmazt. Legyen $K \subset M$ egy olyan halmaz, ami tömör gömbök uniója, lefedi az $A$ halmazt, de diszjunkt $\partial z$-től. Jelölje $[z]_A \in H_i(M|A)$ illetve $[z]_K \in H_i(M|K)$ a $z$ által reprezentált homológia osztályt! Világos, hogy a $H_i(M|K) \to H_i(M|A)$ megszorítás a $[z]_K$ osztályt a $[z]_A$ osztályba viszi. tehát $[z]_K = 0$ esetén $[z]_A$ is nulla.

Alkalmazzuk ezt az észrevételt az $i > n$ esetre. Ekkor $H_i(M|K) = 0$, tehát $[z]_K = 0$, és ezért $[z]_A = 0$. Ez minden $z$ relatív ciklusra igaz, tehát $H_i(M|A) = 0$.

Legyen most $i = n$, és tegyük fel, hogy $[z]_A$ képe nulla $\Gamma(A, \mathcal{I})$-ben. Ekkor $[z]_K$ képe is nulla $\Gamma(K, \mathcal{I})$-ben. De $H_n(M|K) \to \Gamma(K, \mathcal{I})$ injektív, ezért $[z]_K = 0$, és így $[c]_A = 0$. Ez bizonyítja, hogy $H_n(M|A) \to \Gamma(A, \mathcal{I})$ is injektív.

Végezetül tekintsünk egy $\sigma_A \in \Gamma(A, \mathcal{I})$ szelést. Ez folytonosan kiterjeszthető az $A$ halmaz egy nyílt környezetére. Ezért van olyan $K$ halmaz és olyan $\sigma_K \in \Gamma(K, \mathcal{I})$ szelés, melyre $K$ véges sok tömör gömb uniója, $A \subset K$, és $\sigma_K$ megszorítása $A$-ra éppen $\sigma_A$. Mivel $K$-ra igaz a lemma, azért van olyan $c_k \in H_n(M|K)$ osztály, melynek képe $\Gamma(K, \mathcal{I})$-ben éppen $\sigma_K$. Legyen $c_A \in H_n(M|A)$ a $c_K$ osztály megszorítása. Világos, hogy $C_A$ képe $\Gamma(A, \mathcal{I})$-ben éppen $\sigma_A$. Ezért $H_n(M|A) \to \Gamma(A, \mathcal{I})$ szürjektív. $\square$

**29.11. Definíció** (Fundamentális osztály)**.** *Legyen $M$ egy $n$-dimenziós topológikus sokaság, $\mathcal{I}$ az irányítás nyalábja. Az* $M$ irányítása *egy olyam $M \to \mathcal{I}$ folytonos szelés, amelyik minden $x \in M$ ponthoz az $\mathcal{I}_x \cong \mathbb{Z}$ rost egyik generátorát rendeli.* $M$ irányítható*, ha van irányítása. A 29.10. Lemma miatt egy irányítás megadható egy* fundamentális osztállyal*, azaz homológia-osztályok egy*

$$[M] = \big\{\sigma_K \in H_n(M|K; \mathbb{Z})\big\}$$

*kompatibilis rendszerével, ahol $K$ végigfut $M$ kompakt részhalmazain. Másképpen írva:*

$$[M] = \{\sigma_K\} \in \lim_{\substack{K \subseteq M \\ \text{kompakt}}} H_n(M|K; \mathbb{Z})$$

*Egy ilyen $\{\sigma_K\}$ rendszert az $M$* fundamentális oszályanak *nevezünk, és $[M]$-mel jelöljük. Ha $M$ kompakt, akkor egyszerűen*

$$[M] \in H_n(M; \mathbb{Z})$$

**29.12. Tétel** (Poincaré dualitás nyílt sokaságokra)**.** *Legyen $M$ egy irányítható sokaság, $[M]$ egy fundamentális osztálya. Az $[M]$-mel való sapka-szorzás izomorfizmus minden dimenzióban:*

$$D_{[M]} : H^k_c(M; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M; \mathbb{Z}) \ , \quad D_{[M]}(x) = x \cap [M]$$

*Bizonyítás.* **Hibás bizonyítás! Javítani kell!**

Ebben a bizonyításban egész együtthatós homológiát és kohomológiát használunk, elhagyjuk a $\mathbb{Z}$-t a jelölésből. Minden $A \subseteq M$ kompakt halmazra jelölje $\sigma_A \in H_n(M|A)$ az $[M]$ képét (29.11. Definíció). Vegyük észre, hogy a Kivágási Tétel (21.1. Tétel) miatt tetszőleges $A \subseteq U$

nyílt környezet esetén $H_n(M|A) \cong H_n(U,A)$, tekinthetünk $\sigma_A$-ra úgy, mint a $H_n(U|A)$ elemére. Most keresünk olyan $U \subseteq M$ nyílt halmazokat, melyeknek minden kompakt részhalmaza lefedhető olyan $A \subseteq M$ kompakt halmazzal, melyre a $\sigma_A$-val való sapka-szorzás izomorfizmus minden dimenzióban:

$$D_{U,A} : H^k(U|A) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(U) \ , \quad D_{U,A}(x) = x \cap \sigma_A \tag{9}$$

Ha egy $U \subseteq M$ nyílt halmaz homeomorf $\mathbb{R}^n$-nel, akkor minden kompakt részhalmaza lefedhető egy $A \subseteq U$ konvex kompakt részhalmazzal, és (9) következik a 29.5. Lemmából. Minden kompakt részhalmaz lefedhető véges sok $\mathbb{R}^n$-nel homeomorf nyílt halmazzal, tehát elegendő belátnunk a következő redukciót:

**Hibás bizonyítás! Javítani kell!**

ha (9) teljesül az $A$, $B$ és $A \cap B$ halmazokra, akkor teljesül $A \cup B$-re is. Az alábbi diagram felső sorában az $M|A \cup B = (M|A) \cup (M|B)$ fedéshez tartozó Mayer-Vietoris sorozat látható (legalábbis annyi, amennyi odafért belőle), az alsó sorba pedig az $M = M \cup M$ fedéshez tartozó Mayer-Vietoris sorozatot írtuk. $\delta^*$ és $\partial_*$ jelölik a határ-homomorfizmusokat, a függőleges nyilak pedig a (9)-ban szereplő sapka szorzások:

$$\begin{tikzcd}
H^{k-1}(M|A \cap B) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "D_{A\cap B}"] & H^k(M|A \cup B) \arrow[r] \arrow[d, "D_{A\cup B}"] & H^k(M|A) \oplus H_n(M|B) \arrow[r] \arrow[d, "D_A \oplus (-D_B)"] & H^k(M|A \cap B) \arrow[d, "D_{A\cap B}"] \\
H_{n-k+1}(M) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{n-k}(M) \arrow[r] & H_{n-k}(M) \oplus H_n(M) \arrow[r] & H_{n-k}(M)
\end{tikzcd}$$

A 27.7. Tétel miatt az ábrán látható diagramm előjel erejéig kommutatív. Ha jobbra-balra folytatjuk a diagramot, a két Mayer-Vietoris sorozat mentén végig, minden $k$-ra ugyanilyen négyzetek ismétlődnek. A függőleges nyilak közül a $D_{A\cap B}$-vel és a $D_A \oplus D_B$-vel jelöltek izomorfizmusok. Az öt-lemma (2.9. Lemma) miatt tehát $D_{A\cup B}$ is izomorfizmus. $\square$

**29.13. Tétel** (Poincaré dualitás peremes sokaságokra)**.** *Legyen $M$ egy $n$-dimenziós irányítható kompakt peremes sokaság, $[M] \in H_n(M, \partial M; \mathbb{Z})$ a fundamentális osztálya. Bontsuk fel a peremét két zárt részhalmazra: $\partial M = A \cup B$, úgy, hogy $A$ és $B$ maguk is $(n-1)$-dimenziós peremes sokaságok, közös peremmel. Az $[M]$-mel való sapka-szorzás izomorfizmus minden dimenzióban:*

$$D_{[M]} : H^k(M, A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M, B; \mathbb{Z}) \ , \quad D_{[M]}(x) = x \cap [M]$$

**29.14. Tétel.** *Legyen $X$ egy irányított differenciálható sokaság, $M \looparrowright X$ és $N \looparrowright X$ két immertált irányított részsokaság, amelyek transzverzálisan metszik egymást. Jelölje $[M], [N], [M \cap N] \in H_*(X, \mathbb{Z})$ a* *fundamentális osztályok képét,* $[M]^*, [N]^*, [M \cap N]^* \in H^*(X, \mathbb{Z})$ *pedig a Poincaré duálisaikat. Ekkor*

$$[M]^* \cap [N] = [M \cap N] \qquad \text{és} \qquad [M]^* \cup [N]^* = [M \cap N]^*$$

## 30. Példák

**30.1. Feladat.** *Számítsd ki az* $S^n$ *és a* $B^n$ *terek* $\mathbb{Z}$*-együtthatós homológia- és kohomológia-csoportjait!*

**30.2. Feladat.** *Számítsd ki a* $g$ *nemű felület egészegyütthatós homológia- és kohomológia-csoportjait!*

*Ötlet:* Keress CW-felbontást, amelyben egy csúcs, $2g$ él és egy 2-cella van! Az ehhez tartozó lánc-komplexus:

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z}^{2g} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \leftarrow 0$$

□

**30.3. Feladat.** *Számítsd ki a nem irányítható felületek* $\mathbb{Z}_2$*-együtthatós homológia- és kohomológia-csoportjait!*

**30.4. Feladat.** *Számítsd ki a nem irányítható felületek* $\mathbb{Z}$*-együtthatós homológia- és kohomológia-csoportjait!*

**30.5. Feladat.** *Számítsd ki az* $n$*-dimenziós tórusz* $\mathbb{Z}$*-együtthatós homológia- és kohomológia-csoportjait!*

**30.6. Feladat.** *Legyen* $F$ *egy* $g$ *nemű felület! Számítsd ki az* $S^1 \times F$ *sokaság* $\mathbb{Z}$*-együtthatós homológia- és kohomológia-csoportjait!*

**30.7. Feladat.** *Legyenek* $F$ *és* $G$ *irányítható felületek! Számítsd ki az* $F \times G$ *sokaság* $\mathbb{Z}$*-együtthatós homológia- és kohomológia-csoportjait!*

**30.8. Feladat.** *Legyen* $F$ *egy* $g$ *nemű felület,* $\phi : F \to F$ *egy diffeomorfizmus! Tekintsük az* $F \times [0, 1]$ *hengert! Ragasszuk össze az alaplapját,* $F \times \{0\}$*-t, a fedőlapjával,* $F \times \{1\}$*-gyel a* $\phi$ *leképezés mentén (azaz úgy, hogy minden* $f \in F$*-re az* $f \times 0$ *pontot a* $\phi(f) \times 1$ *ponttal azonosítjuk)! Számítsd ki az így kapott sokaság* $\mathbb{Z}$*-együtthatós homológia és kohomológia-csoportjait!*

*Eredmény:* A lánc-komplexus ekvivalens a következővel:

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{0} H_1(F; \mathbb{Z}) \xleftarrow{\phi_* - \mathrm{Id}} H_1(F; \mathbb{Z}) \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \leftarrow 0$$

ahol $H_1(F; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$, $\phi_*$ jelöli a $\phi$ által indukált $H_1(F; \mathbb{Z}) \to H_1(F; \mathbb{Z})$ leképezést, Id pedig az identitást. □

**30.9. Feladat.** *Bontsd fel az $S^3$ gömböt két tömör tórusz uniójára! Írd fel az erre vonatkozó Mayer-Vietoris sorozatot! Számold ki ebből az $S^3$ homológiáit!*

**30.10. Feladat.** *Bontsd fel az $S^1 \times S^2$ sokaságot két tömör tórusz uniójára! Írd fel az erre vonatkozó Mayer-Vietoris sorozatot! Számold ki ebből az $S^1 \times S^2$ homológiáit!*

**30.11. Feladat.** *Legyen $A$ és $B$ két tömör tórusz, és $\phi : \partial A \to \partial B$ egy diffeomorfizmus! Ragasszuk össze a két tömör tórusz peremét a $\phi$ leképezés mentén, így egy háromdimenziós irányítható sokaságot kapunk! Mutasd meg, hogy a ragasztás megadható egy $\phi_* : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ izomorfizmus segítségével! Hányféle ragasztás lehetséges? Írd fel a ragasztásra vonatkozó Mayer-Vietoris sorozatot! Mennyire határozza meg a kapott sokaság homológiáit!*

**30.12. Feladat.** *Bontsd fel az $S^3$ gömböt két tömör $g$-nemű test uniójára! Írd fel az erre vonatkozó Mayer-Vietoris sorozatot! Számold ki ebből az $S^3$ homológiáit!*

**30.13. Feladat** (Heegaard felbontás). *Legyen $F \subset \mathbb{R}^3$ egy beágyazott $g$ nemű felület. Az $F$ két részre vágja a teret, jelöljük $A$-val a korlátos részt. Ragasszuk össze az $A$ két példányát a peremeűk mentén egy $\phi : F \to F$ egy diffeomorfizmussal, így egy háromdimenziós sokaságot kapunk. Jelölje $\phi_* : H_1(F;\mathbb{Z}) \to H_1(F;\mathbb{Z})$ az indukált homomorfizmust! Írd fel a ragasztásra vonatkozó Mayer-Vietoris sorozatot! Mennyire határozza meg a sokaság homológia csoportjait?*

**30.14. Megjegyzés.** *Minden irányítható háromdimenziós sokaság megkapható a 30.13. Feladatban leírt módon, azaz felbontható két tömör $g$-nemű test uniójára. Az ilyen felbontást Heegaard felbontásnak hívják.*

**30.15. Feladat.** *Legyen $M$ egy háromdimenziós sokaság, $F$ egy $g$ nemű felület, és $f : M \to F$ egy olyan sima leképezés, amelynek sehol sem nulla a deriváltja, és minden $F$-beli pont ősképe egy körvonal. (Ezt hívjuk* kör-nyaláb*nak.) Bontsd fel $F$-et $2g$ körvonal és egy körlap (pontosabban: egy $4g$ oldalú sokszög belseje) uniójára! Ez indukál az $M$ sokaságon is egy felbontást. Írd fel az ehhez tartozó Mayer-Vietoris sorozatot! Mennyire határozza meg a sokaság homológia csoportjait? Milyen homológia-homomorfizmus fogja elkódolni a ragasztási információt?*

**30.16. Feladat.** *Tekintsük egy dodekaéder két szemközti oldalát: ezek párhuzamos síkban, $\frac{1}{10}$ fordulattal elfordított állású szabályos ötszögek. Azonosítsuk a két ötszög pontjait úgy, hogy minden pontot a szemközti* *oldalon neki megfelelő, $\frac{1}{10}$ fordulattal elforgatott ponttal azonosítunk! Ismételjük meg ezt az azonosítást mind a hat szemköztes oldalpárra. Az így kapott 3-dimenziós sokaság a Poincaré homológia gömb. Számítsd ki a $\mathbb{Z}$-együtthatós homológia- és kohomológia-csoportjait!*

**30.17. Feladat.** *Legyen $G \leq SO(3)$ a szabályos dodekaéder forgásszimmetriáinak csoportja! Lásd be, hogy az $SO(3)/G$ sokaság diffeomorf a 30.16. Feladatban megkonstruált Poincaré homológia gömbbel. Számítsd ki a homotópia csoportjait!*

*Ötlet:* A Poincaré homológia gömb univerzális fedőtere $S^3$. □

**30.18. Feladat.** *Módosítsd a 30.16. Feladatbeli konstrukciót úgy, hogy azonosításkor $\frac{1}{10}$ fordulat helyett $\frac{3}{10}$ fordulatot használsz! Az így kapott 3-sokaságot Seifert-Weber sokaságnak hívják. Számítsd ki a $\mathbb{Z}$-együtthatós homológia- és kohomológia-csoportjait!*

**30.19. Feladat.** *A Seifert-Weber sokaság univerzális fedőtere a 3-dimenziós Bolyai-geometria (lásd itt). Számítsd ki a Seifert-Weber sokaság homotópia csoportjait!*

**30.20. Feladat.** *Módosítsd a 30.16. Feladatbeli konstrukciót úgy, hogy azonosításkor $\frac{1}{10}$ fordulat helyett $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ fordulatot használsz! Lásd be, hogy az így kapott sokaság éppen $\mathbb{RP}^3$. Ez a konstrukció megadja a projektív tér egy CW-felbontását (nem a szokásosat). Számítsd ki a felbontáshoz tartozó $\mathbb{Z}$-együtthatós CW-homológia- és CW-kohomológia-csoportokat! Számítsd ki a felbontáshoz tartozó $\mathbb{Z}_2$-együtthatós CW-homológia- és CW-kohomológia-csoportokat is!*

**30.21. Feladat.** *Legyenek $p, q$ relatív prím pozitív egészek! Osszuk a háromdimenziós golyó peremét két félgömbre: $\acute{E}$ jelöli az északi (zárt) félgömböt, $D$ pedig a délit. Tekintsük azt a $\phi : \acute{E} \to D$ leképezést, amelyik először elforgatja az $\acute{E}$ félgömböt a tengelye körül $\frac{2\pi q}{p}$ szöggel, majd tükrözi a határoló kör síkjára. Azonosítsunk minden $x \in \acute{E}$ pontot a neki megfelelő $\phi(x) \in D$ ponttal! Az így kapott sokaság az $L(p, q)$ Lencse tér. Számítsd ki a $\mathbb{Z}$-együtthatós homológia- és kohomológia-csoportjait!*

**30.22. Feladat.** *Legyen $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ az egységgömb a komplex síkon. Jelölje $x, y$ a koordinátákat $\mathbb{C}^2$-en. Tekintsük a*

$$\phi : S^3 \to S^3 \ , \quad \phi(x, y) = \left(e^{\frac{1}{p}2\pi} x, e^{\frac{q}{p}2\pi} y\right) .$$

*elforgatást! Lásd be, hogy ez egy $p$-rendű elforgatás, tehát egy $\mathbb{Z}_p$-hatást generál a gömbön! Lásd be, hogy $S^3/\mathbb{Z}_p$ diffeomorf az $L(p, q)$ lencse térrel (lásd a 30.21. Feladatot)! Számítsd ki a Lencse-tér homotópia csoportjait!*

*Ötlet:* A konstrukcióból következik, hogy a Lencse tér univerzális fedőtere a gömb. □

**30.23. Feladat.** *Mutasd meg, hogy $S^3$ és $S^1 \times S^2$ is szerepel a lencse terek között!*

**30.24. Feladat.** *Két tömör tórusz peremét azonosítjuk egy homeomorfizmussal. Mutasd meg, hogy így egy lencse teret kapunk! Mutasd meg, hogy minden lencse tér megkapható ezzel a konstrukcióval!*

**30.25. Feladat.** *A 30.24. Feladatban az $L(p,q)$ lencs teret felbontottuk két tömör tórusz uniójára. Írd fel a felbontáshoz tartozó Mayer-Vietoris sorozatokat! Számítsd ki ezek segítségével a lencse terek $\mathbb{Z}$-együtthatós homológia- és kohomológia-csoportjait!*

**30.26. Feladat.** *Szférikus 3-sokaságnak hívjuk azokat az irányítható sokaságokat, amelyek univerzális fedőtere $S^3$. Tehát a szférikus sokaságok $S^3/G$ alakban írhatók, ahol $G \leq SO(4)$ egy olyan véges részcsoport, amelyik fixpont-mentesen hat az $S^3$ egység-gömbön! A wikipedia-n megtalálod az összes szóba jövő részcsoportot. Számítsd ki a szférikus sokaságok $\mathbb{Z}$-együtthatós homológia- és kohomológia-csoportjait!.*

## 31. Projektív tér

**31.1. Példa** (komplex projektív tér)**.** *Az $n$-dimenziós komplex projekív tér, $\mathbb{CP}^n$, ideális hipersíkja $\mathbb{CP}^{n-1}$, a „véges része” pedig $\mathbb{C}^n$. Ez indukcióval megad egy olyan CW-felbontást, melyben összesen $n+1$ cella van: 0-tól $2n$-ig minden páros dimenzióban egy-egy. Ezért a $\mathbb{CP}^n$ CW-lánc-komplexusának $-1$ fokszámtól $2n+1$ fokszámig terjedő része:*

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow \cdots \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow 0$$

*Minden páratlan fokszámon 0 áll. A homológia-csoportok:*

$$H_i(\mathbb{CP}^n;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{ha } i \text{ páros és } 0 \leq i \leq 2n, \\ 0 & \text{ha } i \text{ páratlan.} \end{cases}$$

*A kohomológia-csoportok:*

$$H^i(\mathbb{CP}^n;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{ha } i \text{ páros és } 0 \leq i \leq 2n, \\ 0 & \text{ha } i \text{ páratlan.} \end{cases}$$

*A kohomológia-gyűrű egy „levágott polinom-gyűrű”, másodfokú generátorral. A generátort* első Chern-osztálynak *hívjuk, jele $c_1$.*

$$H^*(\mathbb{CP}^n;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1]\Big/\left(c_1^{n+1}\right), \quad \deg(c_1) = 2.$$

*Láttuk, hogy $\mathbb{CP}^{n-1}$ egy hipersík $\mathbb{CP}^n$-ben. Így a véges-dimenziós projektív tereket egymásba ágyaztuk, uniójuk a* végtelen projektív tér, $\mathbb{CP}^\infty$*:*

$$\mathbb{CP}^0 \subset \mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^2 \subset \mathbb{CP}^3 \subset \dots\,; \quad \mathbb{CP}^\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{CP}^n\,.$$

$$H^*(\mathbb{CP}^\infty;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1]\,, \quad \deg(c_1) = 2.$$

**31.2. Feladat.** *Lásd be, hogy a komplex projektív tér 31.1. Példaban megadott felbontása valóban CW felbontás, és ezért a kohomológia csoportjai valóban az ott megadottak. (A gyűrű-struktúrával majd később foglalkozunk.)*

**31.3. Feladat.** *Add meg a $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^m$, illetve a $\mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty$ terek CW-felbontását! Számítsd ki a $\mathbb{Z}$-együtthatós homológia- és kohomológia-csoportjait!*

*Végeredmény:* Az alábbi izomorfizmusok valójában gyűrű-izomorfizmusok, de most csak fokszámozott csoport-izomorfizmust kell bizonyítani:

$$H^*\big(\mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty\,;\mathbb{Z}\big) \cong \mathbb{Z}[x,y]\,; \quad \deg(x) = \deg(y) = 2$$

$$H^*\big(\mathbb{CP}^m \times \mathbb{CP}^n\,;\mathbb{Z}\big) \cong \mathbb{Z}[x,y]\big/(x^{m+1}, y^{n+1})\,; \quad \deg(x) = \deg(y) = 2$$

A homológia-csoportok vizsgálatát az olvasóra hagyjuk. □

*Ötlet.* Legyenek $\{e_i\}$ illetve $\{f_j\}$ a cellák a két $\mathbb{CP}^\infty$ CW-felbintásában, $\dim(e_i) = \dim(f_i) = 2i$. A szorzat-tér $d$-dimenziós cellái:

$$\big\{e_i \times f_j \;\big|\; i + j = d\big\}$$

és az ezekhez tartozó lánc-komplexusban minnden differenciál nulla. Ezek után az $x^p y^q$ polinomot feleltessük meg az alábbi koláncnak:

$$x^p y^q\Big([e^i \times f^j]\Big) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = p \text{ és } j = q, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

□

**31.4. Feladat.** *Számítsd ki a $\delta : \mathbb{CP}^\infty \hookrightarrow \mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty$ átlós beágyazás által indukált homomorfizmusokat a terek homológia- és kohomológia-csoportjai között!*

*Végeredmény:* Átvesszük a 31.1. Példából a $c_j$ jelölést, a 31.3. Feladattal kapcsolatban bevezetett $[e_i \times f_j]$ és $x^i y^j$ jelöléseket.

$$\delta_*[c_k] = \sum_{i+j=k} [e_i \times f_j] \qquad \text{és} \qquad \delta^* x^i y^j = \begin{cases} c_i & \text{ha } i = j, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

□

*Ötlet.* Legyen $(x_0, x_1, \dots x_k)$ egy homogén koordináta-rendszer a $\mathbb{CP}^k$ téren! Jelölje $\mathbb{A}_i$ illetve $\mathbb{B}_i$ azt a két lineáris alteret $\mathbb{CP}^k$-ben, amelyet az $x_{i+1} = x_{i+2} = \cdots = x_k = 0$, illetve az $x_0 = x_1 = \cdots = x_i = 0$ egyenlet-rendszer határoz meg! Világos, hogy $\dim(\mathbb{A}_i) = i$ és $\dim(\mathbb{B}_i) = k - i - 1$, a két altér diszjunkt, és együtt kifeszítik az egyész $\mathbb{CP}^k$ teret. Legyen $\mathcal{L}_i$ azon komplex egyenesek halmaza, amelyek az $\mathbb{A}_i$ és a $\mathbb{B}_i$ alterek egy-egy pontját kötik össze! Lásd be, hogy az $\mathbb{A}_i \cup \mathbb{B}_i$ halmaz komplementumának minden pontján keresztül pontosan egy $\mathcal{L}_i$-beli egyenes halad át.

Keress egy olyan $\phi_i : \mathbb{CP}^k \to \mathbb{CP}^k$ transzformációt, amelyik az $\mathbb{A}_i$ és a $\mathbb{B}_i$ altereket minden pontját helyben hagyja, az $\mathcal{L}_i$-beli egyeneseket saját magukba képezi, az $\mathbb{A}_i$ altér egy $U_i$ nyílt környezetét homeomorfan képezi az $\mathbb{B}_i$ komplementumára, az $U_i$ komplementumán pedig egy retrakció a $\mathbb{B}_i$ altérre! (Tehát $\phi_i$ az $U_i$ környezetet az $\mathbb{A}_i$ centrumból az $\mathcal{L}_i$-beli egyenesek mentén „felfújja”, hogy kitöltse az egész $\mathbb{CP}^k \setminus \mathbb{B}_i$ halmazt.)

Ezután keress olyan $\psi_i : \mathbb{CP}^k \to \mathbb{CP}^k$ transzformációt, amelyik az $\mathbb{A}_i$ és az $\mathbb{B}_i$ altereket minden pontját helyben hagyja, az $\mathcal{L}_i$-beli egyeneseket saját magukba képezi, az $\overline{U_i}$ zárt halmazon retrakció az $\mathbb{A}_i$ altérre, az $\overline{U_i}$ komplementumát pedig homeomorfan képezi az $\mathbb{A}_i$ komplementumára. (Tehát $\psi_i$ az $\overline{U_i}$ komplementumát, ami az $\mathbb{A}_i$ altér egy környezete, az $\mathbb{A}_i$ centrumból az $\mathcal{L}_i$-beli egyenesek mentén „felfújja”, hogy kitöltse az egész $\mathbb{CP}^k \setminus \mathbb{A}_i$ halmazt.)

Jelölje $\Delta$ az $X = \mathbb{CP}^k \times \mathbb{CP}^k$ szorzat-tér átlóját! Tekintsük a $\Phi_i = \phi_i \times \psi_i$ szorzat-leképezéseket: ezek az $X$ teret saját magára képezik. Lásd be, hogy mindegyik $\Phi_i$ homotóp az identitás-leképezéssel!

Lásd be, hogy $\Phi_0$ úgy képezi a $\Delta$ sokaságot $X$-be, hogy az $\mathbb{A}_0 \times \mathbb{A}_0$ pont egy környezetével irányítástartóan, egyrétegűen lefedi a $\mathbb{CP}^k \times \mathbb{A}_0$ részsokaságot, a környezet komplementumát pedig a $\mathbb{B}_0 \times \mathbb{CP}^k$ részsokaságba képezi!

Lásd be, hogy a $\Phi_1 \circ \Phi_0$ kompozíció úgy képezi a $\Delta$ sokaságot $X$-be, hogy az $(\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_1) \cap \Delta$ egyenes egy környezetével irányítástartóan, egyrétegűen lefedi a $\mathbb{CP}^k \times \mathbb{A}_0$ és a $\mathbb{B}_0 \times \mathbb{A}_1$ részsokaságokat, a környezet komplementumát pedig a $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{CP}^k$ részsokaságba képezi!

Lásd be $i$ szerinti teljes indukcióval, hogy a $\Phi_i \circ \Phi_{i-1} \circ \cdots \circ \Phi_1 \circ \Phi_0$ kompozíció úgy képezi a $\Delta$ sokaságot $X$-be, hogy az $(\mathbb{A}_i \times \mathbb{A}_i) \cap \Delta$ $i$-dimenziós altér egy környezetével irányítástartóan, egyrétegűen lefedi a $\mathbb{CP}^k \times \mathbb{A}_0$, $\mathbb{B}_0 \times \mathbb{A}_1$, $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{A}_2$, ..., $\mathbb{B}_{i-1} \times \mathbb{A}_{i+1}$ részsokaságokat, a környezet komplementumát pedig a $\mathbb{B}_i \times \mathbb{CP}^k$ részsokaságba képezi!

Tehát a $\Phi_k \circ \Phi_{k-1} \circ \cdots \circ \Phi_1 \circ \Phi_0$ kompozíció úgy képezi a $\Delta$ sokaságot $X$-be, hogy a kép irányítástartóan, egyrétegűen lefedi a $\mathbb{CP}^k \times \mathbb{A}_0$,

$\mathbb{B}_0 \times \mathbb{A}_1$, $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{A}_2$, ..., $\mathbb{B}_{k-1} \times \mathbb{A}_k$ részsokaságokat. Ebből már következik az állítás. $\square$

**31.5. Feladat.** *A 31.4. Feladat állítását felhasználva lásd be, hogy a $\mathbb{CP}^\infty$ projektív tér kohomológia gyűrűje valóban a 31.1. Példában megadott polinom-gyűrű!*

**31.6. Feladat.** *Lásd be, hogy a $\mathbb{CP}^n$ projektív tér kohomológia gyűrűje valóban a 31.1. Példában megadott gyűrű!*

*Ötlet.* A $\mathbb{CP}^n \hookrightarrow \mathbb{CP}^\infty$ beágyaás homomorfizmust indukál a kohomológia-gyűrűk között. Lásd be, hogy ez $n$ fokszámig izomorfuzmus, $n$-nél magasabb fokszámokra pedig nulla! $\square$

**31.7. Példa** (valós projektív tér)**.** *Az $n$-dimenziós valós projekív tér, $\mathbb{RP}^n$, ideális hipersíkja $\mathbb{RP}^{n-1}$, a „véges része" pedig $\mathbb{R}^n$. Ez indukcióval megad egy olyan CW-felbontást, melyben összesen $n+1$ cella van: 0-tól $n$-ig minden dimenzióban egy-egy. Ezért a $\mathbb{RP}^n$ CW-lánc-komplexusának $-1$ fokszámtól $n+1$ fokszámig terjedő része:*

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \cdots \xleftarrow{?} \mathbb{Z} \leftarrow 0\ , \quad ?= \begin{cases} 0 & \textit{ha } n \textit{ páratlan,} \\ 2 & \textit{ha } n \textit{ páros.} \end{cases}$$

*A páros fokszámból induló homomorfizmusok 2-vel való szorzások, a páratlanok nullák. (Ezt abból látjuk, hogy az $S^i$ gömbfelületen az antipodális leképezés páratlan $i$-re irányítás-tartó, párosra irányítás-fordító.) A homológia- illetve kohomológia-csoportok:*

$$H_i(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{ha } i = 0, \\ \mathbb{Z} & \textit{akkor is, ha } n \textit{ páratlan és } i = n, \\ \mathbb{Z}_2 & \textit{ha } i \textit{ páros és } 1 \le i \le n, \\ 0 & \textit{ha } i \textit{ páratlan és } 1 \le i < n. \end{cases}$$

$$H^i(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{ha } i = 0, \\ \mathbb{Z} & \textit{akkor is, ha } n \textit{ páratlan és } i = n, \\ 0 & \textit{ha } i \textit{ páros és } 1 \le i \le n, \\ \mathbb{Z}_2 & \textit{ha } i \textit{ páratlan és } 1 \le i < n. \end{cases}$$

*Ha $\mathbb{Z}_2$-együtthatót használunk, akkor minden homomorfizmus nullává válik. Minden sokkal egyszerűbb lesz:*

$$H_i(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z} \quad \textit{és} \quad H^i(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z} \quad \textit{ha } 0 \le i \le n.$$

*A $\mathbb{Z}_2$-együtthatós kohomológia-gyűrű egy „levágott polinom-gyűrű", elsőfokú generátorral. A generátort* első Stiefel-Whitney osztálynak *hívjuk.*

$$H^*(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1] \Big/ (w_1^{n+1})\ , \quad \deg(w_1) = 1.$$

*Láttuk, hogy $\mathbb{RP}^{n-1}$ egy hipersík $\mathbb{RP}^n$-ben. Így a véges-dimenziós projektív tereket egymásba ágyaztuk, uniójuk a* végtelen projektív tér, *$\mathbb{RP}^\infty$:*

$$\mathbb{RP}^0 \subset \mathbb{RP}^1 \subset \mathbb{RP}^2 \subset \mathbb{RP}^3 \subset \dots \, ; \quad \mathbb{RP}^\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{RP}^n \, .$$

$$H^*(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1] \, , \quad \deg(w_1) = 1.$$

*Bizonyítás.* Ugyanúgy megy, mint a komplex projektív tereknél. □

## 32. Grassmann sokaság

**32.1. Definíció** (Grassmann sokaság)**.** *Legyenek $0 < k < n$ egészszámok, $V$ egy $n$-dimenziós valós (illetve komplex) vektortér. A* Grassmann-sokaság *a $V$-beli $k$-dimenziós lineáris altereket paraméterezi, szokásos jelölések: $Gr(k,V)$, $G_k(V)$, $Gr(k,n)$. A Grassmann-sokaság pontjai tehát a $k$-dimenziós alterek $V$-ben, térképeket pedig így kapunk:*

*Válasszunk egy $V = X_0 \oplus F$ direkt felbontást, ahol $\dim(X_0) = k$ és $\dim(F) = n-k$. Jelölje $U \subset GR(n,V)$ az olyan $X < V$ $k$-dimenziós alterek halmazát, melyekre $X \cap F = \{0\}$. Minden ilyen alterek egy $X_0 \to F$ homomorfizmus grafikonja, így $U$-t azonosítottuk a $\mathrm{Hom}(X_0,F)$ vektortérrel. Ez egy térkép az $U \subset Gr(n,V)$ részhalmazon. Tekintsük az összes lehetséges $V = X_0 \oplus F$ felbontást, így az egész Grassmann sokaságot lefedjük térképekkel, tehát $Gr(k,V)$ egy differenciálható sokaság (illetve komplex sokaság).*

**32.2. Feladat.** *Lásd be, hogy az $U$ halmaz csak az $F$ altértől függ, az $X_0$-tól független! Lásd be, hogy a térképek lefedik az egész Grassmann sokaságot! Lásd be, hogy a térképek közötti koordináta-transzformációk differenciálhatók (sőt, polinomok)!*

**32.3. Konstrukció** (zászló)**.** *Legyen $\mathbb{R}^\infty$ egy végtelen dimenziós vektortér egy rögzített megszámlálható bázissal: $f_1, f_2, f_3, \dots$. Minden $n \geq 0$ egészre azonosítjuk $\mathbb{R}^n$-et az első $n$ bázisvektor által kifeszített altérrel, ortogonális komplementuma tehát a többi bázisvektor által kifeszített altér:*

$$\mathbb{R}^n = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle \, ; \quad (\mathbb{R}^n)^\perp = \langle f_{n+1}, f_{n+2}, f_{n+3}, \dots \rangle \, .$$

*Világos, hogy így két végtelen altér-láncot kapunk:*

$$0 < \mathbb{R}^1 < \mathbb{R}^2 < \mathbb{R}^3 < \dots \, ; \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^\infty$$

$$\mathbb{R}^\infty > (\mathbb{R}^1)^\perp > (\mathbb{R}^2)^\perp > (\mathbb{R}^3)^\perp > \dots \, ; \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n)^\perp = 0$$

*(Az ilyen altér-láncokat* zászlónak *nevezik.) Ugyanezt a konstrukciót elismételjük komplex vektorterekkel is:*

$$0 < \mathbb{C}^1 < \mathbb{C}^2 < \mathbb{C}^3 < \dots\ ; \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^\infty$$

$$\mathbb{C}^\infty > (\mathbb{C}^1)^\perp > (\mathbb{C}^2)^\perp > (\mathbb{C}^3)^\perp > \dots\ ; \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{C}^n)^\perp = 0$$

**32.4. Definíció** (végtelen Grassmann sokaság)**.** *Tekintsük a 32.3. Konstrukcióban szereplő altér-láncot $\mathbb{R}^\infty$-ben. Ez a lánc beágyazásokat indukál a megfelelő Grassmann-sokaságok között, az uniójukat (valós)* végtelen Grassmann-sokaságnak *hívjuk:*

$$Gr(k, \mathbb{R}^{k+1}) \subset Gr(k, \mathbb{R}^{k+2}) \subset Gr(k, \mathbb{R}^{k+3}) \subset \dots$$

$$Gr(k, \mathbb{R}^\infty) = \bigcup_{n=k+1}^{\infty} Gr(k, \mathbb{R}^n)\ .$$

*Ugyanezt a játékot eljátszuk komplex vektorterekkel is, így kapjuk a* komplex végtelen Grassmann-sokaságot*:*

$$Gr(k, \mathbb{C}^{k+1}) \subset Gr(k, \mathbb{C}^{k+2}) \subset Gr(k, \mathbb{C}^{k+3}) \subset \dots$$

$$Gr(k, \mathbb{C}^\infty) = \bigcup_{n=k+1}^{\infty} Gr(k, \mathbb{C}^n)\ .$$

**32.5. Definíció** (Univerzális nyaláb)**.** *Tekintsük a $Gr(k, \mathbb{R}^\infty) \times \mathbb{R}^\infty$ triviális vektor-nyalábban az olyan $(V, x)$ párok részhalmazát (emélkezz: $V$ altér, $x$ pedig vektor $\mathbb{R}^\infty$-ben), melyekre az $x$ vektror benne van a $V$ altérben! Ez a részhalmaz egy $k$-rangú vektor-nyaláb, amit* univerzális nyalábnak *hívunk, és $\gamma_k$-val jelölünk.*

Az univerzális nyaláb elnevezést az alábbi tétel indokolja:

**32.6. Tétel.** *Legyen $X$ egy CW-komplexus! Tetszőleges $f : X \to Gr(k, \mathbb{R}^\infty)$ folytonos leképezéshez redeljük hozzá az $f^*\gamma_k$ vektor-nyalábot. Ez egy bijekciót ad az $X$ feletti $k$-rangú vektor-nyalábok izomorfia-osztályai, és az $X \to Gr(k, \mathbb{R}^\infty)$ folytonos leképezések homotópia-osztályai között.*

**32.7. Feladat.** *Fogalmazd meg a 32.4. Definíció és a 32.6. Tétel komplex vektornyalábokra vonatkozó variánsát!*

**32.8. Definíció** (Schubert-cellák)**.** *Legyen $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ egy olyan egészszámokból álló sorozat, melyre $1 \le \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_k$. Használjuk a 32.3. Konstrukció jelölését. A $\sigma$* Schubert-szimbólumhoz *tartozó (valós)* Schubert-cella*,* $e_\sigma \subset Gr(k, \mathbb{R}^\infty)$*, az olyan* $X < \mathbb{R}^\infty$ *$k$-dimenziós alterek halmaza, melyekre*

$$\dim\big(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i}\big) = i\ , \quad \dim\big(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i - 1}\big) = i - 1 \quad \textit{minden } i\textit{-re.}$$

*A $\sigma$-hoz tartozó* komplex Schubert-cella*,* $e_\sigma^{\mathbb{C}} \subseteq Gr(k, \mathbb{C}^\infty)$*, az olyan* $X < \mathbb{C}^\infty$ *komplex alterek halmaza, melyekre*

$$\dim_{\mathbb{C}}\big(X \cap \mathbb{C}^{\sigma_i}\big) = i\ , \quad \dim_{\mathbb{C}}\big(X \cap \mathbb{C}^{\sigma_i - 1}\big) = i - 1 \quad \textit{minden } i\textit{-re.}$$

**32.9. Tétel.** *A* $e_\sigma^{\mathbb{C}} \subset Gr(k, \mathbb{C}^\infty)$ *részhalmaz egy cella, dimenziója*

$$\dim(e_\sigma) = 2\Big[(\sigma_1 - 1) + (\sigma_2 - 2) + \cdots + (\sigma_k - k)\Big]\ .$$

*A komplex Schubert-cellák páronként diszjunktak, és a* $Gr(k, \mathbb{C}^\infty)$ *Grassmann-sokaság CW-felbontását adják. A* $Gr(k, \mathbb{C}^n)$ *Grassmann-sokaság pedig egy CW-rész-komplexus: azon Schubert-cellákból áll, melyekre* $\sigma_k \le n$*.*

*Bizonyítás.* Be kell látni, hogy $e_\sigma$ egy ...-dimenziójú cella, és a pereme benne van a kisebb cellák uniójában. Ezért tényleg CW-komplexus.

Egy $X \in e_\sigma$ altér pontosan akkor van benne $\mathbb{R}^n$-ben, ha $\sigma_k \le n$. Minden $\mathbb{R}^n$-beli $k$-dimenziós altér benne van pontosan egy $e_\sigma$-ban. Ezért a CW-komplexus kitölti az egész végtelen Grassmann-sokaságot, és $Gr(n, \mathbb{R}^n)$ éppen a megadott CW-rész-komplexus. □

**32.10. Tétel.** *Az* $e_\sigma \subset Gr(k, \mathbb{R}^\infty)$ *részhalmaz egy cella, dimenziója*

$$\dim(e_\sigma) = (\sigma_1 - 1) + (\sigma_2 - 2) + \cdots + (\sigma_k - k)\ .$$

*A Schubert-cellák páronként diszjunktak, és a* $Gr(k, \mathbb{R}^\infty)$ *Grassmann-sokaság CW-felbontását adják. A* $Gr(k, \mathbb{R}^n)$ *Grassmann-sokaság pedig egy CW-rész-komplexus: azokból a Schubert-cellákból áll, melyekre* $\sigma_k \le n$*.*

**32.11. Tétel.** *A komplex végtelen Grassmann sokaság kohomológia-gyűrűje egy polinom-gyűrű $k$ generátorral, melyek fokai rendere* $2, 4, 6, \ldots, 2k$*. A $2i$-fokú generátort $i$-*edik Chern-osztálynak *hívjuk, $c_i$-vel jelöljük.*

$$H^*\Big(Gr(k, \mathbb{C}^\infty); \mathbb{Z}\Big) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \ldots, c_k]\ , \quad \deg(c_i) = 2i$$

*Bizonyítás.* Tekintsük a $Gr(k, \mathbb{C}^\infty)$ Grassmann-sokaság 32.8. Definícióban megkonstruált CW-felbontását. Ebben minden cella párosdimenziós, tehát a $H^{2m}\Big(Gr(k, \mathbb{C}^\infty); \mathbb{Z}\Big)$ kohomológia-csoportok mind szabad Abel-csoportok, rangjuk megegyezik az $2m$-dimenziós cellák számával, tehát az olyan $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$ egész-szám sorozatok számával, melyekre

$$m = (\sigma_1 - 1) + (\sigma_2 - 2) + \cdots + (\sigma_k - k)\ , \quad 0 \le \sigma_1 - 1 \le \sigma_2 - 2 \le \cdots \le \sigma_k - k\ .$$

Másrészt, tekintsük az

$$A = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \dots, c_k]\ , \quad \deg(c_i) = 2i$$

polinom-gyűrűt. Definíció szerint a $c_1^{r_1} c_2^{r_2} \cdots c_k^{r_k}$ monom foka $r_1 + 2r_2 + \cdots + kr_k$, tehát az $A$ gyűrű $2m$-fokú homogén komponensének rangja megeryezik az olyan $r = (r_1, r_2, \dots, r_k)$ sorozatok számával, melyekre

$$m = r_1 + 2r_2 + \cdots + kr_k\ , \quad r_i \geq 0 \text{ minden } i\text{-re.}$$

Minden egyes ilyen $r$ sorozathoz rendejük hozzá azt a $\sigma$ sorozatot, amelyre $\sigma_1 - 1 = r_k$, $\sigma_2 - 2 = r_k + r_{k-1}$, és általában

$$\sigma_i - i = r_k + r_{k-1} + \cdots + r_{k-i+1} \quad \text{minden } i\text{-re.}$$

Ez a sorozat kielégíti a $\sigma$-re szabott feltételeket, és könnyen visszakapható belőle az eredeti $r$-sorozat. Tehát minden $m$-re pontosan ugyanannyi $r$ sorozat van, mint ahány $\sigma$ sorozat. Ezzel beláttuk, hogy a $H^{2m}\Big(Gr(k, \mathbb{C}^\infty); \mathbb{Z}\Big)$ Abel-csoport izomorf az $A$ gyűrű $2m$-fokú homogén komponensével, tehat a kohomológia-gyűrű, mint fokszámozott Abel-csoport, izomorf $A$-val.

A gyűrű-struktúrát később, a zászló-sokaságok segítségével határozzuk meg. □

**32.12. Definíció** (Zászló sokaság)**.** $\mathbb{C}^n$*-beli* $k$-dimenziós teljes zászlónak *hívjuk az olyan* $(L_1, L_2, \dots, L_k)$ $k$*-asok halmazát, ahol* $L_i \leq \mathbb{C}^n$ *páronként ortogonális egy-dimenziós komplex alterek. Jelölje* $\mathcal{F}(k, \mathbb{C}^n)$ *az összes* $\mathbb{C}^n$*-beli* $k$*-dimenziós zászló halmazát — ez könnyen ellláthsató topológiával, sőt, differenciálható sokasággá tehető, ezért* zászló-sokaságnak *hívjuk. A 32.3. Konstrukció természetes beágyazásokat indukál, ezért definiálhatjuk a* végtelen zászló-sokaságot *is:*

$$\mathcal{F}(k, \mathbb{C}^k) \subset \mathcal{F}(k, \mathbb{C}^{k+1}) \subset \mathcal{F}(k, \mathbb{C}^{k+2}) \subset \dots\ , \qquad \mathcal{F}(k, \mathbb{C}^\infty) = \bigcup_{n=k}^{\infty} \mathcal{F}(k, \mathbb{C}^n)\ .$$

**32.13. Feladat.** *Jelölje* $\mathcal{F}'(k, \mathbb{C}^n)$ *az olyan* $F_1 < F_2 < \cdots < F_k < \mathbb{C}^n$ *altér-sorozatok halmazát, ahol* $\dim(F_i) = i$*. Mutass egy-egy értelmű megfeletetést* $\mathcal{F}(k, \mathbb{C}^n)$ *és* $\mathcal{F}'(k, \mathbb{C}^n)$ *között!*

**32.14. Megjegyzés.** *Sokan a 32.13. Feladatban leírt módon definiálják a zászló-sokaságot. Ennek a módszernek megvan az az előnye, hogy nem használ merőlegességet, így tetszőleges testre is általánosítható.*

**32.15. Feladat.** *Rögzítsünk egy* $H_k < H_{k-1} < \cdots < H_1 < \mathbb{C}^n$ *altérláncot, ahol* $\dim(H_i) = n - i$ *minden* $i$*-re! Azt mondjuk, hogy egy*

$(L_1, \dots, L_k)$ *zászló* transzverzális *a* $\{H_i\}$ *altér-láncra, ha* $L_i \not\subset H_i$ *minden* $i$*-re. Mutass egy bijekciót a* $\{H_i\}$ *altér-láncra transzverzális zászlók és az* $\oplus_{i=1}^k H_i$ *vektortér elemei között! Lásd be, hogy ezen a módon* $\mathcal{F}(k, \mathbb{C}^n)$ *sokasággá tehető! Mennyi a dimenziója?*

*Ötlet.* Ahhoz, hogy sokaságot kapjunk, fel kell írnunk a koordináta-transzformációt két különböző altér-lánchoz tartozó térkép között. $\square$

**32.16. Feladat.** *Minden* $i = 1, 2, \dots, k$ *értékre tekintsük azt a* $\phi_i : \mathcal{F}(k, \mathbb{C}^\infty) \to \mathbb{CP}^\infty$ *leképezést, ami az* $(L_1, \dots, L_k)$ *zászlóhoz az* $L_i$ *egyenest rendeli! (A projektív tér az origón átmenő egyenesek tere.) Bizonyítsd be, hogy* $\phi_i$ *folytonos! Mutasd meg, hogy* $\phi_i$ *egy* $\mathcal{F}(k-1, \mathbb{C}^\infty)$*-nyaláb (lásd a 12.2. Definíciót)!*

**32.17. Feladat.** *Tekintsük* $i = 1, 2, \dots, k$*-ra a 32.16. Feladat* $\phi_i : \mathcal{F}(k, \mathbb{C}^\infty) \to \mathbb{CP}^\infty$ *leképezéseit! A végtelen projektív tér kohomológia-gyűrűje a* $\mathbb{Z}[c_1]$ *polinom-gyűrű (lásd a 31.1. Példát), vezessük be az* $x_i = \phi_i^* c_1$ *jelölést! (Ezek mind második kohomológia-osztályok.) Lásd be, hogy a zászló-sokaság kohomológia-gyűrűje*

$$H^*\Big(\mathcal{F}(k, \mathbb{C}^\infty); \mathbb{Z}\Big) \cong \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_k] , \quad \deg(x_i) = 2 \textit{ minden } i\textit{-re!}$$

*Ötlet.* $\mathcal{F}(1, \mathbb{C}^\infty) = \mathbb{CP}^1$, tehát $k = 1$-re igaz az állítás. (Lásd a 31.1. Példát!) Az általános esetet $k$-szerinti indukcióval bizonyíthatjuk. A 32.16. Feladat szerint $\phi_k$ egy $\mathcal{F}(k-1, \mathbb{C}^\infty)$-nyaláb. A rost tehát szintén zászló-sokaság, így annak is definiálhatjuk a „saját $x_i$ kohomológia-osztályait” ($i < k$ esetén) — a félreértés elkerülése végett ezeket $x_i'$-vel jelöljük. Mutasd meg, hogy $i = 1, 2, \dots, k-1$-re, ha az $x_i$ kohomológia-osztályt egy rostra megszorítjuk, akkor az $x_i'$ osztályát kapjuk!

Az indukciós feltétel szerint tehát a kohomológia-gyűrűben az $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ osztályok által generált részgyűrű egy polinom-gyűrű.

A polinom-gyűrű szabad Abel-csoport, tehát alkalmazhatjuk a $\phi_k$ nyalábra a Leray-Hirsch tételt (lásd a 28.1. Tételt). Ezért $\mathcal{F}(k, \mathbb{C}^\infty)$ kohomológia-gyűrűje egy szabad $\mathbb{Z}[x_k]$-modulus, melynek bázisát az $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ változókból épített monomok alkotják. Ebből már következik az állítás. $\square$

**32.18. Feladat.** *Mutasd meg, hogy a* $\mathcal{F}(k, \mathbb{C}^n)$ *zászló-sokaság kohomológia-gyűrűje szabad Abel-csoport!*

*Ötlet.* A 32.16. Feladat mintájára konstruálj egy $\mathcal{F}(k-1, \mathbb{C}^{n-1}) \to \mathcal{F}(k, \mathbb{C}^n) \to \mathbb{CP}^{n-1}$ nyalábot! Alkalmazd a Leray-Hirsh tételt (lásd a 28.1. Tételt), $k$ szerinti teljes indukcióval bizonyítsd az állítást! $\square$

*Alternatív ötlet.* A Schubert-cellák mintájára itt is konstruálhatunk CW-felbontást csupa páros-dimenziós cellával. $\square$

**32.19. Feladat.** *Tekintsük azt a* $\psi : \mathcal{F}(k, \mathbb{C}^\infty) \to Gr(k, \mathbb{C}^\infty)$ *leképezést, amelyik minden* $(L_1, \dots L_k)$ *zászlóhoz az* $L_1 + \cdots + L_k$ *alteret rendeli! Bizonyítsd be, hogy* $\psi$ *folytonos! Mutasd meg, hogy* $\phi$ *egy* $\mathcal{F}(k, \mathbb{C}^k)$*-nyaláb!*

**32.20. Feladat.** *Tekintsük a 32.19. Feladatbeli* $\phi$ *nyalábot! Bizonyítsd be, hogy a*

$$\phi^* : H^*\Big(Gr(k, \mathbb{C}^\infty); \mathbb{Z}\Big) \to H^*\Big(\mathcal{F}(k, \mathbb{C}^\infty); \mathbb{Z}\Big) \cong \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_k]$$

*homomorfizmus injektív, és a képe éppen a szimmetrikus polinomok rész-gyűrűje! Tehát a Grasmann-sokaság kohomológia-gyűrűje valóban a 32.11. Tételben megadott polinom-gyűrű.*

*Ötlet.* Permutáld az egyeneseket a $\mathcal{F}(k, \mathbb{C}^\infty)$-beli zászlókban! Így hat az $S_k$ szimmetrikus csoport a zászló-sokaságon. Lásd be, hogy az $S_k$ hatás az $x_i$ kohomo-lógia-generátorokat is permutálja! Lásd be, hogy a $\psi$ leképezés $S_k$-invariáns! Ezért $\psi^*$ képe szimmetrikus polinomokból áll.

Alkalmazd a Leray-Hirsh tételt a $\phi$ nyalábra! Abból következik, hogy $\psi^*$ injektív, és a képe direkt összeadandó. A 32.11. Tétel bizonyításában már láttuk, hogy $H^n\Big(Gr(k, \mathbb{C}^\infty); \mathbb{Z}\Big)$ ugyanakkora rangú, mint a homogén $n$-fokú szimmetrikus polinomok csoportja.

Lásd be, hogy egy $G$ véges rangú szabad Abel-csoportban minden valódi direkt összeadandónak kisebb a rangja, mint $G$-nek. Ebből következik, hogy $\psi^*$ képe egyenlő a szimmetrikus polinomok gyűrűjével. □

**32.21. Tétel.** *A valós végtelen Grassmann sokaság* $\mathbb{Z}_2$*-együtthatós kohomológia-gyűrűje egy polinom-gyűrű k generátorral, melyek fokai rendere* $1, 2, 3, \dots, k$. *Az i-fokú generátort* $i$-edik Stiefel-Whitney-osztálynak *hívjuk,* $w_i$*-vel jelöljük.*

$$H^*\Big(Gr(k, \mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}_2\Big) = \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \dots, w_k] , \quad \deg(w_i) = i$$

*Bizonyítás.* A 32.10. Tétel ad egy CW-felbontást. Be kell látni, hogy egy $m$-dimenziós Schubert-cella pereme minden $(m-1)$-dimenziós cellát vagy kétszer fed le, vagy nullaszor. Ezért a CW-lánc-komplexusban minden differenciál nulla. A bizonyítás többi rész ugyanaz, mint a komplex Grassmann-sokaság esetében. □

## 33. Poincaré sorok

**33.1. Definíció** (Poincaré-sor)**.** *Legyen* $V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n$ *egy olyan fokszámozott vektortér egy tetszőleges test felett, melynek minden homogén komponense véges dimenziós. Az alábbi hatványsort a* $V$ Poincaré-sorának *nevezzük:*

$$\mathcal{P}_V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim(V_n) t^n$$

**33.2. Megjegyzés.** *Ha* $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ *egy végesen generált fokszámozott gyűrű, akkor* $A \otimes \mathbb{Q}$ *egy olyan fokszámozott algebra a racionális szám-test felett, melynek minden homogén komponense véges dimenziós, ezért beszélhetünk a* $\mathcal{P}_{A\otimes\mathbb{Q}}(t)$ *Poincaré-sorról. A homogén generátor-rendszer mérete szerinti indukcióval bizonyítható, hogy ebben az esetben a Poincaré-sor összege egy racionális törtfüggvény.*

**33.3. Példa.** *Az* $M = Gr(k, \mathbb{C}^\infty)$ *Grassmann-sokaság* $\mathbb{Z}$*-együtthatós kohomológia-gyűrűjének Poincaré-sora:*

$$\mathcal{P}_{H^*(M;\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Q}}(t) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-t^{2i}}$$

**33.4. Példa.** *Az* $M = Gr(k, \mathbb{R}^\infty)$ *Grassmann-sokaság* $\mathbb{Z}_2$*-együtthatós kohomológia-gyűrűjének Poincaré-sora:*

$$\mathcal{P}_{H^*(M;\mathbb{Z}_2)}(t) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-t^{i}}$$