HILBERT SÉMÁK

SZABÓ ENDRE

Kivonat. A fejezet elején a Grassmann sokasággal foglalkozunk: definiáljuk, megkonstruáljuk, kiszámítjuk az érintő-nyalábjaát. Utána ugyanezt az utat követjük a Hilbert sémára. A Laposság fejezet tartalmazza a szükséges elő-ismereteket.

11. Grassmann sokaság

A Grassmann sokaság egy véges dimenziós vektortér adott dimenziós altereit paraméterezi. Sokféle konstrukciót lehet rá adni, lássunk közűlük néhányat:

Első konstrukció. Legyen V egy n-đimenziós vektortér, és $0 \leq k \leq n$ egy egésszszám. Egy k dimenziós alteret megadhatunk egy bázisával: k lineárisan független vektorral

12. Hilbert séma, Kvóciens séma

Legyen X egy projektív varietás, szeretnénk megérteni az összes részvarietását. Persze nem elégszünk meg azzal, ha részvarietások halmazát megkapjuk – szeretnénk azt valamilyen geometriai struktúrával is. Tehát egy kicsit pontosabban: Keresünkk egy olyan H varietást, amelyiknek a pontjai egy-egy értelmű megfeleltetésben állnak az X részvarietásaival. Ha sikerül ezt megalkotni, akkor rögtön több kérdéssel is szembesülünk:

- Egyértelmű-e valamilyen geometriai értelemben a kapott H? Mi a jelentése a H geometriai struktúrájának?
- Ha adott az X részvarietásainak egy családja, akkor kapunk egy leképezést a paraméter-tér pontjainak halmazából a H pontjainak halmazába. Valyon mennyire "geometriai" ez a leképezés? (Folytonos, differenciálható, algebrai, stb...) Fordítva, ha adott egy $Y \to H$ leképezés, akkor tudunk-e ahhoz egy Y-nal paraméterezett csakádot rendelni?
- Tudunk-e "univerzális családot" konstruálni: az X részvarietásainak H-val paraméterezett családját, amelyikben H minden pontjához a neki megfelelő részvarietás tartozik?

- Milyen globális tulajdonságai vannak H-nak? (összefüggőség, kompaktság, szingularitások, kohomológia-gyűrű, stb.) Milyen következményei vannak ennek?

Ezeket a kérdéseket pontosítja – és részben meg is válaszolja – Hilbert-séma definíciója, konstrukciója, és vizsgálata. Már most világos, hogy a kérdéskör központi témája a részvarietások családja: mit nevezünk családnak, melyek a megengedett családok, milyen invariánsaik vannak, mit lehet kezdeni egy családdal? Érdemes a problémát kicsit általánosabban vizsgálni. Legyen $\mathcal{F}$ egy koherens kéve egy projektív téren. Az $\mathcal{F}$ Kvóciens sémája az $\mathcal{F}$ összes hányados-kévéjét fogja paraméterezni. Abban a speciális esetben, mikor $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ az X struktúra-kévéje, visszakapjuk a Hilbert sémát.

Családokkal már korábban is találkoztunk. Azt tapasztaltuk, hogy általában nagyon vad dolgok tötrénhetneknek, ezért meg kell határoznunk, hogy melyek a "megengedett" családok. Topológiai szemléletünk azt súgja, hogy egy "folytonos" családban a dimenzió és a fokszám lokálisan konstans, a kohomológia csoportok dimenziója félig folytonos, stb. Azt is láttuk, hogy a ezek a jótulajdonságok lényegében ekvivalensek laposssággal. Ezért minden további magyarázkodás nélkül mostantól csak lapos családokkal foglalkozunk (definíció majd jön). Érdemes megfigyelni, hogy menet közben a laposságról tanult tételek milyen csodálatos pontossággal illeszkednek majd a bizonyítás menetéhez.

Caládokkal való ismerkedésünk másik melléktermméke, hogy rá kellett döbbennünk: nem maradhatunk meg a varietások kategóriájában. Ha egy varietást elkezdünk deformálni (tehát egy görbén mozgunk a Hilbert sémában), akkor könnyedén juthatunk elfajuló deformáltakhoz: a varietásunk felbomolhat több komponensre, megjelenhetnek többszörös komponensek, és találkoztunk beágyazott pontokkal is. Ezért rákényszerülünk, hogy varietások helyett sémákkal foglalkozzunk. Ennek mélyebb oka is van: a "Hilbert-varietás" még csak nem is definiálható, a Hilbert séma igazi "csúnya" séma, csak elvétve akad egy-egy "szép" komponense. Még olyan látszólag egyszerű komponensek is lehetnek "többszörös komponensek", amelyek csupa sima tér-görbét paraméterezznek.

Fontos észrevétel, hogy az összes részvarietások tere reménytelenül nagy. Pl. a különböző fokú részvarietások a Hilbert séma különböző komponenseiben laknak (hiszen a fokszám lapos családokban lokálisan konstans), ezért végtelen sok komponensre kell számítanunk. Továbbá, lapos családokban a Hilbert-polinom is lokálisan konstans. Ezért reálisab terv adott Hilbert polinomú részvarietásokkal foglalkozni, mi is ezt tesszük. Érdemes azonban megjegyezni, hogy rögzített fokszám esetén csak véges sok Hilbert polinom jöhet szóba.

A konstrukció alapötlete egészen egyszerű. A részvarietást a homogén ideáljával adjuk meg, az ideált pedig homogén polinomokkal akarjuk generálni. Elég nagy n-re az n fokú homogén polinomok már generálják az ideált, ezért a varietást megadhatjuk az n-edfokó homogén polinomok terében egy altérrel, azaz egy Grassmann sokaságon egy ponttal. Ha az n elég nagy, akkor az altér dimenziója kiszámolható a Hilbert polinomból, tehát van rá esély, hogy az összes részvarietást ugyanazon a Grassmann sokaságon fogjuk megtalálni. Mindössze arra van szükség, hogy közös n-et találjunk nekik (Mumford regularitás).

Ezzel a módszerrel elérjük, hogy ha van egy V paraméter-térrel paraméterezett családunk, akkor a V minden pontjához hozzárendeljük ugyanannak a Gassmann sokaságnak egy pontját. Ha egy kicsit óvatosabban csináljuk, akkor az egyes alterek összeállnak a V fölötti triviális nyaláb egy rész-nyalábjává (Grauert tétele), tehát egy igazi jó (algebrai) leképezést kapunk V-ből a Grassmann sokaságunkba. A következő feladat, hogy azonosítsuk, a Grassmann sokaság melyik pontjai reprezentálnak "igazi" részvarietásokat, azaz az egyes pontokhoz tartozó ideálok mikor rendelkeznek a megfelelő Hilbert polinommal. Szerencsére megint van egy tételünk (a lapos felbontás): Felbontja a Grassmann sokaságot lokálisan zárt részek diszjunkt uniójára, és minden lapos családunk ezen részek valamelyikéből származik. Tehát a Hilbert séma a felbontás azon részeinek (diszjunkt) uniója, amelyek a megfelelő Hilbertpolinomot adják.

Ez a konstrukció ad egy kvázi-projektív sémát (a Hilbert sémát), és hozzá egy univerzális nyalábot. De van még egy tételünk a lapos családok kiterjesztéséről, ami bizonyítja, hogy a Hilbert séma (feltéve hogy létezik) kompakt. Tehát a Hilbert séma valójában projektív (azaz a fenti lapos felbontásban azok a részek, amelyeket megtartunk, mind zárt rész-sémák).

Tétel 12.1 (Mumford regularitás)**.** *Legyen $\mathcal{F}$ egy koherens kéve a $\mathbb{P}$ projektív téren (egy test fölött, az egyszerűség kedvéért), és $\mathcal{P}$ egy polinom. Ekkor van egy (csak $\mathcal{F}$-től és $\mathcal{P}$-től függő) N természetes szám a következő tulajdonsággal: Ha $\mathcal{F} \twoheadrightarrow Q$ egy olyan hányados-kéve, amelyiknek $\mathcal{P}$ a Hilbert polinomja, akkor minden $n \geq N$ indexre*

(1) $H^0\Big(\mathbb{P}, Q(n)\Big) \otimes Q \to Q(n)$ *(szorzás) szürjektív,*

(2) $H^0\Big(\mathbb{P}, Q(n)\Big) \otimes H^0\Big(\mathbb{P}, \mathcal{O}(1)\Big) \to H^0\Big(\mathbb{P}, Q(n+1)\Big)$ *(szorzás) szürjektív,*

(3) $H^i\Big(\mathbb{P}, Q(n)\Big) = 0$ *minden $i \geq 1$ kitevőre.*

Definíció 12.2 (Funktor reprezentálása).

(1) *Legyen $\mathcal{C}$ egy tetszőleges kategória, $X \in \mathcal{C}$ egy objektum. Ez meghatároz egy $\hat{X} : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ kontravariáns funktort $\mathcal{C}$-ből a halmazok kategóriájába: $\hat{X}(Z) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Z, X)$. Továbbá, ha $f : X \to Y$ egy morfizmus $\mathcal{C}$-ben, akkor az f-fel való kompozíció megad egy $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ természetes transzformációt.*

(2) *Fordítva: legyen most $\mathcal{X} : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ egy tetszőleges kontravariáns funktor $\mathcal{C}$-ből a halmazok kategóriájába. Azt mondjuk hogy $\mathcal{X}$ egy* reprezentálható funktor, *ha létezik olyan $X \in \mathcal{C}$ objektum, amelyikhez tartozó $\hat{X}$ funktor természetesen izomorf $\mathcal{X}$-szel. Ilyen esetben azt mondjuk, hogy ez az X objektum* reprezentálja *az $\mathcal{X}$ funktort.*

(3) *Ha az $X \in \mathcal{C}$ objektum reprezentálja az $\mathcal{X}$ funktort, akkor az $\mathrm{Id}_X : X \to X$ identitás leképezéshez tartozó $U \in \mathcal{X}(X)$ elemet* univerzális elemnek *(vagy gyakran* univerzális családnak*) hívjuk. Az elnevezés oka: ha $Z \in \mathcal{C}$ egy objektum és $z \in \mathcal{X}(Z)$ egy tetszőleges elem, akkor létezik egyetlen olyan $f : Z \to X$ morfizmus $\mathcal{C}$-ben, amelyikre $z = \mathcal{X}(f)(U)$.*

Lemma 12.3 (Yoneda lemma). *Legyen $\mathcal{C}$ egy kategória, $\mathcal{X} : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ egy reprezentálható funktor, és legyenek $X, Y \in \mathcal{C}$ olyan objektumok, amelyek reprezentálják $\mathcal{X}$-et. Ekkor X és Y izomorfak. Még pontosabban: ha $\phi : \hat{X} \to \mathcal{X}$ és $\psi : \hat{Y} \to \mathcal{X}$ természetes izomorfizmusok, akkor létezik egyetlen olyan $f : X \to Y$ izomorfizmus, amelyikkel $\hat{f} = \psi^{-1} \circ \phi$.*

A bizonyítás triviális, legyen házi feladat.

Definíció 12.4 (Rész-sémák lapos családja). *Legyen X egy projektív séma (egy test fölött, az egyszerűség kedvéért). Tetszőleges Z séma esetén a $Z \times X$ olyan rész-sémáját, amelyik lapos Z felett,* részsémák Z-vel paraméterezett lapos családjának *nevezzük.*

Definíció 12.5 (Hilbert funktor). *Legyen X egy projektív séma (egy test fölött, az egyszerűség kedvéért), és $\mathcal{P}$ egy polinom. A* Hilbert funktor *egy kontravariáns funktor $\mathcal{H}ilb_{\mathcal{P}}(\mathcal{F}) : \mathrm{Schm} \to \mathrm{Set}$ a sémák kategóriájából a halmazok kategóriájába, amit így definiálunk:*

$$\mathcal{H}ilb_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})(Z) = \left\{ \begin{array}{l} \textit{Az } X \textit{ rész-sémáinak olyan } Z\textit{-vel para-} \\ \textit{méterezett családjai, amelyeknek min-} \\ \textit{den } z \in Z \textit{ pontban } \mathcal{P} \textit{ a Hilbert poli-} \\ \textit{nomja} \end{array} \right\}$$

Tétel 12.6 (Hilbert séma). *Legyen $\mathcal{F}$ egy koherens kéve a $\mathbb{P}$ projektív téren (egy test fölött, az egyszerűség kedvéért), és $\mathcal{P}$ egy polinom. A Hilbert funktor $\mathcal{H}ilb_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})$ reprezentálható egy $\mathrm{Hilb}_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})$ projektív sémával,* *ezt hívjuk* Hilbert sémának. *Az ehhez tartozó*

$$\mathrm{Univ}_{\mathcal{P}}(X) \subseteq \mathrm{Hilb}_{\mathcal{P}}(X) \times X$$

univerzális elemet univerzális részsémának *vagy egyszerűen* univerzális családnak *nevezzük.* $\mathrm{Hilb}(X)$ *jelöli az összes* $\mathrm{Hilb}_{\mathcal{P}}(X)$ *diszjunkt unióját, ezt is* Hilbert sémának *nevezzük. Ha* $Y \subseteq X$ *egy részvarietás* $\mathcal{P}$ *Hilbert polinommal, akkor* $[Y] \in \mathrm{Hilb}_{\mathcal{P}}(X)$ *illetve* $[Y] \in \mathrm{Hilb}(X)$ *jelöli az őt reprezentáló pontokat.*

Bizonyítás: A tétel közvetlenül következik az általánosabb, Kvóciens sémáról szóló tételből. (Persze közvetlenül is belátható, ugyanazzal a gondolatmenettel.) □

Definíció 12.7 (Hányados kévék lapos családja)**.** *Legyen* $\mathcal{F}$ *egy koherens kéve a* $\mathbb{P}$ *projektív téren (egy test fölött, az egyszerűség kedvéért). Legyen* Z *tetszőleges séma, és legyen* $\mathcal{F}_Z = \pi^*\mathcal{F}$*, ahol* $\pi : Z \times \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ *jelöli a vetítést a szorzat második komponensére. Az* $\mathcal{F}_Z$ *olyan koherens hányados-kévéjét, amelyik lapos* Z *fölött,* hányados-kévék Z-vel paraméterezett lapos családjának *nevezzük.*

Definíció 12.8 (Kvóciens funktor)**.** *Legyen* $\mathcal{F}$ *egy koherens kéve a* $\mathbb{P}$ *projektív téren (egy test fölött, az egyszerűség kedvéért), és* $\mathcal{P}$ *egy polinom. A* Kvóciens funktor *egy kontravariáns funktor* $\mathcal{Q}uot_{\mathcal{P}}(\mathcal{F}) :$ $\mathrm{Schm} \to \mathrm{Set}$ *a sémák kategóriájából a halmazok kategóriájába, amit így definiálunk:*

$$\mathcal{Q}uot_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})(Z) = \left\{ \begin{array}{l} \textit{Az } \mathcal{F} \textit{ hányados-kévéinek olyan } Z\textit{-vel} \\ \textit{paraméterezett családjai, amelyeknek} \\ \textit{minden } z \in Z \textit{ pontban } \mathcal{P} \textit{ a Hilbert po-} \\ \textit{linomja} \end{array} \right\}$$

Tétel 12.9 (Kvóciens séma)**.** *Legyen* $\mathcal{F}$ *egy koherens kéve a* $\mathbb{P}$ *projektív téren (egy test fölött, az egyszerűség kedvéért), és* $\mathcal{P}$ *egy polinom. A Kvóciens séma* $\mathcal{Q}uot_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})$ *reprezentálható egy* $\mathrm{Quot}_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})$ *projektív sémával, ezt hívjuk* Kvóciens sémának. *Az ehhez tartozó*

$$\mathcal{F}_{\mathrm{Quot}_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})} \twoheadrightarrow \mathrm{Univ}_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})$$

univerzális elemet (ezek koherens kévék a $\mathrm{Quot}_{\mathcal{P}}(\mathcal{F}) \times \mathbb{P}$ *sémán, laposak* $\mathrm{Quot}_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})$ *fölött)* univerzális hányados kévének *vagy egyszerűen* univerzális családnak *nevezzük.* $\mathrm{Quot}(X)$ *jelöli az összes* $\mathrm{Quot}_{\mathcal{P}}(X)$ *diszjunkt unióját, ezt is* Kvóciens sémának *nevezzük. Ha* $\mathcal{F} \twoheadrightarrow Q$ *egy hányados-kéve* $\mathcal{P}$ *Hilbert polinommal, akkor* $[Q] \in \mathrm{Quot}_{\mathcal{P}}(X)$ *illetve* $[Q] \in \mathrm{Quot}(X)$ *jelöli az őt reprezentáló pontokat.*

Megjegyzés. A tételt egy rörzített test feletti sémákra mondtuk ki, de ugyanez az állítás érvényes pl. egy rögzített gyűrű felett definiált sémák kategóriájában is – a kapott kvóciens séma ekkor szintén az adott gyűrű felett definiált séma lesz. Ez igen fontos lehet számelméleti kérdések vizsgálatánál, valamint olyan esetekben, amikor többféle alap-testtel kell egyszerre dolgoznunk. A bizonyításban az alap-testnek semmi jelentősége sincs, minden lépés ugyanúgy érvényes az általános esetben is – azonban a jelölések kissé komplikáltabbá válnak. Már így és éppen elég új fogalommal kel megküzdenünk, azért most megelégszünk a test feletti Kvóciens sémákkal.

Bizonyítás. Először is bevezetünk egy egyszerűsítő jelölést. Gyakran szeretnénk koherens kévék egy családjának minden tagját az $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)$ egyenes nyalábbal tenzor-szorozni (n tetszőleges egészszám). Tehát ha $f : X \to \mathbb{P}$ egy morfizmus, és adott Y-on egy koherens kéve – mondjuk K –, akkor $K(n)$ fogja jelölni a $K(n) = K \otimes f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)$ koherens kévét.

Ha $K_0 \leq \mathcal{F}$ egy koherens rész-kéve, akkor a Hilbert polinomja megegyezik az $\mathcal{F}$ és az $\mathcal{F}/K_0$ kévék Hilbert polinomja különbségével. Ezért Mumford regularitás tétele (12.1. Tétel) ad nekünk egy csak $\mathcal{F}$-től és $\mathcal{P}$-tól függő N, κ számokat a következő tulajdonságokkal: Ha egy $Q_0 = \mathcal{F}/K_0$ koherens hányados-kévének $\mathcal{P}$ a Hilbert polinomja, akkor

(1) $\dim H^0(\mathbb{P}, K_0(N)) = \kappa$
(2) A $H^0(\mathbb{P}, K_0(N)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \to K_0(N)$ természetes homomorfizmus szürjektív,
(3) A $H^0(\mathbb{P}, K^0(N)) \leq H^0(\mathbb{P}, \mathcal{F}(N))$ altér egyértelműen meghatározza a $K_0 \leq \mathcal{F}$ koherens rész-kévét.

Az utolsó tulajdonság a többiből következik: K_0 megegyezik a

$$H^0(\mathbb{P}, K_0(N)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-N) \leq H^0(\mathbb{P}, \mathcal{F}(N)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-N)$$

rész-kéve képével a $H^0(\mathbb{P}, \mathcal{F}(N)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-N) \to \mathcal{F}$ természetes homomorfizmus mentén. A Kvóviens sémát a

$$\mathrm{Grass} = \mathrm{Grass}\Big(\kappa, H^0(\mathbb{P}, \mathcal{F}(N))\Big)$$

Grassmann sokaság zárt rész-sémájaként fogjuk megkonstruálni.

Legyen X egy tetszőleges séma az alap-test fölött, jelöle $\pi : X \times \mathbb{P} \to X$ az első projekciót. Legyen Q az $\mathcal{F}$ hányados-kévéinek egy $\mathcal{P}$ Hilbert polinomú X-vel paraméterezett családja. A definíció szerint tehát a $X \times \mathbb{P}$ sémán van koherens kévéknek egy

$$0 \to K \to \mathcal{F}_X \to Q \to 0$$

egzakt sorozata, 6.2(6) miatt minden tag lapos X felett. Minden $x \in X$ pontra jelölje K_x és Q_x a K és Q kévék megszorításait a $\pi^{-1}(x) = \{x\} \times \mathbb{P}$ rostra. Ezek tehát koherens kévék $\mathbb{P}$-n, Q_x Hilbert polinomja $\mathcal{P}$, és van egy $0 \to K_x \to \mathcal{F} \to Q_x \to 0$ egzakt sorozatunk. Ezért a $H^0(\mathbb{P}, K_x(N))$ vektortér dimenziója minden x pontban

κ. Grauert tétele (9.6. Tétel) miatt $\pi_* K(N)$ egy vektornyaláb. Másrészt $\mathcal{F}_X = \pi^* \mathcal{F}$, tehát $\pi_* \mathcal{F}_X = H^0(\mathbb{P}, \mathcal{F}(N)) \otimes \mathcal{O}_X$ egy triviális nyaláb, és $\pi_* K(N)$ egy κ rangú résznyaláb. A Grassmann sokaság definíciója miatt tehát $\pi_* K(N)$ megegyezik az univerzális résznyaláb visszahúzottjával egy (egyértelműen meghatározott)

$$f_Q : X \to \text{Grass}$$

leképezés mentén. Ideje hát megérteni az univerzális résznyalábot. Jelölje $\rho : \text{Grass} \times \mathbb{P} \to \text{Grass}$ a direkt szorzat első projekcióját, és legyen $\mathcal{F}_{\text{Grass}}$ (mint a 12.7. Definícióban) az $\mathcal{F}$ kéve visszahúzottja a $\text{Grass} \times \mathbb{P}$ direkt szorzatra. Ekkor $\rho_* \Big(\mathcal{F}_{\text{Grass}}(N) \Big)$ egy triviális nyaláb Grass fölött, a rostjai természetesen azonosíthatók a $H^0(\mathbb{P}, \mathcal{F}(N))$ vektortérrel. Ezért a Grassmann sokaság univerzális résznyalábja egy

$$U \leq \rho^* \rho_* \Big(\mathcal{F}_{\text{Grass}}(N) \Big)$$

résznyaláb. Másrészt a természetes

$$\rho^* \rho_* \Big(\mathcal{F}_{\text{Grass}}(N) \Big) \otimes \mathcal{O}_{\text{Grass} \times \mathbb{P}} \xrightarrow{\phi} \mathcal{F}_{\text{Grass}}(N)$$

leképezés segítségével készíthetünk

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_U &= \phi(U)(-N) \leq \mathcal{F}_{\text{Grass}} \\ \mathcal{Q}_U &= \mathcal{F}_{\text{Grass}} / K_U \end{aligned}$$

kévéket. A fenti f_Q leképezés segítségével természzees módon azonosíthatjuk az $\mathcal{F}_X$ kévét az $f_Q^* \mathcal{F}_{\text{Grass}}$ kévével, és a konstrukció alapján készíthetünk egy diagrammot egzakt sorokkal

$$\begin{array}{ccccccccc} & & f_Q^* \mathcal{K}_U & \to & f_Q^* \mathcal{F}_{\text{Grass}} & \to & f_Q^* \mathcal{Q}_U & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\ 0 & \to & K & \to & \mathcal{F}_X & \to & Q & \to & 0 \end{array}$$

Tehát az eljárás megfordítható: tetszőleges X' séma és $f' : X' \to \text{Grass}$ morfizmus esetén legyen K' az $f'^* \mathcal{K}_U \to f'^* \mathcal{F}_{\text{Grass}} = \mathcal{F}_{X'}$ homomorfizmus képe, és legyen $Q' = \mathcal{F}_{X'} / K'$. A fenti diagram mutatja, hogy X-ből, és f_Q-ból kiindulva éppen az eredeti K és Q családokat kapjuk vissza. Ennek a konstrukciónak azonban van két súlyos fogyatékossága. Az egyik az, hogy a kapott Q' kéve általában nem lesz lapos. A másik, hogy még ha véletlenül lapos is, akkor sem lesz feltétlenül $\mathcal{P}$ a Hilbert polinomja. Ezeket a problémákat úgy oldjuk meg, hogy a Grass sokaságon belül megkeressük a legszűkebb olyan rész-sémát, amelyik tartalmazza az összes f_Q leképezés képét. Szerencsére éppen erről szól a Lapos felbontás: A 10.4. Tétel ad egy $g : Z \to \text{Grass}$ morfizmust és a hozzá tartozó $G = g \times \text{Id} : Z \times \mathbb{P} \to \text{Grass} \times \mathbb{P}$ morfizmust, amelyik univerzális arra a tulajdonságra nézve, hogy $G^*\mathcal{Q}_U$ lapos Z felett. Legyen tehát $\mathrm{Quot}_{\mathcal{P}}(\mathcal{F}) \subseteq Z$ azon komponensek egyesítése, amelyeken a $G^*\mathcal{Q}_U$ kéve Hilbert polinomja $\mathcal{P}$. Ez valóban reprezentálja a $\mathcal{Q}uot_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})$ funktort, az univerzális hányados kéve éppen $\mathrm{Univ}_{\mathcal{P}}(\mathcal{F}) = G^*\mathcal{Q}_U$ lesz.

A fenti konstrukcióban Z lokálisan zárt részhalmaz egy Grassmann sokaságban, tehát kvázi-projektív. Ezért $\mathrm{Quot}_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})$ is kvázi-projektív, be kell még látnunk, hogy valójában projektív. Ehhez már nem a konstrukciót használjuk, hanem közvetlenül a reprezentált funktor tulajdonságaiból következtetünk. Ehhez elég belátni, hogy $\mathrm{Quot}_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})$ "proper" (ez a kompakt Hausdorff tér algebrai megfelelője), azaz be kell látnunk: Ha Y egy sima göbe és $p \in Y$ egy pont, akkor minden $f : Y \setminus \{p\} \to \mathrm{Quot}_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})$ morfizmusnak létezik pontosan egy kiterjesztése az egész Y-ra. A Kvóciens séma definíciója segítségével ezt lefordíthatjuk egy családokról szóló állításra: Az $\mathcal{F}$ kéve hányadosainak minden $Y \setminus \{p\}$-vel paraméterezett lapos családja egyértelműen kiterjeszthető egy egész Y-nal paraméterezett lapos családdá. A Lapos kiterjesztés (9.3. Tétel) éppen ezt modja ki. Tehát $\mathrm{Quot}_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})$ valóban projektív. □

Tétel 12.10 (Morfizmusok tere)**.** *Legyenek X, Y projektív sémák (az egyszerűség kedvéért egy test felett). Ekkor létezik egy* $\mathrm{Hom}(X,Y) \subset \mathrm{Hilb}(X \times Y$ *nyilt rész-séma, amelyik az $X \to Y$ morfizmusokat paraméterezi. Pontosan fogalmazva:* $\mathrm{Hom}(X,Y)$ *következő funktort reprezentálja:*

$$Z \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \textit{Z felett relatív } Z \times X \to Z \times Y \textit{ morfizmusok,} \\ \textit{tehát olyan morfizmusok, amelyek a } Z \times Y \to Z \\ \textit{projekcióval komponálve éppen az } ZimesX \to Z \\ \textit{projekciót adják.} \end{array} \right\}$$

Bizonyítás. Egy $\gamma : X \to Y$ morfizmust a $\Gamma \subset X \times Y$ gráfjával reprezentálunk. Ez azért lehetséges, mert az a tulajdonság, hogy Γ egy morfizmus gráfja, azaz hogy az $X \times Y \to X$ projekció Γ-ra megszorítva izomorfizmus, egy nyílt tulajdonság $\mathrm{Hilb}(X \times Y$-ban. □

Következmény 12.11. *Legyen X egy projektív varietás egy test fölött. Az automorfizmusai egy* $\mathrm{Aut}(X) \subset \mathrm{Hom}(X,X)$ *nyílt rész-séma paraméterezi. A kompozíció és az inverz műveletek egy* $\mathrm{Aut}(X) \times \mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Aut}(X)$ *illetve egy* $\mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Aut}(X)$ *morfizmussal adhatók meg. Az ilyen objektumokat algebrai csoportoknak (vagy csoport-sémának) nevezzük. Speciálisan: ha test a komplex számtest, akkor* $\mathrm{Aut}(X)$ *egy komplex Lie csoport. Pozitív karakterisztikában elófordulhat, hogy* $\mathrm{Aut}(X)$ *nem redukált!*

Tények 12.12.

(1) *(Chow): Rögzített n és d egészekre a d fokó n dimenziós projektív varietások Hilbert polinomjai véges sokan vannak. Tehát a Hilbert sémának is csak véges sok olyan komponense van, ami d fokú rész-sémákat paraméterez.*
(2) *(Hartshorne): Egy* $\mathbb{P}$ *projektív tér* $\mathrm{Hilb}_{\mathcal{P}}(\mathbb{P})$ *hilbert sémái összefüggőek minden* $\mathcal{P}$ *polinomra.*
(3) *Egy* X *varietás pontjait saját maga paraméterezi:* $\mathrm{Hilb}_1(X) \simeq X$.
(4) *Ha* C *egy sima görbe, akkor az* n*-edik szimmetrikus hatványa egy sima* n*-dimenziós varietás, az paraméterezi a pont* n*-eseket:* $\mathrm{Hilb}_n(C) \simeq C^{(n)}$.
(5) *Ha* X *sima varietás, akkor* $\mathrm{Hilb}_2(X)$ *paraméterezi a pont-párokat. Ezt úgy konstruálhatjuk meg, hogy* $X \times X$*-ben felfújjuk az átlót, és a kapott sima varietást leosztjuk azzal a csoporthatással, amelyik a pontpár tagjeit felcseréli.*
(6) *Ha* X *sima felület, akkor a pont* d*-eseket paraméterező* $\mathrm{Hilb}_d(X)$ *szintén sima varietás.*
(7) *Az előző két kélda kivételes eset: ha* X *legalább három dimenzimenziós, és* $d \geq 3$ *akkor a pont* d*-eseket paraméterező* $\mathrm{Hilb}_d(X)$ *nem ilyen száp. Még a komponenseinek a száma sem ismert, a dimenziójukról nem is beszélve.*
(8) *(Mumford):* $\mathbb{P}^3$*-ban van olyan sima görbe, amelyik a Hilbert sémában egy nem redukált komponensen él. Például: legyen* $X \subset \mathbb{P}^3$ *egy sima harmadfokú felulet,* H *egy hipersík metszete* X*-szel és* $L \subset X$ *egy egyenes (tehát* H, L *divízorok* X*-en), és válasszunk olyan* $C \subset X$ *görbét, amelyik lineárisan ekvivalens (*X*-en)* $4H + 2L$*-lel.*
(9) *Szinte bármilyen csúnya jelenség megtörténhet a Hilbert sémákon.*
(10) $\mathbb{P}^n$ *d fokú hiperfelületeit d fokú homogén polinomokkal adhatjuk meg. Tehát a Hilbert séma megfelelő komponense egy projektív tér. Csak azt kell belátni, hogy az univerzális hipersík egy lapos család, ez következik például a laposság lokális kritériumából: 8.1. Tétel.*
(11) $\mathbb{P}^n$*-ben a teljes metszet varietásokat homogén egyenletekkel adjuk meg. Ha az egyenletek egyforma fokúak, akkor a varietás csak az egyenletek által kifeszített altértől függ, tehát az ilyen varietásokat paraméterező Hilbert séma egy Grassmann sokaság. A laposság megint a 8.1. Tételből következik.*
(12) $\mathbb{P}^n$*-en két kodimenziós teljes metszet varietásokat az* e, f *homogén egyenlettel adjuk meg. Tegyük fel, hogy* $\deg(e) < \deg(f)$*. A varietás (konstans szorzó erejéig) egyértelműen meghatározza*

e -t, f -hez azonban hozzáadhatjuk az e tetszőleges polinom-szorosát. Ezért a lehetséges e egyenleteket egy projektív tér paraméterezi, és rögzített e esetén a lehetséges f-eket egy (e-től függő) Grassmann sokaság. Tehát a Hilbert séma megfelelő komponense egy Grassmann-sokaság nyaláb egy projektív tér felett. Megint csak a laposságot kell belátni, az megint a 8.1. Tétel következménye.

(13) *$\mathbb{P}^n$-en a $(d_1, d_2, \ldots d_k)$ multi-fokú teljes metszetek a Hilbert sémának egy sima komponensét alkotják. Ezt a komponenst iterációval tudjuk felépíteni: egy Grassmann sokaságból indulunk ki, és minden lépésben az előzőleg megkonstruált varietásra egy Grassmann sokaság nyalábot építünk.*

13. Deformáció elmélet

Tétel 13.1 (Érintő tér). *Legyen $\mathcal{F}$ egy koherens kéve a $\mathbb{P}$ projektív téren (egy test fölött, az egyszerűség kedvéért), és legyen $Q = \mathcal{F}/K$ egy hányador-kéve. A Kvóciens séma Zariski érintőtere a $[Q]$ pontban:*

$$T_{[Q]}\,\mathrm{Quot}(\mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(K, Q)$$

Ez az izomorfizmus egy természetes izomorfizmus minden változóban.

Bizonyítás: Nemsokára lezs egy tételünk a deformáció elméletről, annak a mostani tételünk egyszerű speciális esete. érdemes külön bizonyítani, mert sokkal egyszerűbb, mint az általános eredmény. Tekintsük az $A = k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ algebrát, legyen $\mathbb{P}^A = \mathbb{P} \times \mathrm{Spec}(A)$ az A feletti projektív tér és $\mathcal{F}^A = \mathcal{F} \otimes_k A$ koherens kéve rajta. A Kvóciens séma egy érintővektora azonosítható egy Spec(A)-ból Quot($\mathcal{F}$)-be menő morfizmussal, azaz egy $0 \to K^A \to \mathcal{F}^A \to Q^A \to 0$ egzakt sorozattal, ahol K^A és Q^A laposak A felett. A laposság miatt az ϵ-nal való szorzás injektív, tehát $0 \to \epsilon Q \to Q^A \to Q$ egy rövid egzakt sorozat. A következő diagramm felső sora már adott:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & K & \to & \mathcal{F} & \to & Q & \to & 0 \\ & & \phi\downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & \epsilon Q & \to & Q^A & \to & Q & \to & 0 \end{array}$$

Tehát az alsó sorból (azaz Q^A-ból) megkaphatjuk ϕ-t, és viszont, ϕ-ből ("push-out" segítségével) megkonstruálhatjuk az alsó sort (tehát Q^A-t). □

Egy k test fölött definiált objektumok infizitezimális deformációit szeretnénk vizsgálni. (Az objektum lehet varietás, séma, koherens kéve, leképezés, vagy akármi más.) Ezt úgy szeretnénk elérni, hogy választunk egy (B, M_b) lokális gyűrűt, amelyiknek k a maradéktestje, és az objektumunk definiáló egyenleteiben a k-beli paramétereket kicseréljük B-beliekre. Menet közben kiderül, hogy vigyáznunk kell az egyenletek között fennálló relációkra is. A relációk megőrzése pedig ekvivalens a kapott deformáció laposságával (B fölött, ezt is fogjuk látni). Persze nem könnyű egyből a kíván lokális gyűrűre áttérni ehelyett lépésenként haladunk, az együtthatók Taylor-sorának egyre újabb és újabb tagjait fogjuk meghatározni. Tehát legyen $J \triangleleft B$ az az ideál, amelyik a Taylor-sorok utolso tagjaiból áll (azaz $Jm_B = 0$), és legyen $A = B/J$. Azt vizsgáljuk, hogy egy A felett már elkészített deformáziót hogyan lehet B fölé kiterjeszteni (azaz A-beli együtthatókat akarjuk lecserélni B-beliekre. Jelölésben az A és B kitevők mindig arra utalnak, hogy az illető objektumot A illetve B fölött definiáltuk. A következő szakasz összefoglalja a szükséges jelöléseket:

Jelölés.

(1) k egy test, $(A, m_A$ és (B, m_B) lokális Noether gyűrűk, maradéktestjük $A/m_A = B/m_B = k$. Feltesszük, hogy B az A bővítése egy olyan $J \triangleleft B$ ideállal, amelyikre $m_B J = 0$ (tehát J egy k-vektortér):

$$0 \to J \to B \to A \to 0 \qquad m_B J = 0$$

(2) U egy (Zariski) nyílt halmaz egy tér k feletti projektív térben, $U^A = U \times \mathrm{Spec}(A)$ és $U^B = U \times \mathrm{Spec}(B)$. $\mathcal{F}^B$ koherens kéve U^B felett, lapos B felett, $\mathcal{F}^A = \mathcal{F}^B \otimes_B A$ és $\mathcal{F} = \mathcal{F}^B \otimes_B k$ jelöli $\mathcal{F}^B$ megszorítását U^A-ra illetve U-ra.

(3) $K^A \leq \mathcal{F}^A$ olyan koherens részkéve, amelyikre $Q^A = \mathcal{F}^A/K^A$ lapos A fölött. $K = K^A \otimes_A k \leq \mathcal{F}$ és $Q = \mathcal{Q}^A \otimes_A k = \mathcal{F}/K$ jelöli a megszorításukat U-ra.

(4) Keresünk olyan $K^B \leq \mathcal{F}^B$ részmodulust, amelyiknek a megszorítása U^A-ra éppen $K^B \otimes_B A = K^A$, és amelyikre $Q^B = \mathcal{F}^B/K^B$ lapos B fölött.

(5) Szükség van különböző gyűrű-bővítések összehasonlítására. Legyen hát

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & J & \to & B & \to & A & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle h}\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\ 0 & \to & J' & \to & B' & \to & A' & \to & 0 \end{array}$$

gyűrű-bővítések közti homomorfizmus, ahol A' és B' is Noether lokális gyűrűk, a maradéktestjük szintén k, és $m_B J' = 0$. Tehát $h : J \to J'$ egy k-vektortér-homomorfizmus.

(6) Egyszerű tenzor-szorzattal értelmezzük az objektumaink kiterjesztését A'-re illetve B'-re. Tehát $\mathcal{F}^{B'} = \mathcal{F}^{B} \otimes_B B'$, $\mathcal{F}^{A'} = \mathcal{F}^{A} \otimes_A A'$, $K^{A'} = K^{A} \otimes_A A'$ és $Q^{A'} = Q^{A} \otimes_A A'$.

Tétel 13.2 (Obstrukció)**.**

(1) *Jelölés mint fent. Van egy jól definiált* obstrukció osztály *(a pontos definíció később jön):*

$$[E^B(Q^A)] \in \mathrm{Ext}^1_U(K, Q \otimes J) = \mathrm{Ext}^1_U(K, Q) \otimes J$$

azzal a tulajdonsággal, hogy pontosan akkor létezik a fenti $Q^B = \mathcal{F}^B/K^B$ lapos kiterjesztés, ha az obstrukció 0.

(2) *Amennyiben létezik Q^B kiterjesztés, akkor az összes kiterjesztések halmaza természetesen izomorf egy principális homogén térrel a*

$$\mathrm{Hom}_U(K, Q \otimes J) = \mathrm{Hom}_U(K, Q) \otimes J$$

csoport fölött.

(3) *Az (1)-beli obstrukció osztály, valamint a (2)-beli természetes izomorfizmus funktoriálisan függ a gyűrű-bővítéstől: Ha adott egy gyűbővítések közti homomorfizmus (lásd fent), akkor h indukál egy $\mathrm{Id} \otimes h : \mathrm{Ext}^1_U(K, Q) \otimes J \to \mathrm{Ext}^1_U(K, Q) \otimes J'$ homomorfizmust. Ennek segítségével felírható:*

$$[E^{B'}(Q^{A'})] = (\mathrm{Id} \otimes h)\Big([E^B(Q^A)]\Big)$$

Ezért a $h \to [E^{B'}(Q^{A'})]$ leképezés k-lineáris.

(4) *Az (1)-beli obstrukció osztály, valamint a (2)-beli természetes izomorfizmus funktoriálisan függ az U nyílt halmaztól.*

Megjegyzés. Ennek a tételnek speciális esete az előző, érintő térről szóló tétel. Valóban, a $[Q]$ pontbeli érintővektorokat azonosítottuk a Q kéve $k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ felett definiált lapos deformációival. Tehát ebben a helyzettben $A = k$ és $B = k[\epsilon]/(\epsilon^2)$. Az általános esettel ellentétben ilyenkor a gyűrű-bővítés felhasad: $B = k \oplus \epsilon k$, tehát mindig létezik a $Q^B = Q \oplus \epsilon Q$ triviális deformáció (tehát az, amikor a Q elsőrendben nem változik – ez a 0 érintővektor). Ezért az általános tételben most (1) miatt az obstrukció 0, tehát (2) írja le az érintő-teret. Mivel – az általános esettel ellentétben – van egy kitöntetett érintő vektorunk is (0 vektor = triviális deformáció), azért a principális homogén tér helyett most igazi vektorteret kapunk.

Bizonyítás: Koherens kévéket és bővítéseiket lehet ragasztással konstruálni. Ezért tehát mind a K^B, Q^B modulusokat, mind pedig az $[E^B(Q^A)]$ obstrukció osztályt elég az U egy nyílt fedésén megkonstruálni, azok (4) miatt automatikusan összeragadnak az egész U fölött definiált objektumokká. Tehát elegendő azzal az esettel foglalkozni, amikor az U egy affin nyílt halmaz, így a koherens kévéink valójában modulusok az U koordináta-gyűrűje felett. Jelölje S, S^A és S^B az U, U^A illetve U^B affin varietások koordináta-gyűrűjét. Választunk egy

$$R \xrightarrow{r} G \xrightarrow{g} K \to 0$$

prezentációt (egzakt sorozat, R és G szabad modulus S fölött).

Lemma 13.3. *Léteznek S^A fölött R^A és G^A szabad modulusok és egy egzakt sorozat*

$$R^A \xrightarrow{r^A} G^A \xrightarrow{g^A} K^A \to 0$$

amelynek U-ra való megszorítása éppen az adott $R \xrightarrow{r} G \xrightarrow{g} K \to 0$.

A Lemma bizonyítása könnyű, legyen házi feladat. □

Tétel bizonyítás folytatása. Világos, hogy választhatunk R^B, G^B szabad modulusokat, és egy

$$R^B \xrightarrow{r^B} G^B \xrightarrow{g^B} K^B \leq \mathcal{F}^B \qquad \text{(nem egzakt!!!)}$$

homomorfizmusokat (itt K^B jelöli a g^B képét), amelyek megszorítása U^A-re éppen r^A és g^A. Mivel $g^A \circ r^A = 0$, azért $g^B \circ r^B$ képe $J\mathcal{F}^B \simeq \mathcal{F} \otimes J$-ben lakik. Ezért a magja tartalmazza az egész $m_B R^B$-t, tehát kapunk egy

$$e(g^B) : R \xrightarrow{g^B \circ r^B} \mathcal{F} \otimes J \to Q \otimes J$$

homomorfizmust. Könnyen látható, hogy $e(g^B)$ nemm függ r^B választásától (írjuk $r^B + \psi^B$ alakban, és számoljunk). Legyen

$$E(g^B) = \operatorname{coker}\left[R \xrightarrow{e(g^B)+r} (Q \otimes J) \oplus G\right] .$$

Világos, hogy ez felírható egy

$$E^B(Q^A) \quad : \qquad 0 \to Q \otimes J \to E(g^B) \otimes K \to 0$$

bővítésként (egyenlőre függ g^B választásától), ez lesz majd a keresett obstrukció osztály. (A $Q \otimes J \to E(g^B)$ injektivitását ki kell számolni.) Könyen látható, hogy különböző g^B felemelések izomorf bővítéseket adnak (írjuk $g^B + \phi^B$ alakban, és számoljunk). Tehát a bővítés osztálya $\operatorname{Ext}^1_U(K, Q \otimes J)$-ben független az r^B, g^B választásától, csak az A feletti adatoktól függ.

Lemma 13.4. *A következők ekvivalensek:*

(1) Q^B *lapos* B *fölött,*
(2) $e(g^B) = 0$,
(3) $g^B \circ r^B = 0$ *valamilyen* r^B *választása mellett.*

Bizonyítás. Az $e(g^B)$ leképezés definíciójából azonnal következik, hogy (2)$\Leftrightarrow$(3). Ha Q^B lapos B fölött akkor K^B is lapos, tehát $R^B \to G^B \to K^B \to 0$ sorozat egzaktsága ekvivalens a B/m_B-vel való tenzor-szorzat egzaktságával. Ez utóbbi viszont egzakt, tehát (1)$\Rightarrow$(3). Fordítva, (3)$\Rightarrow$(1) a Laposság lokális kritériumából következik, 8.2. mintájára bizonyítható. □

Lemma 13.5. *Valamilyen g^B választással Q^B lapossá tehető pontosan akkor, ha $[E^B(Q^A)] = 0$. Ilyenkor a (triviális) $E^B(Q^A)$ bővítés felhasításainak halmaza természetesen izomorf a $\mathrm{Hom}_U(K, Q \otimes J)$ affin térrel.*

Ezek után még azt kell kiszámolni, hogy a kapott bővítés osztály nem függ a K^A választott prezentációjától. Ez egy hosszasabb, de egyszerű számolás. □

Definíció 13.6. *Legyen Y egy projektív séma egy test felett, $Z \subseteq Y$ egy zárt részséma. Az olyan deformációs feladatokban, ahol J egydimenziós, az $\mathrm{Ext}^1_Y(I_Z, \mathcal{O}_Z) \otimes J$ csoportot azonosítjuk $\mathrm{Ext}^1_Y(I_Z, \mathcal{O}_Z)$ -vel, az izomorfizmus csak J generátorától függ, tehát konstans szorzó erejéig meghatározott. Jelölje*

$$\mathrm{Obs}(Z) \leq \mathrm{Ext}^1_Y(I_Z, \mathcal{O}_Z)$$

az összes lehetséges egydimenziós J-hez tartozó obstrukció osztály által kifeszített alteret.

Lemma 13.7. *Legyen Y egy projektív séma egy test felett, $Z \subseteq Y$ egy zárt részséma. Minden ezekhez tartozó deformációs probléma esetén*

$$E^B(Q^A) \in \mathrm{Obs}(Z) \otimes J$$

J-nek mindig van egy legfeljebb $\dim(\mathrm{Obs}(Z))$ dimenziós $J_0 \leq J$ altere, amivel leosztva a kapott deformációs feladat megoldható:

$$\exists J_0 \leq J,\ \dim(J_0) \leq \dim(\mathrm{Obs}(Z)) \ : \quad E^{B/J_0}(Z^A) = 0$$

Bizonyítás. Tekintsünk egy deformációs problémát adott J ideállal. Ekkor J minden altere ideál B-ben, velük leosztva újabb deformációs problémákhoz jutunk. Az 13.2. Tétel (3) pontja szerint az $E^B(Z^A)$ obstrukció osztály meghatározza az összes így kapható deformációs probléma obstrukció osztályát. Minden obstrukció osztály felírható

$$E^B(Z^A) = \sum e_i \otimes j_i \qquad e_i \in \mathrm{Ext}^1_Y(I_Z, \mathcal{O}_Z),\ j_i \in J$$

alakban, és feltehető, hogy mind az e_i, mind pedig a j_i elemek lineárisan függetlenek. Ha J-t leosztjuk egy olyan egy kodimenziós altérrel, amelyik egy j_i kivételével tartalmazza az összes többi j_k-t, akkor láthatjuk, hogy $e_i \in \mathrm{Obs}(Z)$. Ez bizonyítja az első állítást. Tehát az

e_i elemek száma (a függetlenség miatt) legfeljebb $\dim(\mathrm{Obs}(Z))$. Válasszuk J_0-nak az összes j_i elem által kifeszített alteret, ez igazolja a másidik állítást. □

Tétel 13.8. *Legyen Y egy projektív séma egy test fölött, és legyen $Z \subseteq Y$ egy zárt részséma. Jelölje I_Z a Z ideál-kévéjét. Ekkor*

(1) *Az Y Hilbert sémájának Zariski érintőtere a $[Z]$ pontban természetesen izomorf a*

$$\mathrm{Hom}_Y(I_Z, \mathcal{O}_Z) = \mathrm{Hom}_Z(I_Z/I_Z^2, \mathcal{O}_Z)$$

vektortérrel.

(2) *A Hilbert séma $[Z]$-beli lokális gyűrűje felírható egy*

$$\dim\Big(\mathrm{Hom}_Y(I_Z, \mathcal{O}_Z)\Big)$$

dimenziós reguláris gyűrű faktoraként, a definiáló ideál generálható $\dim(\mathrm{Obs}(Z))$ *elemmel.*

(3) *A Hilbert séma minden $[Z]$ ponton áthaladó komponensének a dimenziója legalább*

$$\dim\Big(\mathrm{Hom}_Y(I_Z, \mathcal{O}_Z)\Big) - \dim\Big(\mathrm{Obs}(Z)\Big)$$

(4) *Speciálisan, ha* $\mathrm{Obs}(Z) = 0$, *akkor a Hilbert séma sima a $[Z]$ pontban.*

Bizonyítás. A Zariski érintő teret már kiszámoltuk. Ha $\mathrm{Obs}(Z) = 0$, akkor minden deformációs probléma megoldható – ez a simaság egy jólismert kritériuma (Grothendieck: formally smooth). Lásd Hartshorne, I/8.6 feladat.

Hátra van még (2) bizonyítása. A Hilbert séma $[Z]$ környezetében beágyazható egy affin térbe, tehát a $[Z]$-beli lokális gyűrű felírható R/I alakban, ahol (R, m) egy reguláris lokális gyűrű. Ezután addig osztjuk R-et $I \setminus m^2$-beli elemekkel, amíg elérjük, hogy $I \subset m^2$, azaz R és R/I Zariski érintőtere egyforma dimenziós lesz. Azt kell csak belátnunk, hogy I generálható legfeljebb $\dim(\mathrm{Obs}(Z))$ elemmel, azaz $\dim(I/mI) \leq \dim(\mathrm{Obs}(Z))$.

Tekintsük a következő deformációs problémát: $A = R/I$ a Hilbert séma lokális gyűrűje, Z^A az univerzális részséma A felett (tehát $\mathrm{Univ}(Y) \subset \mathrm{Hilb}(Y) \times Y$ megszorítása $\mathrm{Spec}(A) \times Y$ -ra), és $B = R/mI$. Az előző lemma ad egy $J_0 J$ alteret, amire $\dim(J_0) \leq \dim(\mathrm{Obs}(Z))$ és Z^A kiterjeszthető egy Z^{B/J_0} családdá. De A éppen a Hilbert séma lokális gyűrűje, és az univerzális tulajdonság miatt Z^B csak a Z^A visszahúzása lehet egy alkalmas $\mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ morfizmus mentén. Ez azt jelenti, hogy a

$$0 \to J/J_0 \to B/J_0 \to A \to 0$$

gyűrű-bővítésnek van egy szelése. Tehát $B/J_0 \simeq A \oplus J/J_0$ mint gyűrű. Mivel azonban B/J_0 lokális gyűrűk, azért csak triviális módon írható direkt összeg alakban. Tehát beláttuk, hogy $J = J_0$, azaz $\dim(I/mI) = \dim(J) \leq \dim(\mathrm{Obs}(Z))$. $\square$

Tétel 13.9. *Legyen Y egy sima projektív varietás egy test felett, $Z \subseteq Y$ egy zárt részséma beágyazott pontok nélkül. Ekkor az*

$$\mathrm{Ext}^1_Z(I_Z/I_Z^2, O_Z) \to \mathrm{Ext}^1_Y(I_Z/I_Z^2, O_Z) \to \mathrm{Ext}^1_Y(I_Z, O_Z \otimes J)$$

komponált leképezés injektív, és

$$\mathrm{Obs}(Z) \subseteq \mathrm{Ext}^1_Z(I_Z/I_Z^2, O_Z)$$

Ha még azt is tudjuk, hogy Z lokálisan teljes metszet, vagy Z két kodimenziós és Cohen-Macaulay, akkor I_Z/I_Z^2 lokálisan szabad, és

$$\mathrm{Obs}(Z) \leq H^1(Z, (I_Z/I_Z^2)^* \otimes J)$$

Tétel 13.10. *Legyenek X és Y projektív sémák egy test felett és legyen $f : X \to Y$ egy morfizmus. Tegyük fel, hogy Y sima $f(X)$ egy környezetében. Ekkor* $\mathrm{Hom}(X,Y)$ *Zariski érintőtere az $[f]$ pontban*

$$T_{[f]} \mathrm{Hom}(X,Y) \simeq \mathrm{Hom}_X(f^*\Omega^1_Y, \mathcal{O}_X) \simeq H^0(X, f^*T_Y)$$

és $\mathrm{Hom}(X,Y)$ *minden irreducibilis komponense az $[f]$ pontban legalább*

$$\dim(H^0(X, f^*T_Y)) - \dim(H^1(X, f^*T_Y))$$

dimenziós. Speciálisan, ha $H^1(X, f^*T_Y) = 0$, akkor $\mathrm{Hom}(X,Y)$ *sima az $[f]$ pontban.*