# CIKLUSOK, CHOW VARIETÁS

SZABÓ ENDRE

Kivonat. A fejezet célja, hogy megismertessen a ciklusok elemi tulajdonságaival, és megkonstruálja a Chow varietást. Menet közben – egy hosszas kitérő alkalmából – megismerkedünk a bőséges vonal-nyalábokkal, és számos rájuk vonatkozó eredménnyel.

Az egész fejezet [Kollár] könyvének bizonyos fejezeteit követi. Itt a fogalmak pontos definíciója, és a tételek pontos kimondása a célunk — a könyvben megtalálhatók a részletes bizonyítások.

## 1. Ciklusok elemi tulajdonságai

Ebben a szakaszban minden séma Noether séma. Ennek elsősorban az az oka, hogy így minden felmerülő ciklusban automatikusan véges sok tag lesz.

Az algebrai ciklusok kíváló alapanyagai a homológia-csoportok, illetve a kompakt tartójú kohomológia-csoportok algebrai analógjaihoz. Egy algebrai ciklusból – triangulálva – közvetlenül készíthetünk szimplíciális homológia osztályt. Ahhoz, hogy igazi homológia-szerű elméleteket kapjunk, különféle ekvivalencia relációkat lehet bevezetni (pl. racionális-, algebrai-, numerikus ekvivalencia). Az algebrai geometria egyik legkorábbi (és talán a leghatékonyabb) eszköze a ciklusok metszési számainak, illetve az általánosabb kohomológiai szorzatoknak a kiszámítása. Amikor következő fejezetekben ciklusokkal foglalkozunk, végig az a cél lebeg előttünk, hogy a metszési számok (vagy általánosabban a kohomológia gyűrű) szokásos funktoriális tulajdonságait (elöre tolás, visszahúzás, projekció formula, homotópia-invariancia, stb.) a lehető legpontosabbban visszakapjuk az algebrai szituációkban is.

**1.1. Definíció (Ciklusok).** *Legyen $X$ egy Noether séma. Egy $d$-*dimenziós algebrai ciklus *$X$-en egy formális lineáris kombináció $\sum_i a_i[V_i]$ ahol $V_i \subseteq X$ irreducibilis, redukált, zárt részsémák, $a_i$ egésszámok, és az összeg véges. Egy ciklust* nem negatívnak, *vagy* effektívnek *mondunk, ha az összes $a_i$ nem negatív. Az összes $d$-dimenziós ciklusok (a formális összeadásra nézve) egy Abel csoportot alkotnak, ezt $Z_d(X)$-szel jelöljük.*

**1.2. Definíció (Fundamentális ciklus).** *Legyen $X$ egy Noether séma, és $\mathcal{F}$ egy koherens kéve $X$-en, amelynek tartója $d$ dimenziós. Legyenek $Z_i$ az $\mathcal{F}$ tartójának irreducibilis komponensei, jelölje $z_i \in Z_i$ az általános pontokat, és $m_i$ az $\mathcal{F}_{z_i}$ kocsány hosszát (ez modulus az $\mathcal{O}_{z_i,X}$ lokális gyűrű felett). Ekkor az $\mathcal{F}$* fundamentális ciklusa

$$[\mathcal{F}] = \sum_{i:\dim(Z_i)=d} m_i[Z_i]$$

*Speciálisan, ha $\dim(X) = d$, akkor $[X] = [\mathcal{O}_X]$ az $X$* fundamentális ciklusa*.*

**Megjegyzés:** Fundamentális ciklust csak sémákra szokás definiálni, koherens kévékre még sehol sem láttam. Ez az általánosítás nem mély, nem fontos, nem is túlságosan hasznos – de nekünk kényelmes lesz.

**Motiváció.** Általában sokféle részsémának lehet ugyanaz a fundamentális ciklusa. Például a síkon a kétszeres pontok éppen az érintő vektorok, de ugyanaz a pont többféleképpen (bárrmelyik irányból) is megkapható. Mi a helyzet magasabb dimenzióban? Néha azonban egy–egy értelmű a ciklus$\leftrightarrow$részséma megfeleltetés:

**1.3. Lemma** *Legyenek $V_i \subset X$ különböző $d$-dimenziós részvarietások, és $\sum a_i[V_i] \in Z_d(X)$ egy ciklus. Ha a következő feltételek valamelyike teljesül:*

1. *minden $a = i = 1$, vagy*
2. *$X$ tisztán $d + 1$ dimenziós, és a szinguláris halmaza legalább 2 kodimenziós (lásd $(R_1)$ feltétel alább),*

*akkor pontosan egy olyan $W \subset X$ tisztán $d$-dimenziós részséma van, amelyik fundamentális ciklusa éppen $[W] = \sum a_i[V_i]$.*

**Analógia:** Kompakt komplex sokaságokon egy algebrai ciklus meghatároz egy homológia osztályt. Mi a helyzet nem kompakt sokaságokon? Most definiálunk egy $f_*$ leképezést ciklusokra, amelyik kompatibilis a homológia-csoportok közt működő $f_*$-gal. Miért nem lehet tetszőleges morfizmusra definiálni? (Topológiában sem lehet!!!)

**1.4. Definíció (Proper előre tolás).** *Legyen $f : X \to Y$ Noether sémák közti proper morfizmus, definiáljuk az $f_* : Z_d(X) \to Z_d(Y)$ homomorfizmust. Legyen $\sum_i a_i[V_i]$ egy $d$-dimenziós ciklus $X$-en, jelölje $W_i \subset Y$ az $f(V_i)$ képhalmaz lezártját (ez irreducibilis), és ha $\dim(W_i) = d$, akkor jelölje $\deg(V_i/W_i)$ a $V_i \to W_i$ véges leképezés fokát (azaz a $K(W_i) \leq K(V_i)$ testbővítés fokát). Ekkor*

$$f_*\left(\sum_i a_i[V_i]\right) = \sum_{i:\dim(W_i)=d} \deg\left(V_i/W_i\right)[W_i]$$

*(Azok a $W_i$ komponensek, amelyeknek dimenziója $d$-nél kisebb, nem kapnak szerepet.)*

**Analógia:** Kompakt sokaságok esetén az algebrai ciklus homológia-osztálya duális egy kohomológia osztálhoz. Mi a helyzet nem kompakt sokaságokkal? Most konstruálunk olyan $f^*$ leképezést ciklusokra, amelyik kompatibilis a kohomológia csoportok közt élő $f^*$-gal. Ha csak kompakt sokaságokre szorítkozunk, akkor a topológia tetszőleges $f$ leképezéshez ad egy $f^*$ homomorfizmust. Mi azonban csak különösen szép (azaz lapos) leképezéseket engedhetünk meg. Érdemes elgondolkodni az eltérés okán: Az általános laposság miatt van egy sűrű nyílt hlmaz, ami fölött $f$ lapos – tehát tudunk $f^*$-ot definiálni minden olyan ciklusra,amelyik belemetsz ebbe a nyílt halmazba. Ahhoz, hogy tetszőleges $f^*$-ot tudjunk definiálni, be kellene vezetni valamilyen ekvivalencia-relációt (a topológia is ezt teszi), hogy a rossz helyen lakó ciklusokat megmozgathassuk. Mi azonban maradunk a ciklusoknál, és a lapos $f$-eknél...

**1.5. Definíció (Lapos visszahúzás).** *Legyen $f : X \to Y$ Noether sémák közti $n$ relatív dimenziós lapos morfizmus, definiáljuk az $f^* : Z_d(Y) \to Z_{d+n}(X)$ homomorfizmust. Legyen $\sum_i a_i[V_i]$ egy $d$-dimenziós ciklus $Y$-on, jelölje $W_i = V_i \times_Y X \subset X$ a $V_i$ ősképét (mint rész-séma). Ekkor*

$$f^*\left(\sum_i a_i[V_i]\right) = \sum_{i:\dim(W_i)=d} a_i[W_i]$$

**1.6. Lemma** *Legyen $f : X \to Y$ egy morfizmus, $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ koherens kévék $X$-en illetve $Y$-on. Ha $f$ proper, akor $[f_*\mathcal{F}] = f_*[\mathcal{F}]$, ha pedig lapos, akkor $[f^*\mathcal{G}] = f^*[\mathcal{G}]$.*

**1.7. Lemma** *A proper előre tolás, és a lapos visszahúzás művelete felcserélhető az alaptest bővítésével.*

## 2. Metszési számok

Minden, amit ebben a szakaszban írok, megtalálható [Kollár] könyvének függelékében. Egy másik, szintén nagyon jól olvasható összefoglalás [Kleiman]. Érdemes utána nézni [Fujita] cikéknek is.

Ebben a szakaszban is minden séma Noether séma.

**2.1. Tétel (Snapper, Kleiman).** *Legyen $X$ egy Noether séma, $\mathcal{F}$ egy koherens kéve és $L_1, \dots L_d$ vonalnyalábok $X$-en. Tegyük fel, hogy$\mathcal{F}$ tartója proper. Ekkor az*

$$(n_1, n_2 \dots n_d) \to \chi\left(L_1^{n_1} \otimes \cdots \otimes L_d^{n^d} \otimes \mathcal{F}\right)$$

*függvény egy $d$ változós polinom, a foka legfeljebb*$\dim \operatorname{supp}(\mathcal{F})$. *(Itt $\chi$ az Euler-karakterisztika.)*

**Megjegyzés.** Ez a lemma azon múlik, hogy az Euler–karakterisztika additív, egzakt sorozatokkal könnyedén darabolhatnánk a kévénket. Ehelyett azonban a soron következő — igen általános — lemmára, a dévissage-ra hivatkozunk, abból triviálisan következik ez a lemma is.

**Moiváció.** Gyakran szeretnénk belátni, hogy egy séma minden rész–sémája rendelkezik egy bizonyos jótulajdonsággal. Pl. a mi esetünkben egy hozzárendelt függvényről szeretnénk belátni, hogy polinom fügvény. Sokat segít, ha ezt az — eredetileg varietásokról szóló — tulajdonságot sikerül általánosítani koherens kévékre, hiszen akkor egzakt sorozatok segítségével lehet indukciós bizonyításokat fabrikálni. Ezek az indukciós bizonyítások azonban mind egy kaptafára készülnek: a koherens kévét fel kell darabolni kisebbekre, ahol a kisebb vagy azt jelenti, hogy az általános pontokban kisebb a kéve rangja, vagy azt, hogy a kéve tartójának kevesebb komponense van, vagy azt, hogy a tartó dimenziója kisebb. A Noether tulajdonság miatt az ilyen darabolások egyszer véget érnek. Ezt az általáno stratégiát kristályosította ki, és öntötte végleges formába Grothendieck. Legyen $S$ azon koherens kévék osztálya, amelyek rendelkezik a jótulajdonságunkkal, szeretnénk belátni, hogy minden kéve iközöttük van. Ehhez arra van szükég, hogy $S$ zárt bizonyos operációkra nézve — tehát, hogy az indukció során miflyen darabolásokat akarunk használni. A következő lemma felsorolja, hogy pontosan milyen operációkat kell (illetve elegendő) figyelembe vennünk:

**2.2. Lemma (dévissage, Grothendieck).** *Legyen $X$ egy Noether séma, és $S$ a koherens kévék egy olyan osztálya, ami rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

(1) *$S$ zárt az izomorfizmusokra nézve,*
(2) *ha $Z \subset X$ zárt, irreducibilis, redukált részséma (azaz $\mathcal{O}_Z$ nullosztó–mentes), akkor $\mathcal{O}_Z \in S$,*
(3) *ha $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$ koherenskévék egzakt sorozata, és $\mathcal{E}, \mathcal{G} \in S$, akkor $\mathcal{F} \in S$,*
(4) *ha $Z \subset X$ zárt, irreducibilis, redukált részséma (azaz $\mathcal{O}_Z$ nullosztó–mentes), $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{O}^r \to \mathcal{G} \to 0$ egzakt,* $\dim \operatorname{supp}(\mathcal{G}) < \dim(Z)$, *és $\mathcal{G} \in S$ akkor $\mathcal{F} \in S$.*

*Ilyenkor $S$ tartalmazza az összes koherens kévét.*

**Bizonyítás.** Legyen $\mathcal{F} \notin S$ egy koherens kéve, amelyiknek a tartója minimális, ellentmondásra fogunk jutni. Feltehető, hogy $X$ éppen az

$\mathcal{F}$ tartója. Ha $X = Y \cup Z$ felbontható volna, akkor kapnánk egy

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}\big|_Y \oplus \mathcal{F}\big|_Z \to \{\text{kicsi}\}_{\mathrm{Y\cap Z}} \to 0$$

egzakt sorozatot, ahol $\{\text{kicsi}\}_{\mathrm{Y\cap Z}}$ tartója $Y \cap Z$-ben van. Ez mutatná, hogy mégis $\mathcal{F} \in S$, ami lehetetlen. Tehát $X$ felbonthatatlan. A

$$0 \to \{\mathcal{F} \text{ torzió része}\} \to \mathcal{F} \to \{\text{torzió mentes}\} \to 0$$

egzak sorozat mutatja, hogy a $\{$torziómentes$\}$ tag sem lehet $S$-ben, tehát feltehető, hogy $\mathcal{F}$ torzió mentes. Ekkor $\mathcal{F}$ szabad egy $U$ sűrű nyílt halmazon: $\mathcal{F}\big|_U = \mathcal{O}_U^r$, és ez az izomorfizmus ad egy $\mathcal{F} \subset K^r$ beágyazást, ahol $K$ az $X$ függvénytestjéből készített konstans kéve. Ez ad két egzakt sorozatot:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & (\mathcal{F} \bigcap \mathcal{O}_X^r) & \to & \mathcal{F} & \to & \{\text{kicsi}\}_{X\setminus U} & \to & 0 \\ & & \| & & & & & & \\ 0 & \to & (\mathcal{F} \bigcap \mathcal{O}_X^r) & \to & \mathcal{O}_X^r & \to & \{\text{másik kicsi}\}_{X\setminus U} & \to & 0. \end{array}$$

Ezekből kijön az ellentmondás. $\square$

**2.3. Definíció (metszési számok).** *Legyen $X$ egy Noether séma, $\mathcal{F}$ egy koherens kéve és $L_1, \dots L_d$ vonalnyalábok $X$-en. Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ tartója proper. Az $L_1 \dots L_d$* metszési száma *$\mathcal{F}$-en legyen az $(n_1 \cdot n_2 \cdots n_d)$ együtthatója a $\chi\left(L_1^{n_1} \otimes \cdots \otimes L_d^{n^d} \otimes \mathcal{F}\right)$ polinomban, jelölése:*

$$(L_1 \cdot L_2 \cdots L_d \cdot \mathcal{F})$$

*Ha $L = L_1 = \dots L_d$ akkor használjuk az $(L^d \cdot \mathcal{F})$ jelölést is, és egy $Y \subseteq X$ részsémára $(L_1 \cdots L_d \cdot Y)$ és $(L^d \cdot Y)$ fogja jelölni az $(L_1 \cdots L_d \cdot \mathcal{O}_Y)$ illetve az $(L^d \cdot \mathcal{O}_Y)$ metszési számokat. Ha $\gamma \in \mathbb{Z}_d(X)$ egy ciklus, és , akkor legyen*

$$(L_1 \cdots L_d \cdot \gamma) = (L_1 \cdots L_d \cdot \mathcal{G})$$

*ahol $\mathcal{G}$ bármelyik olyan koherens kéve amelyikre $[\mathcal{G}] = \gamma$. Hamarosan kiderül, hogy ez nem függ $\mathcal{G}$ választásától.*

**Megjegyzés.** A metszési számok valójában nem kévékre, hanem ciklusokra akarjuk használni. Csupán azért kellett kévékre definiálni, hogy használhassunk dévissage-t a bizonyításokban.

**2.4. Definíció (algebrai, és numerikus ekvivalencia).** *Legyen $X$ egy proper Noether séma, $L, M$ vonalnyalábok $X$-en. Azt mondjuk, hogy $M$ és $L$* algebrailag ekvivalens, *$L \sim_{\mathrm{alg}} M$, ha van vonalnyalábok-nak egy olyan összefüggő családja, amelyik tartalmazza mindkettőjüket. $M$ és $L$* numerikusan ekvivalens, *$L \equiv M$, ha minden $C \subset X$ görbére $(L \cdot C) = (M \cdot C)$. Egy vonalnyaláb* algebrailag illetve numerikusan triviális, *ha algebrailag illetve numerikusan ekvivalens a triviális nyalábbal.*

**Megjegyzés.** Az algebrai ekvivalenciából következik a numerikus ekvivalencia, amint az a következő tételből kiderül.

**2.5. Tétel (Metszési számok tulajdonságai.).** *Legyen $X$ egy Noether séma, $f : X \to S$ egy proper morfizmus, $\mathcal{F}$ egy proper tartójú koherens kéve $X$-en, $L_1, \dots L_d$ vonalnyalábok $X$-en.*

(1) $(L_1 \cdots L_d \cdot \mathcal{F}) = 0$ *ha* $\dim \operatorname{supp}(\mathcal{F}) < d$.
(2) *A metszési szám szimmetrikus, d-lineáris az $L_i$ változókban (a Piccard csoport-beli műveletre nészve).*
(3) *A metszési szám additív $\mathcal{F}$-ben (egzakt sorozatokra nézve).*
(4) *Legyenek $X_1, X_2 \dots$ az $\mathcal{F}$ tartójának $d$ dimenziós irreducibilis komponensei, ekkor*
$$(L_1 \cdots L_d \cdot \mathcal{F}) = \sum_i l_{X_i}(\mathcal{F}) \cdot (L_1 \cdots L_d \cdot X_i)$$
*ahol $l_{X_i}(\mathcal{F})$ jelöli az $\mathcal{F}$ hosszát az $X_i$ általánospontjában. Tehát ha $\mathcal{F}$ tartója $d$ dimenziós, akkor a metszési szám $\mathcal{F}$ helyett csak az $[\mathcal{F}]$ fundamentális ciklustól függ.*
(5) *Ha* $\dim \operatorname{supp}(\mathcal{F}) = d$, *és $M_1, \dots M_d$ vonalnyalábok $S$-en, akkor teljesül a* projekció formula*:*
$$(f^*M_1 \cdots f^*M_d \cdot \mathcal{F}) = (M_1 \cdots M_d \cdot f_*\mathcal{F})$$
(6) *Ha $f$ lapos, akkor az $(L_1 \cdots L_d \cdot \mathcal{F}_s)$ metszési szám lokálisan konstans függvénye az $s \in S$ pontnak, ahol $\mathcal{F}_s$ jelöli az $\mathcal{F}$ megszorítását az $f^{-1}(s)$ rostra. Sőt, ha $\gamma_t$ ciklusok egy jól definiált családja (lásd később), akkor az $(L_1 \cdots L_d \cdot \gamma_t)$ metszési szám $t$-ben lokálisan konstans.*
(7) *Ha $L'_1 \dots L'_d$ olyan vonalnyalábok $X$-en, amelyekre $L_i \sim_{\mathrm{alg}} L'_i$ vagy $L_i \equiv L'_i$, akkor $(L_1 \cdots L_d \cdot \mathcal{F}) = (L'_1 \cdots L'_d \cdot \mathcal{F})$.*
(8) *Legyen $\mathcal{F}$ torziómentes és $L_d = \mathcal{O}_X(Z - V)$, ahol $Z, V \subset X$ effektív Cartier divízorok (tehát rész-sémák is). Ekkor*
$$(L_1 \cdots L_d \cdot \mathcal{F}) = (L_1 \cdots L_{d-1} \cdot \mathcal{F}|_Z) - (L_1 \cdots L_{d-1} \cdot \mathcal{F}|_V)$$
*Torziómentesség helyett elég feltenni, hogy $Z$ és $V$ lokális egyenletei sehol nem nullosztói $\mathcal{F}$-nek.*
(9) *Tegyük fel, hogy $X$ projektív, $n \geq 2$ dimenziós, és $L$ egy vonalnyaláb, $H$ pedig egy bőséges divízor $X$-en (definíció később). Pontsan akkor lesz $L \equiv 0$, ha $(L \cdot H^{n-1}) = (L^2 \cdot H^{n-2} = 0$. Ha pedig $n \geq 3$, akkor ez ekvivalens azzal, hogy az $L|_H$ megszorított nyaláb numerikusan triviális $H$-n.*
(10) *Tegyük fel, hogy* $\dim \operatorname{supp}(\mathcal{F}) = d$, *minden $L_i = \mathcal{O}_X(D_i)$, ahol $D_i$ effektív Cartier divízorok, és minden $x \in \bigcap D_i$ metszéspontban a $D_i$ divízorok lokális egyenletei reguláris sorozatot alkotnak*

*az $\mathcal{F}_x$ modulusra nézve (i.e. $D_1$ nem nullosztó $\mathcal{F}_x$-renézve, $D_2$ nem nullosztó $(\mathcal{F}|_{D_1})_x$-re nézve, $D_3$ nem nullosztó $(\mathcal{F}|_{D_1\cap D_2})_x$-re nézve, stb.). Ilyenkor*

$$(L_1 \cdots L_d \cdot \mathcal{F}) = \sum_{x\in\bigcap D_i} \operatorname{rank}_x(\mathcal{F}) \cdot l_x(\mathcal{O}_{\bigcap D_i})$$

(11) *Tegyük fel, hogy $X$ proper, $d$-dimenziós, és $L$ egy vonalnyaláb $X$-en. Ekkor*

$$\chi(L^n \otimes \mathcal{F}) = \frac{(L^d \cdot \mathcal{F})}{d!} n^d + O(n^{d-1})$$

*ahol $O(n^{d-1})$ a szokásos nagy Ordó becslést jeleni.*

**Bizonyításról:** A legtöbb tulajdonság azonnal következik a dévissage-ból (2.2. Tétel) valamint az Euler karakterisztika aditivitásából, csupán amegfelelő egzakt sorozazokat kell felírni. Másik lehetőség, hogy (8) erősebb változatát hasnáljuk (mindig van ilyen $Z$ és $V$) és dimenzió szerint indukálunk. Ezen kívül egyes állításokhoz szükség van még a következőkre:

(6) Az Euler-karakterisztika lapos családokban lokálisan konstans. A ciklusok családjáról szóló kiegészítes ebből következi, amint megismerkedünk (lásd később) a ciklus-családok tulajdonságaival, mindössze azt kell észrevenni, hogy a család egy nagy nyílt halmazon lapos.

(7) Az Euler-karakterisztika lapos családokban lokálisan konstans. A numerikus ekvivalenciáról szóló kieészítéshez használjuk (8) erősebb változatát.

(9) Használjuk Hodge index tételét (2.7. Tétel).

A részleteket próbáld kitalálni, vagy nézd meg [Kollár] könyvében, vagy [Kleiman]-ban.

**Kiegészítés.** A metszési számok sok helyen megjelennek. Álljon itt néhányélda a felületek elméletéből. Egy simaprojektív felületen a görbék egyúttal divízorok is, tehát van egy algebrai metszet-forma, ami megegyezik a topológiai metszet-formával $H^2(X,\mathbb{R})$ azon alterén, amit a görbék (tehát divízorok) kohomológia osztályai kifeszítenek. Itt csak a tételeket soroljuk fel, a részleteket megleled [Hartshorne] könyvében.

**2.6. Tétel (Adjunkció formula).** *Legyen $C$ egy görbe egy sima projektív felületen, $K$ a kanonikus divízor. Ekkor a görbe aritmetikai neme $g = \dim H^1(C, \mathcal{O}_C)$, sima görbékre ez megegyezik a geometriai nemmel. Az adjunkciós formula:*

$$2g - 2 = \Big(C \cdot (C + K)\Big)$$

**2.7. Tétel (Hodge index tétele).** *Egy sima projektív felületen a metszet-formának 1 pozitív sajátértéke van, a többi sajátérték mind negatív.*

**2.8. Tétel (Riemann-Roch formula).** *Legyen $D$ tetszőleges divízor az $X$ sima projektív felületen, $K$ pedig a kanonikus divízor. Ekkor*

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \frac{1}{2}\Big(D \cdot (K - D)\Big) + \frac{1}{12}\Big((K^2) + c_2(X)\Big)$$

**2.9. Tétel (Castelnuovo).** *Legyen $C$ egy görbe egy simaprojektív varietáson. Ha $C$ sima racionális görbe, és $(C^2) = -1$, akkor a felület előáll, mint egy másik (egyszerűbb) felület felfújtja, $C$ a kivételes divízor. Ezzel ekvivalens feltétel: $C \cdot K = -1$.*

## 3. Bőséges és nef divízorok

Ez a szakasz egy kitérő, bár rendkívül fontos a mai algebrai geometria megértéséhez. Az egész szakaszban az lesz a filozófiánk, hogy a sok-sok lehetséges metszési szám közül számunkra csak a (Cartier-divízor · görbe) párosítás fontos, és a görbék a divízorokkal duális szerepet játszanak. A három dimenziós klasszifikáció azon múlik, hogy sikerült nagyon pontosan megérteni bizonyos racionális görbék geometriáját, és az elmélet kiinduló pontja éppen a görbék kúpjának vizsgálata.

A bőséges divízorok elemi tulajdonságait megtalálhatod [Hartshorne] könyvében, de a szakasz legnagyobb részt [Kollár] könyvénekfüggelékén alapul. Ugyanezek a dolgok megtalálhatók (egy kicsit olvasmányosabban) [Kleiman] cikkében is.

**3.1. Definíció (Cartier divízor).** *Egy tetszőleges sémán az 1 kodimenziós zárt halmazok egész-együtthatós formális lineáris kombinációit* Weil-divízoroknak *nevezzük. (Mások gyakran dolgoznak racionális, vagy valós együtthatóggal is, ilyenkor $\mathbb{Q}$-Weil-divízorokról, illetve $\mathbb{R}$-Weil-divízorokról beszélnek.) Az olyan lineáris kombinációkat, amelyek minden pont környezetében felírhatók, mint egy racionális függvény divízora:*

$$\{\textit{zérushelyek}\} - \{\textit{pólusok}\},$$

Cartier divízoroknak *nevezzük. Próbáld meg definiálni a $\mathbb{Q}$-Cartier és az $\mathbb{R}$-Cartier divízorokat! Sima varietásokon természetesen a kétféle divízor-fogalom megegyezik. De pl. az $xy = 0$ egyenletű dupla egyenes szinguláris pontja nem adható meg egy egyenlettel (miért?), a kétszerese viszont igen. Az $x^3 = y^4$ egyenletű görbe szinguláris pontja nem adható meg egy egyenlettel (miért?), a háromszorosa viszont igen. Az $xz = z^2$ egyenletű felület origójában van Weil divízor, amelyik nem Cartier, de minden divízor kétszerese Cartier (állítsd elő a felületet, mint $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$*

*hányados — ez miért segít?). Az $xy = zt$ egyenletű kúp csúcsában az $x = z = 0$ divízor egyetlen többszöröse sem adható meg egy egyenlettel (ez nehezebb: fújd fel az $y = t = 0$ divízort, és számold ki, hogy a felfújt sima lesz, a kivételes halmaz viszont — divízor helyett — csupán egy görbe. Hogyan következik ebből az állítás?).*

**3.2. Tétel (Egyértelmű prímfelbontás).** *Egy Noether integritási tartományban pontosan akkor teljesül az egyértelmű prímfelbontás, ha minden 1 magasságú prímideál főideál, és ez a tulajdonság lokális.*

**Gondolkodtató:** Mi köze a tételnek a Cartier és Weil divízorokhoz? Fogalmazd át a tételt sémákra. Az ilyen sémákat *faktoriális* sémáknak mondjuk. Fogalmazd át komplex analitikus terekre is. Lásd be, hogy az analitikus értelemben faktoriális terek algebrai értelemben is faktoriálisak! Próbáld definiálni a $\mathbb{Q}$-faktoriális sémákat,analitikus tereket ($\mathbb{Q}$-Cartier divízorok segítségével). Vigyázat: elképzelhető, hogy egy komplex varietás nem $\mathbb{Q}$-faktoriális, de mint komplex analitikus tér $\mathbb{Q}$-faktoriálissá válik!

**Konvenció:** Minden sémán minden vonalnyalábnak van (sok) racionális szelése, és minden racionális szelésnek van divízora:

$$\{\text{zérushelyek}\} - \{\text{pólusok}\}.$$

Egy vonalnyalábbólvégtelensok különböző divízort kaphatunk. Fordítva: minden Cartier divízor előáll, mint egy vonalnyaláb szelésének a divízora. A divízor egyértelműen meghatározza a vonalnyalábot, és proper sémákon konstans szorzó erejéig a szelést is. A továbbiakban gyakran váltunk (mindenfigyelmeztetés nélkül) vonalnyalábokról divízorokra, és viszont. Pl. a nyalábok tenzor-szorzata helyett gyakran írjuk divízorok összegét, ha az kényelmesebb.

**Figyelmeztetés:** Komplex analitikus tereken is lehet Cartier divízorokból vonalnyalábokat és meromorf szeléseket gyártani. A fenti bijekció azonban sántít, nem minden vonalnyalábnak van meromorf szelése, még sokaságokra sem. Keress olyan sokaságot, és vonalnyalábot, amelyiknek nincs meromorf szelése! (A Hopf felület: $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{Z}$ ahol a csoport hatás $v \xrightarrow{n} 2^n v$. Miért? Vagy a $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^4$ tóruszok közül majdnem mind ilyen. Miért?)

**Konstrukció.** Legyen $X$ egy séma, és $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}$ egy racionális leképezés egy projektív térbe. Választunk a projektív téren homogén koordináta rendszert — azaz bázist a $H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))$ vektortérben (hiszen ez természetes módon azonosítható a homogén lineáris polinomok terével). Ezeket visszahúzva $X$-re az $L = f^*\mathcal{O}_P(1)$ nyaláb $s_0, \dots s_n$ szeléseit kapjuk. Világos, hogy a szelések meghatározzák $f$-et, hiszen egy $P$ pont képe $f(P) = (s_0(P), \dots s_n(P)) \in \mathbb{P}$ (gondold meg: $s_i(P)$

nem szám, hanem egy 1 dimenziós vektortér eleme, de az $f(P)$-re adott képlet mégis értelmes). Persze nincs szükségünk magára a bázisra, elég megadnunk az $s_i$ szelések által kifeszített $V \leq H^0(X, L)$ alteret, és az $f(X)$ kép által kifeszített lineáris alteret $\mathbb{P}$-ben — a kép altér dimenziója természetesen $\dim(V) - 1$ kell legyen. Gondold meg: a konstrukció természetes módon (tehát koordinátáktól függetlenül ) megad egy $X \dashrightarrow \mathbb{P}(V^*)$ racionális leképezést a lineáris rendszer duálisterébe.

**3.3. Definíció (Lineáris rendszer.).** *Adott egy $L$ vonal-nyaláb az $X$ sémán és egy $V \leq H^0(X, L)$ véges dimenziójú altér. A $V$-beli szelések divízorainak halmazát* lineáris rendszernek *nevezzük. (Egy szelés divízora = zérushely - pólus hely.) A lineáris rendszer azonosítható a $\mathbb{P}(V)$ projektív térrel, és meghatároz egy $X \dashrightarrow \mathbb{P}(V^*)$ racionális leképezést (itt $V^*$ a duális tér). Ha $V = H^0(X, L)$ véges dimenziós, akkor a hozzá tartozó lineáris rendszert* teljes lineáris rendszernek *mondjuk, $|L|$-lel jelöljük. Ha $D$ egy Cartier divízor, akkor a hozzá tartozó $|\mathcal{O}(D)|$ teljes lineáris rendszert $|D|$-vel jelöljük.*

**Kérdések:** Adott egy $L$ vonal-nyaláb az $X$ sémán, és egy $V \leq H^0(X, L)$ véges dimenziójú altér.

(1) Keressük meg az ehhez tartozó racionális leképezést,lehetőleg koordináta-mentesen.
(2) Mekkora lesz a leképezés érelmezési tartománya?
(3) Mi a feltétele annak, hogy $f$ mindenütt definiált és injektív legyen?
(4) Mi a feltétele annak, hogy $f$ beágyazás legyen?

**3.4. Definíció** *Legyen $X$ egy proper séma, $\mathcal{F}$ egy koherens kéve, $D$ egy Cartier-divízor, $L = \mathcal{O}(D)$ a hozzá tartozó vonalnyaláb. $D$ illetve $L$*

(1) *$\mathcal{F}$ globálisan generált, ha minden $p \in X$ pontban az $\mathcal{F}_x$ modulust generálják az $\mathcal{F}$ globális szelései. Ekvivalens feltétel: $H^0(X, L^n \otimes \mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_x \to L^n \otimes \mathcal{F}$ természetes kéve-leképezés szürjektív.*
(2) *A $|D|$ lineáris rendszer bázispont mentes, ha az általa indukált leképezés mindenütt értelmes, azaz ha a $|D|$-beli divízorok metszete üres (a metszet pontjait hívják bázispontoknak). Ekvivalens feltétel: $L$ globálisan generált (miért?).*
(3) *$L$ illetve $D$ nagyon bőséges (very ample), ha $|D|$ egy beágyazást indukál, azaz ha a $|D|$-beli divízorok elválasztják egymástól $X$ pontjait, és Zariski érintő vektorait (ez miért ugyanaz?).*
(4) *$L$ illetve $D$ bőséges, ha egy pozitív $n$-re $nD$ nagyon bőséges — ki fog derülni, hogy minden elég nagy $n$ ilyen.*

**Motiváció:** Definiáltuk 1 dimenziós ciklusok és Cartier divízorok metszési számát. Szeretének úgy gondolni a divízorokra, mint a ciklusok terén éetelmezett lineáris függvény, és ebből szeretnénk minél több információt kiolvasni. Ehhez azonosítanunk (és jelölnünk) kell a ciklusok terében találhatófontosabb alakzatokat.

**3.5. Definíció (Néron-Severi csoport, görbék kúpja).** *Legyen $X$ egy proper véges típusú séma. Ha a Piccard csoportot (vonalnyalábok, tenzor-szorzás,* $\mathrm{Pic}(X)$*) elosztjuk az algebrailag triviális nyalábok részcsoportjával, akkor egy végesen generált csoportot kapunk, a Néron-Severi csoportot: $NS(X)$. Ha a numerikusan triviális nyalábokkal osztunk (tehát egy kisebb, $\mathbb{Z}^k$ alakú csoportot kapunk), és az eredményt tenzor-szorozzuk $\mathbb{Q}$-val, akkor egy véges dimenziós vektor-teret kapunk: $N^1(X)$. Ennek duálisa éppen a $\mathbb{Q}$-együtthatós 1-ciklusok csoportja osztva a numerikus ekvivalenciával: $N_1(X)$. $N^1(X)_\mathbb{R}$ és $N_1(X)_\mathbb{R}$ jelöli ezeknek a vektortereknek a valós változatát, és hogy izgalmasabb legyen az élet, az emberek gyakran elhagyják az indexet, és egyformán hívják a két csoportot. Ha $C \subset X$ egy görbe, akkor $[C] \in N_1(X) \subset N_1(X)_\mathbb{R}$ jelöli az osztályát. Az ilyen osztályok által kifeszített kúp a* görbék kúpja*, jelölése $NE(X)$ illetve $NE(X)_R$ (az $E$ az effektív 1-ciklusok miatt került ide). Fontos szerepet kap még az $\overline{NE(X)_\mathbb{R}}$ lezárt (valós vektortérben vagyunk — a szokásos topológiát használjuk).*

**Megjegyzés:** A végesen generáltság 0 karakterisztikában könnyen következik az exponenciális sorozatból (hogyan?). Pozitív karakterisztikában viszont nem ismert elemi bizonyítás, abból jön ki, hogy egy Abel varietás racionális pontjai végesen generált csoportot alkotnak (próbáld visszavezetni rá: fogj nagy fokú általános helyzetű görbét, és vizsgált a Picard csoportját).

**3.6. Definíció** *Legyen $X$ egy proper véges tipusú séma. Egy $N$ divízort nef divízornak mondunk, ha $[N]$ nem–negatív lineáris függvény a görbék kúpján, $NE(X)$–en.*

**3.7. Tétel (Kleiman).** *Ha $L_1, L_2, \dots L_d$ nef divízorok egy propervéges típusú sémán, $\mathcal{F}$ pedig egy koherens kéve, akkor $(L_1 \cdot L_2 \cdots L_d \cdot \mathcal{F}) \geq 0$. Ha valamelyik $L_i \equiv 0$ akkor a metszési szám is 0.*

**A bizonyítás menete:** Először egy erősebb tulajdonságot hívunk nef–nek: $L$ nef, ha minden $d$ egészre és minden $d$–dimenziós $Y \subset X$ részsémára $L^d \cdot Y) \geq 0$. Ezzel a definícióval belátjuk a következő néhány tételt, és végül ezek segítségével kijön a fenti 3.7. Tétel — és így a két definíció ekvivalenciája is. Most lássuk a közbülső tételeket:

**3.8. Tétel** *Legyen $X$ egy $d$–dimenziós proper véges típusú séma, $\mathcal{F}$ egy koherens kéve, és $L$ egy nef vonalnyaláb. Ekkor*

$$\begin{array}{rcll} h^i(X, L^n \otimes \mathcal{F}) & = & O(n^{d-1}) & \textit{ha } i > 0, \textit{ és} \\ h^0(X, L^n \otimes \mathcal{F}) & = & \frac{(L^d \cdot \mathcal{F})}{d!} n^d + O(n^{d-1}) & \end{array}$$

**Bizonyítás:** Dévissage–t használunk, csak az $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ eset okoz problémát. Azt pedig indukcióval bizonyítjuk. A szokásos módon (egy rarionális szelés segítségével) beágyazzuk $L$-et az $X$ hányados–testjébe, ez ad két egzakt sorozatot:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{O}_X \cap L & \to & \mathcal{O}_X & \to & \{\text{kicsi}\} & \to & 0 \\ 0 & \to & \mathcal{O}_X \cap L & \to & L & \to & \{\text{másik kicsi}\} & \to & 0 \end{array}$$

A sorozatokat $L^n$–nel tenzor szorozzuk, és beccslést készítünk belőle:

$$\begin{array}{rcll} |h^i(X, L^{n+1}) - h^i(X, L^n)| & = & O(n^{d-2} & \text{ha } i \geq 2, \text{ tehát} \\ h^i(X, L^n) & = & O(n^{d-1}) & \text{ha } i \geq 2. \end{array}$$

Az Euler karakterisztikát már megbecsültük 2.5. Tétel/ 11 –ben, tehát

$$h^0(X, L^n) - h^1(X, L^n) = \frac{(L^d)}{d!} n^d + O(n^{d-1}).$$

Most két esetet különböztetünk meg. Ha $h^0(X, L^n) = 0$ minden $n$-re, akkor $h^1(X, L^n)$ is nulla, és igaz az állítás. Ha viszont $h^0(X, L^k) > 0$ valamelyik $k$–ra, akkor az ad

$$0 \to L^{n-k} \to L^n \to L^n|_{\{\text{kicsi}\}} \to 0$$

egzakt sorozatokat, tehát

$$h^1(X, L^n) - h^1(X, L^{n-k}) \leq h^1(X, L^n|_{\{\text{kicsi}\}}) = O(n^{d-1}),$$

azaz megint csak teljesül a becslésünk $h^1()$–re, és így (az Euler karakterisztika miatt) $h^0()$–ra is. □

**Megjegyzés:** [Kollár] könyvében még tovább élvezhetjük ezt a témát, és a fenti becslések maradék–tagját is megismerhetjük.

**Motiváció:** A bőségesség néha túl erős feltétel, jó lenne a tételeinket (pl. Kodaira eltünés) kiterjeszteni „majdnem bőséges” nyalábokra is. Erre jók a „nef + big” divízorok, valamint az ezekhez közel álló divízorok.

**3.9. Következmény (Kodaira–Fujita lemma).** *Legyen $X$ egy $d$ dimenziós projektív séma, rajta $H$ egy bőséges divízor. Egy $M$ nef divízort* nagynak *(angolul big) nevezünk, ha rendelkezik a következő — ekvivalens — tulajdonságokkal:*

(1) $(M^d) > 0$*;*
(2) $h^0(X, \mathcal{O}(nM)) > \textit{konstans} \cdot n^d$ *minden elég nagy $n$-re;*

(3) *$kM - H$ effektív valamilyen $k$-ra (persze ilyenkor minden elég nagy $k$ jó).*

**Bizonyítás:** Az első két feltétel ekvivalens, és következik belőlük a harmadik az 3.8. Tétel miatt. Ha a harmadik feltételből pedig következik, hogy

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(nkM)) \geq h^0(X, \mathcal{O}_X(nH)) \geq \text{konstans} \cdot n^m.$$

□

**3.7. Tétel bizonyítását** most lehet befejezni — most már a nef igazi definícióját használva. Nagyon trükkös, de nem túl bonyolult. Olvasd el akár [Kollár] könyvében, akár [Kleiman] cikkében.

**3.10. Tétel (Bőséges divízorok karakterizációi).** *Legyen $X$ egy proper séma vagy egy kompakt komplex analitikus tér, $H$ egy Cartier divízor és $L = \mathcal{O}_X(H)$ a hozzátartozó vonalnyaláb $X$-en. A következők tulajdonságok ekvivalensek:*

(1) *$L$ bőséges, azaz $L^n$ nagyon bőséges valamely pozitív $n$-re (minden elég nagy $n$-re).*
(2) **(Serre)** *Tetszőleges $\mathcal{F}$ koherens kévére van olyan pozitív $n$ (minden elég nagy $n$ ilyen), amelyre $L^n \otimes \mathcal{F}$ globálisan generált.*
(3) **(Serre)** *Tetszőleges koherens kévére, minden elég nagy pozitív $n$-re $H^1(X., L^n \otimes \mathcal{F}) = 0$.*
(4) *$L$ megszorítása $X_{red}$ minden irreducibilis komponensére bőséges.*
(5) *Legyen $f : Y \to X$ egy véges morfizmus (lásd alább: 4.7. és 4.8. Definíciók). $L$ pontosan akkor bőséges, ha $f^*L$ az.*
(6) **(Kodaira)** *Ha $X$ kompakt sokaság: $L$-en van olyan Hermithe metrika, amelynek a görbületi formája pozitív definit.*
(7) **(Nakai, Moishezon)** *Minden $Y \subseteq X$ rész–sémára*

$$(H^{\dim(Y)} \cdot\ Y) > 0$$

(8) **(Seshadri)** *Minden $p \in X$ponthoz található egy $\epsilon_p > 0$ konstans (a Seshadri-konstans) a következő jótulajdonsággal: bármely $C \subseteq X$ görbére*

$$(H \cdot C) \geq \epsilon_p \operatorname{mult}_p(C)$$

(9) **(Kleiman)** *$X$ projektív, és a $H$-val való metszési szám pozitív (lineáris) függvény a $\overline{NE(X)_R} \setminus \{0\}$ halmazon.*

**A bizonyításról:** Az első öt feltételt megtalálod [Hartshorne] könyvében. Kodaira tétele a Kodaira eltünési tétel következménye: egyszerűen belátja, hogy a teljes lineáris rendszer által indukált leképezés elválasztja egymástól a pontokat és az érintő vektorokat. (nem nehéz, próbáld megcsinálni!) Az eltünési tétel viszont komoly analízist (Hodge elmélet) használ. Teljes bizonyítást találsz pl. [Wells] könyvében. Az utolsó három feltételt [Kollár] könyvében, vagy [Kleiman] cikében találod meg.

**3.11. Következmény** *Ha $A$ bőséges és $D$ tetszőleges divízorok, akkor elég nagy $n$-re $D+nA$ is bőséges. Ha $N$ egy nef divízor, $B$ pedig olyan divízor, amelyiknek van bázispont mentes többszöröse, akkor $A+B+N$ is bőséges.*

**3.12. Következmény (Bőségesség nyílt tulajdonság).** *Legyen $f : X \to Y$ véges típusú lapos, proper morfizmus és legyen $L$ vonalnyaláb $X$–en. Jelölje $X_y$ és $L_y$ az $y$ feletti rostot, illetve az $L$ megszorítását a rostra. Azon $y$ pontok, amelyekre $L_y$ bőséges, nyílt halmazt alkotnak. Azok pedig, amelyekre $L_y$ nef, zárt halmazt alkotnak.*

**A két következmény bizonyítása könnyű**, de igazán. Próbálkozz meg vele!

**Motiváció:** A fenti tételben Serre képes egy tetszőleges koherens kévét megszelidíteni, ha egy elég bőséges divízorral elcsavarja. Gyakran szeretnénk pontosabban tudni, hogy vajon mennyire kell elcsavarnunk a kévénket, jó lenne minél többféle bőséges divízort használni. Ezt célozza Fujita a következő tételben. A bőséges divízorok osztályai egy kúpot alkotnak $N^1(X)$–ben, és ha a kúpot elég mélyen eltoljuk (a saját belsejébe), akkor az eltoltban található bármelyik divízor meg tudja szelidíteni a kévénket:

**3.13. Tétel (Fujita).** *Legyen $X$ egy pojektív séma (vagy analitikus tér), $\mathcal{F}$ egy koherens kéve rajta. Ekkor van egy olyan $A$ bőséges divízor, amelyhez tetszőleges $N$ nef divízort adva $A+N$ nagyon bőséges, $\mathcal{F}(A+N)$ globálisan generált, és $H^i(X, \mathcal{F}(A+N)) = 0$ minden pozitív $i$–re.*

**3.14. Tétel (Fujita).** *Legyen $X$ egy proper Noether séma, $L$ egy vonalnyaláb rajta. Ha az $L$ megszorítása az $|L|$ bázis-halmazára bőséges, akkor $L$ elég nagy hatványai bázispont-mentesek.*

**Megjegyzés:** Jó lenne egy használható szükséges és elégséges feltételt találni. Sajnos nem ismerek ilyet.

## 4. Normális varietások

**4.1. Definíció (Egész elemek).** *Legyenek $R \leq S$ integritási tartományok. Egy $s \in S$ elem* egész *az $R$ felett, ha kielégít egy*

$$s^n + r_1 s^{n-1} + r_2 s^{n-2} + \cdots + r_n = 0 \qquad r_1, \dots r_n \in R$$

*egyenletet. Ez ekvivalens azzal, hogy az s által generált* $R[s] \leq S$ *rész-gyűrűvégesen generált R-modulus. Világos, hogy az R elemei automatikusan egészek R felett. Az R gyűrű* egész-lezártja *az S-ben az összes S-beli egész elemek halmaza – ezek egy részgyűrűt alkotnak. Az R gyűrű* egész-zárt *az S-ben, ha megegyezik az egész-lezártjával, azaz ha nincs S-ben R-en kívüli egész elem. Egy A integritási tartomány* egész-zárt, *ha egész-zárt a saját hányados-testjében.*

**4.2. Tétel (Érékelés gyűrűk).** *Egy K test A részgyűrűjének egész-lezártja megegyezik az A-t tartalmazó K-beli értékelés-gyűrűk metszetével.*

**Bizonyíás.** Lásd: [Bourbaki], I/VI, §1, no.3, Theorem 3, vagy bizonyítás nélkül: [Hartshorne], Theorem II/4.11A.

**4.3. Tétel (Egész-lezárt végessége).** *Legyen A egy nullosztó-mentes végesen generált algebra egy k test felett. Legyen L az A hányados-testjének egy véges bővítése. Ekkor az A egész-lezártja L-ben végesen generált A-modulus, tehát szintén végesen generált k-algebra.*

**Lásd:** [Zariski-Samuel] IV. Theorem 9., de bizonyítás nélkül szerepel [Hartshorne] könyvében is: Theorem I/3.9A.

**4.4. Definíció (Normális varietások).** *Egy varietás (séma)* normális, *ha a következő – ekvivalens – feltételek teljesülnek:*

(1) *Minden pontban a lokális gyűrűje egész-zárt.*
(2) *Minden zárt pontban a lokális gyűrűje egész-zárt.*
(3) *Lefedhető affin nyílt halmazokkal, amelyek koordináta-gyűrűje egész-zárt.*
(4) *Minden affin nyílt részhalmaz koordinátagyűrűje egészzárt.*

**Lásd:** [Hartshorne] Exercise II/3.8.

**4.5. Definíció (Normális analitikus terek).** *Egy komplex analitikus tér* normális, *ha minden pontjában a holomorf fügvény-csírák lokális gyűrűje egész-zárt.*

**4.6. Tétel (Serre).** *Egy varietás (vagy Noether séma) pontosan akkor normális, ha teljesíti a következő feltételeket:*

($R_1$) *a szinguláris halmaz kodimenziója legalább 2 (vagy másként: minden 1 magasságú pontban a lokálisgyűrű reguláris),*
($S_2$) *minden 2 kodimenziós halmaz komplementerén értelmezett reguláris függvény egyértelműen kiterjed az egész varietásra (vagy másként: minden legalább 2 magasságú pontban a lokális gyűrű mélysége legalább 2).*

**Lásd:** [Matsumra] Theorem 39, vagy bizonyítás nélkül: [Hartshorne] Theorem II/8.22A.

**4.7. Definíció (Véges morfizmusok).** *Legyen $f : X \to Y$ varietások (vagy sémák) között egy morfizmus. Ha $X = \mathrm{Spec}(A)$ és $Y = \mathrm{Spec}(B)$ affinok, akkor az $f$ indukál egy $f^* : B \to A$ homomorfizmust, tehát $A$ egy $B$-algebra. Azt mondjuk, hogy $f$* véges, *vagy $X$* véges *$Y$* felett, *ha $B$ végesen generált $A$-modulus. Általános (nem feltétlenül affin) $X$ és $Y$ esetén $f$* véges, *ha kielégíti az alábbi – ekvivalens – feltételeket:*

1. *Tetszőleges $U \subset Y$ affin nyílt halmaz $f^{-1}(U)$ ősképe is affin, és véges $U$ felett.*
2. *$Y$-nak van egy $\{U_i\}$ affin nyílt fedése, melyre mindegyik $f^{-1}(U_i)$ őskép affin, és véges $U_i$ felett.*
3. *$f$ „proper”, és minden pont ősképe véges. (Lásd a Stein faktorizációt.)*

**Lásd:** [Hartshorne] Exercise II/3.4, [Hartshorne] Exercise III/11.2.

**4.8. Definíció (Analitikus véges morfizmusok).** *Legyen $f : X \to Y$ komplex analitikus terek között egy morfizmus. Ha $X$ és $Y$ Stein terek, akkor $f$ indukál egy $f^*$ homomorfizmust a rajtuk értelmezett holomorf függvények gyűrűi között. Azt mondjuk, hogy $f$* véges, *vagy $X$* véges *$Y$* felett, *ha az $X$-en értelmezett holomorf függvények gyűrűje végesen generált modulus az $Y$-on értelmezett holomorf függvények gyűrűje felett. Általános (nem feltétlenül Stein) $X$ és $Y$ esetén $f$* véges, *ha kielégíti az alábbi – ekvivalens – feltételeket:*

1. *Tetszőleges $U \subset Y$ Stein nyílt halmaz $f^{-1}(U)$ ősképe is Stein, és véges $U$ felett.*
2. *$Y$-nak van olyan $\{U_i\}$ Stein nyílt fedése, melyben mindegyik $f^{-1}(U_i)$ őskép Stein, és véges $U_i$ felett.*
3. *$f$ „proper”, és minden pont ősképe véges. (Lásd a Stein faktorizációt.)*

**4.9. Tétel (Normalizált egy $L$ testben).** *Legyen $X$ egy $k$ test feletti varietás, legyen $K(X) \leq L$ az $X$ függvénytestjének egy véges bővítése. Ekkor létezik (és egyértelmű) egy $Y$ normális $k$-varietás és egy $f : Y \to X$ véges morfizmus, amelyre az $Y$ függvénytestje éppen $L$, és $f$ éppen a megadott $K(X) \leq L$ bővítést indukálja a függvénytesteken. Az $Y$-t hívjuk az $X$* normalizáltjánal az $L$ testben*.*

**4.10. Tétel (Normalizált).** *Legyen $X$ egy varietás egy $k$ test felett. Ekkor létezik (és egyértelmű) egy $\tilde{X}$ normális $k$-varietás és egy $f$ :*

*$\tilde{X} \to X$ véges biracionális morfizmus. Ezt az $\tilde{X}$-ot az $X$* normalizáltjának *hívjuk. A normalizált rendelkezik a következő univerzális tulajdonsággal: Tetszőleges $Z$ normális varietásból minden $Z \to X$ domináns (azaz sűrű kép-halmazú) morfizmus egyértelműen faktorizálható $Z \to \tilde{X} \xrightarrow{f} X$ alakban.*

**Lásd:** [Hartshorne] Exercise II/3.8.

**4.11. Tétel (Analitikus normalizált).** *Legyen $X$ egy analitikus tér. Ekkor létezik (és egyértelmű) egy $\tilde{X}$ normális analitikus tér és egy $f : \tilde{X} \to X$ véges, generikusan 1-1 morfizmus. Ezt az $\tilde{X}$-ot az $X$* normalizáltjának *hívjuk. A normalizált rendelkezik a következő univerzális tulajdonsággal: Tetszőleges $Z$ normális analitikus térből induló minden olyan $Z \to X$ morfizmus, amelynek a képe tartalmaz nyílt halmazt, egyértelműen faktorizálható $Z \to \tilde{X} \xrightarrow{f} X$ alakban.*

**4.12. Tétel (Zariski főtétele).** *Legyen $X \to Y$ egy biracionális proper morfizmus az $X, Y$ varietások (vagy „noetherian integral schemes"), és tegyük fel, hogy $Y$ normális. Ekkor a morfizmus rostjai összefüggőek.*

**Lásd:** [Hartshorne] Corollary III/11.4. Elhagyható a Noether feltétel?

**4.13. Tétel (Stein faktorizáció).** *Legyen $f : X \to Y$ egy proper morfizmus varietások (vagy Noether sémák) között. Ekkor $f$ faktorizálható $f = g \circ h$ alakban, ahol $h : X \to Z$ rostjai összefüggőek és $g : Z \to Y$ véges. A faktorizáció egyértelmű, ha azt is megköveteljük, hogy $h_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Z$ (univerzális tulajdonság: ilyenkor lesz $Z \to Y$ a"legnagyobb").*

**Lásd:** [Hartshorne] Corollary III/11.5. Elhagyható a Noether feltétel?

## 5. Ciklusok családja

Ebben a szakaszban végig egy 0 karakterisztikájú test feleti varietásokkal dolgozunk. Minden, amit mondunk, sémákra is kimondható, de ebben az esetben semmi jelentősége sincs az általánosításnak. (A ciklusok ugyanígy definiálhatók pozitív karakterisztikában is, de testbővítések során sokkal komplikáltabban viselkednek)

## 6. Chow varietás

Ebben a szakaszban végig egy 0 karakterisztikájú test feleti varietásokkal dolgozunk. Minden, amit mondunk, sémákra is kimondható, de ebben az esetben semmi jelentősége sincs az általánosításnak.

(A ciklusok ugyanígy definiálhatók pozitív karakterisztikában is, de testbővítések során sokkal komplikáltabban viselkednek)

## Hivatkozások

[Bourbaki] N. Bourbaki, Algèbre Commutative, Elements de Math. **27, 28, 30, 31**, *Hermann*, Paris (1961-1965).

[Fujita] Ezt még meg kell keresnem.

[Hartshorne] Robin Hartshorne, Algebraic Geometry, Graduate text in Mathematics **52**, *Springer-Verlag* (1977).

[Kleiman] S. L. Kleiman, Tovards a numerical theory of ampleness, *Annals of Mathematocs* **84.** (1966), 293-344.

[Kollár] J. Kollár, Rational curves on algebraic varieties, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)* vol. 32, Springer (1996).

[Matsumra] H. Matsumura, Commutative Algebra, *W. A. Benjamin Co.* New York (1970).

[Wells] R. O. Wells, Differential Analysis on Complex Manifolds, *Prentive–Hall* (1973).

[Zariski-Samuel] Zariski, O. and Samuel, P. Commutative Algebra (vol. I, II), *Van Nostrand*, Princeton (1958, 1960).