KOHERENS KÉVÉK, KOHOMOLÓGIA CSOPORTOK

SZABÓ ENDRE

KIVONAT. A fejezet célja, hogy rövid bevezetőt adjon a koherens kévék vizsgálatához, kohomológiáik kiszámításához. Minden tételt, definíciót precízen kimondunk, de a homológikus algebrai tételek bizonyítását hanyagoljuk. Alapismeretek: Vektornyaláb, projektív tér, elemi homológikus algebra.

1. Vektornyalábok

A geometria számtalan ágában használnak vektornyalábokat. Létezik nyaláb-fogalom topológikus tereken, differenciálható sokaságokon, komplex sokaságokon, algebrai varietásokon, sémákon, és még egy csomó más fontos kategóriában. Most komplex sokaságokra mondjuk ki a definíciókat, tételeket, de azok az összes felsorolt kategóriában (szinte szó szerint) érvényesek maradnak. Nyalábok szelései mindig az adott kategóriában értelmes szelések, tehát topológiában folytonos, differenciálgeometriában sima, komplex sokaságokon holomorf, varietásokon pedig reguláris (polinomokkal megadható) szelésekről van szó. Amikor algebrai varietásokról, vagy sémákról beszélünk, akkor mindig a Zariski topológiát használjuk, tehát a nyílt halmazok Zariski nyíltak.

Definíció 1.1. *Legyen X egy komplex sokaság. Tekintsük a következő struktúrát: egy E komplex sokaság, egy $\pi : E \to X$ leképezés, és minden $x \in X$ pontban egy r-dimenziós komplex vektortér-struktúra az $E_x = \pi^{-1}(x)$ roston. (Tehát adott az összeadás, és a komplex számmal való szorzás művelete is.) Ha $U \subset X$ nyílt halmaz, és $x \in X$ egy pont, akkor $E_U = \pi^{-1}(U)$ fogja jelölni az E struktúra megszorítását az U halmazra.*

Egy ilyen struktúrát r rangú (holomorf) vektornyaláb*nak hívunk, ha lokálisan triviális, azaz ha minden $x \in X$ ponthoz találhatunk egy $x \in U \subseteq X$ nyílt halmazt, és egy rost-tartó, rostonként lineáris $E_U \to U \times \mathbb{C}^r \to X$ biholomorfizmust.*

Legyen $V \subseteq X$ egy nyílt halmaz, egy $s : V \to E$ holomorf leképezést szelés*nek hívunk, ha minden $x \in U$ pontot a neki megfelelő E_x rostba visz, azaz ha π-vel komponálva az identitást kapjuk.*

Definíció 1.2. *Ha E és F vektornyalábok az X komplex sokaságon, akkor egy $E \to F$ holomorf leképezést* nyaláb homomorfizmus*nak hívunk,* *ha rost-tartó, és rostonként lineáris. Egy nyaláb-homomorfizmust* injektivnek, szürjektívnek, 0-nak *hívunk, ha minden roston az. Homomorfizmusok egy sorozatát egzaktnak mondjuk, ha minden roston egzakt.*

Definíció 1.3. *Lineáris algebrában sok olyan funktort használonk amelyek egy univerzális tulajdonsággal is definiálhatók. Ilyen például a direkt összeg, direkt szorzat, tenzor-szorzat, Hom funktor, duális tér. Ezeket automatikusan kiterjeszthetjük nyalábokra is, ugyanazt az univerzális tulajdonságot várjuk el a nyalábok kategóriájában. A felsorolt funktorok mind léteznek a vektornyalábok kategóriájában, és a kapott nyalábok rostonként megegyeznek a megfelelő rostok direkt összegével, szorzatával, stb.*

Definíció 1.4. *Legyen X egy komplex sokaság, E egy vektornyaláb X-en. Minden $U \subseteq X$ nyílt halmazához hozzárendeljük az E nyaláb holomorf szeléseinek halmazát, $\Gamma(U, E)$-t. Ez egy Abel-csoport (valójában vektortér, de most csak a csoport struktúra érdekel minket). Ez a Gamma a* globális szelés funktor.

Definíció 1.5 (Tolológikus tér, mint kategória)**.** *Egy topológikus tér nyílt részhalmazai egy kategóriát alkotnak: U, V nyílt halmazok között pontosan akkor van (egyetlen) $U \to V$ morfizmus, ha $U \subseteq V$.*

Definíció 1.6. *Legyenek E, F vektornyalábok az X komplex sokaságon, és legyen $f : E \to F$ egy nyaláb homomorfizmus. Ha $U \subseteq V$ nyílt halmazok X-ben, akkor a V-ben értelmezett szeléseket megszoríthatjuk U-ra (*megszorítás homomorfizmus*). Ha s az E egy szelése az U nyílt halmazon, akkor $f(s)$ szelése lesz F-nek az U halmaz felett. Igy kapjuk a következő homomorfizmusokat:*

$$\Gamma(V \to U, E) : \Gamma(V, E) \to \Gamma(U, E)$$

$$\Gamma(U, E \to F) : \Gamma(U, E) \to \Gamma(U, F)$$

Egyszerű számolgatások mutatják, hogy

Tétel 1.7 (Γ funktor)**.** *A globális szelés funktor, Γ kontravariáns funktor az első változójában, és kovariáns funktor a második változóban.*

Legyenek $s : U \to E$ és $t : U \to E$ az $E \to X$ vektornyaláb szelései az $U, V \subseteq X$ nyílt halmazokon. Ha s és t megegyezik értelmezési tartományuk átfedésén, akkor összeragaszthatjuk őket egy $(s \cup t)$: $U \cup V \to E$ szeléssé. Ez olyan fontos észrevétel, hogy érdemes nevet adni neki:

Lemma 1.8 (Kéve tulajdonság)**.** *Adott $s_i : V_i \to E$ szelések. A következő állítások ekvivalensek:*

(1) *Minden (i,j) index-párra az s_i és az s_j megszorítása $V_i \cap V_j$-re megegyezik.*
(2) *Létezik, és egyértelműen meghatározott egy olyan $s : \bigcup_i V_i \to E$ szelés, amelynek a megszorítása bármelyik V_i halmazra éppen s_i-vel egyenlő.*

Ez a tulajdonság átfogalmazható a homológikus algebra nyelvére is. Egyrészt a megszorítás homomorfizmusok direkt összege ad egy $\Gamma(\bigcup_i V_i, E) \to \prod_i \Gamma(V_i, E)$ homomorfizmust. Másrészt minden (i,j) pár esetén tekinthetjük a $\Gamma(V_i, E) \to \Gamma(V_i \cap V_j, E)$ és $\Gamma(V_j, E) \to \Gamma(V_i \cap V_j, E)$ megszorítások különbségét, ez egy $\Gamma(V_i, E) \oplus \Gamma(V_j, E) \xrightarrow{(+,-)} \Gamma(V_i \cap V_j, E)$ homomorfizmus. Ezekből állítható össze az alábbi sorozat második leképezése. A kéve tulajdonság ekvivalens ennek a sorozatnak az egzaktságával:

$$0 \to \Gamma(\bigcup_i V_i, E) \to \prod_i \Gamma(V_i, E) \xrightarrow{(+,-)} \prod_{i,j} \Gamma(V_i \cap V_j, E)$$

Rövid számolgatással kijön a következő eredmény:

Tétel 1.9 (Γ bal-egzakt)**.** *Legyen most $0 \to E \to F \to G$ nyalábok egy egzakt sorozata az X komplex sokaságon. Ekkor minden $U \subseteq X$ nyílt halmazon*

$$0 \to \Gamma(U, E) \to \Gamma(U, F) \to \Gamma(U, G)$$

is egzakt, tehát Γ bal-egzakt funktor a második változójában.

Tény 1.10. Γ *nem egzakt!!!*

Valóban, ha $f : E \to F$ szürjektív homomorfizmus, és $s : U \to F$ egy szelés, akkor olyan $t : U \to E$ szelésre vágyunk, amelyiknek a képe $f(t) = s$. Definíció szerint f rostonként szürjektív, tehát minden $x \in U$ pontnak van $x \in V \subset U$ környezete, és $t_V : V \to E$ szelés, amire $f(t_V) = s|V$. Azonban ezek a t_V szelések korántsem egyértelműek, tehát nincs rá semmi garancia, hogy a végén összeragadnak egy közös $t : U \to E$ szeléssé. Általában nem is ragadnak össze. Pl. a projektív egyenesen az $\mathcal{O}(1)$ nyalábnak van két lineárisan független globális szelése, ez ad egy $\mathcal{O}^2 \to \mathcal{O}(1)$ szürjektív homomorfizmust. Ez még nem ellenpélda, de $\mathcal{O}(-1)$-gyel szorozva kapunk egy $\mathcal{O}(-1)^2 \to \mathcal{O}$ homomorfizmust, $\mathcal{O}(-1)$-nek nncs globális szelése, $\mathcal{O}$-ban viszont benne vannak a konstans függvények.

Egy vektornyaláb homomorfizmusnak a magja, és a képe csak akkor lesz vektornyaláb, ha a homomorfizmus rangja állandó. Pl. ha $E \to X$ egy vektornyaláb és f egy holomorf függvény X-en, akkor az f-fel való szorzás egy $E \xrightarrow{\cdot f} E$ homomorfizmus, ami 0 rangú ott, ahol f eltűnik, de maximális rangú az X többi részén. Tehát sem a magja, sem a képe nem vektornyaláb. Ezért

Tény 1.11. *A vektornyalábok nem alkotnak Abel kategóriát. A homológikus algebra csak döcögve alkalmazható rájuk.*

Konstrukció. Legyen E vektornyaláb az X algebrai varietáson, E^* jelöli a duális nyalábot. E^* szelései egy U nyílt halmazon éppen az E_U-n értelmezett rostonként homogén lineáris függvények. Még általánosabban, az S^kE^* szimmetrikus hatvány U-n értelmezett szelései éppen az E_U-n értelmezett, rostonként homogén k-fokú polinomok. Tehát a $\bigoplus_k S^kE^*$ szelései U-n megegyeznek az E_U-n értelmezett, rostonként polinom függvényekkel. Algebrai geometriában egy varietást teljesen meghatároznak a rajta értelmezett polinom-függvények, és a konstrukciót könnyű kiterjeszteni gyűrű-nyalábokra (vagy akár gyűrű-kévékre) is. Azaz ha $U \subset X$ egy affin nyílt halmaz, akkor $\Gamma(U, \bigoplus_k S^kE^*)$ éppen az E_U koordináta-gyűrűje, $E_U \simeq \operatorname{Spec}\Gamma(U, \bigoplus_k S^kE^*)$. Azt kell csak belátni, hogy ez a megfeleltetés természetes: ha $V \subset U$ egy másik affin nyílt halmaz, akkor a $\operatorname{Spec}\Gamma(V, \bigoplus_k S^kE^*) \to \operatorname{Spec}\Gamma(U, \bigoplus_k S^kE^*)$ beágyazás megegyezik az $E_V \subset E_U$ beágyazással, és ez eléggé nyilvánvaló. Ezután az affin darabokból összeragaszthatjuk az egész E nyalábot. Ezt a ragasztott konstrukciót $\operatorname{Spec}\bigoplus_k S^kE^*$ -gal jelöljük, és minden gyűrű-nyalábra (gyűrű-kévére) is működik. Tehát:

Tétel 1.12. *Legyen X egy varietás egy test felett, $E \to X$ egy vektornyaláb. Ekkor a nyaláb rekonstruálható duális nyaláb hatványainak a szeléseiből: $E \simeq \operatorname{Spec}\bigoplus_k S^kE^*$. Hasonló állítás érvényes varietások helyett más kategóriákban is, csak a Spec funktort kell kicserélni egy megfelelő konstrukcióra.*

Kiegészítés. A parakompakt sokaságok kategóriájában minden vektornyaláb ellátható egy euklidesz metrikával, tehát minden résznyalábnak van direkt komplementuma (a merőleges komplementum). Ebből következik az is, hogy Γ egzakt ebben az esetben.

2. Kévék kategóriája, koherens kévék

Szeretnénk beszélni a vektornyaláb homomorfizmusok magjáról és képéről, ezért bővíteni kell a kategóriánkat, és ilyen bonyolultabb objektumokat is meg kell engednünk. Két út áll előttünk: A kévék kategóriája a legnagyobb kategória, aminek az objektumai teljesítik az előző fejezetben leírt funktoriális tulajdonságokat, a koherens kévék kategóriája pedig a legszűkebb olyan (teljes)részkategória, amelyik tartalmazz a vektornyalábokat, és a homomomorfizmusok magját, képét. A kévék kategóriája topológiai fogalom, csak a komplex sokaság topológiájától függ, koherens kévék kategóriája azonban analitikus fogalom, függ a komplex struktúrától. Analitikus terekre, varietásokra sémákra teljesen analóg az elmálet. (Topológikus terekre, differenciálható sokaságokra nem szokás a koherens kévéket definiálni.)

Definíció 2.1. *Egy $\mathcal{A}$ kategóriát* Abel kategóriának *hívunk, ha $\mathcal{A}$-ban*

(1) *bármely két $a, b \in \mathcal{A}$ objektumra a* $\mathrm{Hom}(a, b)$ *morfizmus-halmazt elláttuk egy Abel csoport struktúrával,*
(2) *a morfizmusok kompozíciója bilineáris,*
(3) *véges direkt összegek léteznek,*
(4) *minden morfizmusnak van magja és komagja,*
(5) *minden morfizmus megegyezik a komagjának a magjával,*
(6) *mindem morfizmus felbontható egy epi-morfizmus és egy monomorfizmus kompozíciójára.*

Egy Abel kategóriában vane elég injektív objektum*, ha minden objektum beágyazható egy injektívbe.*

Definíció 2.2 (Előkéve)**.** *Legyen X egy topológikus tér. Egy $\mathcal{F}$* előkéve *az X-en egy kontravariáns funktor az X nyílt halmazainak kategóriájából az Abelcsoportok kategóriájába. Egy $U \subseteq X$ nyílt halmazra az $\mathcal{F}(U)$ elemeit az $\mathcal{F}$ U-n* értelmezett szeléseinek *hívjuk. Ha $\mathcal{G}$ egy másik előkéve, akkor az $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ természetes transzformációkat* homomorfizmusoknak *nevezzük. Ha $U \subseteq X$ nyílt halmaz, akkor $\mathcal{F}|_U$ jelöli az $\mathcal{F}$ megszorítását az U részhalmazaira.*

Könnyen látható, hogy az előkévek Abel kategóriát alkotnak. Az velük a probléma, hogy a szelések nem lokálisak: nem lehet őket darabokból összeragasztani úgy, mint a függvényeket. Ez pl. abban jelentkezik, hogy ha $E \to F$ egy vektornyalábok közötti szürjektív leképezés, akkor a belőlük gyártható előkévék közti homomorfizmus nem feltétlenül szürjektív (lásd a Tény 1.10 magyarázatát). Ezen segít a következő:

Definíció 2.3 (Kéve)**.** *Legyen $\mathcal{F}$ egy előkéve az X topológikus téren. Az $\mathcal{F}$* kéve*, ha teljesül rá a* kéve tulajdonság*: $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ szelések tetszőleges kollekciójára a következö állítások ekvivalensek:*

(1) *Minden (i, j) index-párra az s_i és az s_j megszorítása $V_i \cap V_j$-re megegyezik.*
(2) *Létezik, és egyértelműen meghatározott egy olyan $s \in \mathcal{F}(\bigcup_i V_i)$ szelés, amelynek a megszorítása bármelyik V_i halmazra éppen s_i-vel egyenlő.*

Ha $\mathcal{G}$ egy másik kéve, akkor az $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ természetes transzformációkat homomorfizmusoknak *nevezzük.*

Ezzel célba is érkeztünk:

Tétel 2.4 (Kévék kategóriája)**.** *Legyen X egy topológikus tér. Az X -en élő kévék egy Abel kategóriát alkotnak,* $\mathrm{Sh}(X)$ *a neve. Ha X egy* *komplex sokaság, akkor a globális szelés funktor minden vektornyalábhoz hozzárendel egy kévét Ez a hozzárendelés egy egzakt funktor, általa a vektornyalábok kategóriája ekvivalens a kévék kategóriájának egy teljes részkategóriájával.*

Ez (a halmazelméleti problémáktól eltekintve) egy hosszasabb, de viszonylag egyszerű számolással bizonyítható. Az egésznek a kulcsa a következő:

Lemma 2.5 (indukált kéve)**.** *Minden $\mathcal{F}$ előkévéből konstruálhatunk egy $\hat{\mathcal{F}}$ kévét és egy $\mathcal{F} \to \hat{\mathcal{F}}$ (előkéve-)homomorfizmust a következő univerzális tulajdonsággal: Ha $\mathcal{G}$ egy tetszőleges kéve, és $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ egy (előkéve-)homomorfizmus, akkor az átvezethető az $\mathcal{F} \to \hat{\mathcal{F}}$ homomorfizmuson.*

és most vígan célba érünk:

Tétel 2.6 (Kéve kohomológia)**.** *Legyen X wgy tetszőleges topológikus tér. Ekkor az $Sh(X)$ kategóriában van elég injektív objektum. Minden $i \geq 0$ egészre van egy H^i kétváltozós funktor, ami minden $U \subseteq X$ nyílt halmazhoz és minden $\mathcal{F}$ kévéhez egy $H^i(U, \mathcal{F})$ Abel csoportot rendel a következő tulajdonságokkal:*

(1) *Mindegyik H^i kontravriáns az első, és kovariáns a második változójában.*
(2) $H^0(U, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)$.
(3) *Ha $U \subseteq X$ nyílt, és $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$ kévék egy rövid egzakt sorozata X-en, akkor van hosszú egzakt sorozat:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H^0(U,\mathcal{E}) & \to & H^0(U,\mathcal{F}) & \to & H^0(U,\mathcal{G}) & \to & \\ & & H^1(U,\mathcal{E}) & \to & H^1(U,\mathcal{F}) & \to & H^1(U,\mathcal{G}) & \to & \\ & & H^2(U,\mathcal{E}) & \to & H^2(U,\mathcal{F}) & \to & H^2(U,\mathcal{G}) & \to & \dots \end{array}$$

(4) *A hosszú egzakt sorozat egy kétváltozós funktor: kontravariánsan függ a nyílt halmaztól, és kovariánsan függ a rövid egzakt sorozattól.*

Ezek a tulajdonságok egyértelműen meghatározzák a H^i funktorokat.

A bizonyításról. Az Abelcsoportok mind beágyazhatók egy injektív Abelcsoportba. Az injektív Abel csoportból gyártott felhőkarcoló kéve (lásd alább, a Példák között) injektív lesz a kévék kategóriájában, tehát az ilyenek direkt szorzata is az. Mindenkit be lehet ágyazni egy ilyen direkt szorzatba. Ebből kiderül, hogy $\mathrm{Sh}(X)$-ben van elég injektív objektum. Az egy egyszerű számolgatással belátható, hogy az expliciten megadott H^0 valóban egy kétváltozós funktor, bal-egzakt a második változójában. A tétel többi része jól ismert az Abel kategóriák elméletében: ha van elég injektív objektum, akkor van injektív feloldás is, minden bal-egzakt funktornak van derivált-funktora (az injektív feloldásból kiszámítható), és a tételbeli tulajdonságok egyértelműen meghatározzák (ez is kijön abból, hogy ha az injektív feloldásra ráeresztjük a hosszú egzakt sorozatot).

Most pedig legyen X egy komplex sokaság, megkeressük a legszűkebb Abel részkategóriát $\mathrm{Sh}(X)$-ben ami tartalmazza a vektornyalábokat.

Definíció 2.7. *Legyen X egy komplex sokaság.*

(1) *Az X* struktúja kévéje, *$\mathcal{O}_X$ a holomorf függvények kévéje. Minden $U \subset X$ nyílt halmazon $\mathcal{O}_X(U)$ az U-n értelmezett holomorf függvények gyűrűje. (Tehát $\mathcal{O}_X$ nem csak Abel csoport kéve az összeadásra nézve, hanem gyűrű kéve is.)*

(2) *Egy $\mathcal{O}_X$ modulus egy $\mathcal{F}$ kéve azzal az extra struktúrával együtt, hogy minden $\mathcal{F}(U)$ csoportnak adunk egy $\mathcal{O}_X(U)$-modulus struktúrát, és elvárjuk, hogy a megszorítás homomorfizmusok modulus homomorfizmusok legyenek.*

(3) *Legyenek $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ $\mathcal{O}_X$-modulusok.* $\mathcal{O}_X$-modulus homomorfizmusnak *hívunk egy $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ kéve homomorfizmust akkor, ha minden U nyílt halmazon az indukált $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ homomorfizmus $\mathcal{O}_X(U)$-modulus homomorfizmus. Az $\mathcal{O}_X$ modulusok Abel kategóriát alkotnak (ez könnyű).*

(4) *Egy $\mathcal{O}_X$ modulus $\mathcal{F}$ szabad, ha izomorf az O_X néhány (esetleg végtelen sok) példányának direkt összegével. $\mathcal{F}$* lokálisan szabad *akkor, ha az X-nek van olyan V_i nyílt fedése, hogy az $\mathcal{F}|_{V_i}$ megszorítások mind szabad O_{V_i}-modulusok.*

(5) *Legyen $\mathcal{F}$ egy $\mathcal{O}_X$-modulus. Akkor mondjuk $\mathcal{F}$-re hogy* koherens kéve*, ha van az X-nek egy olyan V_i nyílt fedése, hogy mindegyik V_i halmazon van az $\mathcal{F}|_{V_i}$ megszorításnak véges prezentációja:*

$$\mathcal{O}_{V_i}^{\oplus m} \to \mathcal{O}_{V_i}^{\oplus n} \to \mathcal{F}|_{V_i} \to 0 \qquad \textit{egzakt.}$$

(6) *Koherens kévék közötti homomorfizmusnak egyszerűen az $\mathcal{O}_X$-modulus homomorfizmusokat tekintjük. A koherens kévék egy teljes részkategóriát alkotnak az $\mathcal{O}_X$-modulusok kategóriájában.. A koherens kévék kategóriáját* $\mathrm{Coh}(X)$ *fogja jelölni.*

Figyelmeztetés. Ez nem a szokásos definíció a koherens kévékre. Oka tétele, hogy $\mathcal{O}_X$ maga koherens (a hagyományos értelemben), ezért használhatjuk ezt a definíciót.

Ha véges sok koherens kévét manipulálunk, akkor szinte mindig koherens kévéket kapunk eredményül. Egy eset van, ami nem könnyű: koherens kévék közti homomorfizmus magja szintén koherens. Ez is Oka tételéből következik, komoly analízist igényel a bizonyítása. (Algebrai varietásokra a megfelelő állítás sokkal könnyebben látható: a polinom gűrű Noethersége kell hozzá.) Ezt az elmélkedést pontosítja a következő:

Tétel 2.8 (Koherens kévék kategóriája)**.** *Egy X komplex sokaságon a koherens kévék Abel kategóriát alkotnak. A globális szelés funktor minden vektornyalábból legyárt egy koherens kévét. Így a vektornyalábok kategóriája ekvivalens* $\mathrm{Coh}(X)$ *egy teljes részkategóriájával, a lokálisan szabad koherens kévék kategóriájával.*

Definíció 2.9 (ciklikus O_X-modulus)**.** *Egy koherens kévét* ciklikus $\mathcal{O}_X$-modulusnak *hívunk, ha izomorf az $\mathcal{O}_X$ egy koherens faktorával, azaz $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$-vel, ahol $I \leq \mathcal{O}_X$ egy koherens ideál kéve.*

Lemma 2.10 (Ciklikus felbontás)**.** *Legyen $\mathcal{F}$ koherens kéve egy X komplex sokaságon. Ekkor lokálisan F előáll, mint véges sok koherens ciklikus részmodulusának az összege. Ezért lokálisan van olyan (véges) koherens kompozíció lánca, ahol a kompozíció faktorok ciklikusak.*

Bizonyítás: Először is választunk olyan $p \in U$ környezetet, ahol $\mathcal{F}$-nek van véges prezentációja, azaz van egy $f : \mathcal{O}_U^{\oplus n} \to \mathcal{F}|_U$ szürjektív leképezés. Jelölje $E_i \simeq \mathcal{O}_U$ a fenti $\mathcal{O}_U^{\oplus n}$ direkt összeg i-edik tagját. Az $f(E_i)$ modulusok ciklikusak, és az összegük éppen $\mathcal{F}$. Legyen most $F_k = \bigoplus_{i=1}^k f(E_i)$. Ez egy koherens kompozíció lánc, és az $\mathcal{F}_i/F_{i-1}$ kompozíció faktor az $f(E_i)$ ciklikus modulus homomorf képe, tehát maga is ciklikus. Ezzel a Lemmát beláttuk.

Tétel 2.11 (Anullátor ideál)**.** *Legyen $\mathcal{F}$ egy koherens kéve az X komplex sokaságon.* $\mathrm{ann}(\mathcal{F}) \leq \mathcal{O}_X$ *jelöli az olyan $f \in \mathcal{O}_X(U)$ holomorf függvények kévéjét, amelyekre $f \cdot \mathcal{F}|_U = 0$. Ezek egy koherens ideálkévét alkotnak.*

Bizonyítás: Az állítás lokális, tehát szorítkozhatunk egy nyílt halmazra, ahol Lemma 2.10 miatt feltehetjük, hogy $\mathcal{F} = \sum_{i=1}^n \mathcal{F}_i$, ahol mindegyik $\mathcal{F}_i$ egy koherens ciklikus részmodulus. Mivel $\mathcal{F}_i$ ciklikus, azért $\mathcal{F}_i \simeq \mathcal{O}_X/\mathrm{ann}(\mathcal{F}_i)$, és $\mathcal{F}_i$ koherens volta miatt $\mathrm{ann}(F_i)$ is az. Másrészt ha az $\mathcal{O}_X \to \mathcal{F}_i$ leképezések szorzatát az átlóra megszorítjuk, akkor kapunk egy $\phi : \mathcal{O}_X \to \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i$ homomorfizmust, aminek a magja éppen $\mathrm{ann}(\mathcal{F}) = \bigcap_{i=1}^n \mathrm{ann}(\mathcal{F}_i)$, tehát ez is koherens.

Definíció 2.12 (Lokalizáció, tartó)**.** *Legyen X egy komplex sokaság, $\mathcal{F}$ egy koherens kéve X-en, és $p \subset X$ egy pont. Jelölje $\mathcal{O}_{p,X}$ a p-körüli holomorf függvény-csírák lokális gyűrűjét, és $m_{p,X}$ a maximális ideált: a p pontban eltűnő függvénycsírák ideálját. Definiáljuk az $\mathcal{F}$ lokális modulusát a p pontban:*

$$\mathcal{F}_p = \lim_{p \in U} \mathcal{F}(U) \qquad \textit{ahol } U \subseteq X \textit{ nyílt.}$$

Könnyen látható, hogy $(\mathcal{O}_X)_p = \mathcal{O}_{p,X}$, *és* $\mathcal{F}_p$ *egy végesen prezentált* $\mathcal{O}_{p,X}$*-modulus. Definiáljuk az* $\mathcal{F}$ *koherens kéve* tartóját: $\operatorname{supp}(\mathcal{F})$ *jelöli azon* p *pontok összességét, amelyekre* $\mathcal{F}_p \neq 0$.

Tény 2.13. *Legyen* X *komplex sokaság, és* $p \in X$ *egy pont. Ekkor* $\mathcal{O}_{p,X}$ *egy lokális Noether gyűrű. A* p*-beli lokalizáció egy egzakt funktor* $\operatorname{Coh}(X)$*-ből a végesen generált* $\mathcal{O}_{p,X}$*-modulusok kategóriájába.*

Tétel 2.14. *Egy komplex sokaságon minden* $\mathcal{F}$ *koherens kéve tartója zárt analitikus halmaz, megegyezik az* $\operatorname{ann}(\mathcal{F})$ *koherens ideál zérushelyével. A tartó pontosan akkor üreshalmaz, ha a koherens kéve 0.*

Bizonyítás: Legyen X egy komplex sokaság, és $\mathcal{F}$ egy koherens kéve rajta. Jelölje $\operatorname{ann}(\mathcal{F}_p) \lhd \mathcal{O}_{p,X}$ az $\mathcal{F}_p$ modulus anullátor ideálját a $p \in X$ pontban, és legyen $\mathcal{I}_p \leq \mathcal{O}_X$ a p pontban eltűnő holomorf függvények kévéje. Világos, hogy $\operatorname{ann}(\mathcal{F})_p = \operatorname{ann}(\mathcal{F}_p)$. Ezért tehát

$$\begin{array}{ccccc} p \in \operatorname{supp}(\mathcal{F}) & \iff & \mathcal{F}_p \neq 0 & \iff & \operatorname{ann}(\mathcal{F}_p) \neq \mathcal{O}_{p,X} \\ & & & & \Updownarrow \\ \operatorname{ann}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{I}_p & \iff & \operatorname{ann}(\mathcal{F})_p \subseteq m_{p,X} & \iff & \operatorname{ann}(\mathcal{F}_p) \subseteq m_{p,X} \end{array}$$

Tehát $\operatorname{supp}(\mathcal{F})$ valóban megegyezik $\operatorname{ann}(\mathcal{F})$ zérus-helyével. Ebből pedig az is következik, hogy $\operatorname{supp}(\mathcal{F})$ zárt analitikus halmaz.

Most rátérünk a második állításra. Világos, hogy a 0 kéve tartója üres. Fordítva, legyen $\mathcal{F} \neq 0$ egy koherens kéve, tehát $\operatorname{ann}(F) \neq \mathcal{O}_X$ (hiszen a konstans 1 függvény nem lehet $\operatorname{ann}(\mathcal{F})$-ben). Mivel $\operatorname{ann}(\mathcal{F})$ koherens, azért van olyan U nyílt halmaz, amely felett $\operatorname{ann}(\mathcal{F})|_U = \operatorname{ann}(\mathcal{F}|_U)$ véges sok ciklikus koherens modulus összege, és nem egyenlő $\mathcal{O}_U$-val. Legyenek $f_1, f_2, \dots f_n$ a ciklikus modulusok generátorai, ezek U-n definiált holomorf függvények $\operatorname{ann}(\mathcal{F}|_U)$-ból, tehát nem generálhatják az egész $\mathcal{O}_U$-t. De azoknak a pontok, ahol valamelyik f_i nem tűnik el, egy $V_i \subseteq U$ nyílt halmazt alkotnak, és ezen a nyílt halmazon $\mathcal{O}_{V_i} = f_i \cdot_{V_i} \subseteq \operatorname{ann}(\mathcal{F}|_{V_i}) \subseteq \mathcal{O}_{V_i}$, azaz $\mathcal{O}_{V_i} = \operatorname{ann}(\mathcal{F}|_{V_i})$. Ezért a V_i halmazok nem fedhetik le az egész U halmazt, tehát van az f_i függvényeknek egy $p \in U$ közös zérushelye. Lokalizálunk a p pontban, és azt kapjuk, hogy

$$f_1 \cdot \mathcal{O}_{p,X} + f_2 \cdot \mathcal{O}_{p,X} + \cdots + f_n \cdot \mathcal{O}_{p,X} = \operatorname{ann}(\mathcal{F})_p \subseteq \mathcal{O}_{p,X}$$

De a p közös zérushelye mindeghik f_i-nek, tehát $f_i \in m_{p,X}$ minden i-re. Ebből persze következik, hogy $\operatorname{ann}(\mathcal{F}_p) \subseteq m_{p,X}$, tehát $\mathcal{F}_p \neq 0$, azaz $p \in \operatorname{supp}(\mathcal{F})$. Ezzel beláttuk a Tételt.

3. Példák

Ezekben a példákban X mindig egy komplex sokaságot jelől, $U \subseteq X$ pedig egy tetszőleges nyílt halmazt.

(1) *felhőkarcoló kéve*: Legyen $p \in X$ és A egy Abel csoport. Az A_p kévét úgy definiáljuk, hogy $A_p(U) = A$ ha $p \in U$, és $A_p(U) = 0$ különben. Ha A egy véges-dimenziós komplex vektortéris, akkor A_p koherens kéve.
(2) *konstans kéve*: Legyen A egy Abel csoport, ellátjuk a diszkrét topológiával. A szintén A-val jelölt konstans kéve szelései az U nyílt halmazon legyenek az $U \to A$ folytonos függvények. Tehát $A(U)$ megegyezik annyi A direkt szorzatával, ahány összefüggő komponense van U-nak. Ez általában nem tekinthető koherens kévének.
(3) *struktúra kéve*: Legyen $\mathcal{O}_X(U)$ az U-n értelmezett holomorf függvények gyűrűje. Ez egy koherens gyűrű-kéve, ha a szorzásról elfelejtkezünk, akkor kapunk egy közönséges koherens kévét.
(4) *vektornyaláb*: Legyen $E \to X$ egy vektornyaláb. Definiáljuk az általa indukált, szintén E-vel jelölt kévét: legyen $E(U) = \Gamma(U, E)$, az U-n értelmezett holomorf szelések $\mathcal{O}_X(U)$-modulusa. Ez egy koherens kéve. Speciális eset: $\mathcal{O}_X$ a triviális nyalábhoz tartozó kéve.
(5) *tenzor szorzat*: Ha $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ tetszőleges $\mathcal{O}_X$-modulusok, akkor az $U \to \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ funktor egy előkéve, de általában nem kéve. $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ fogja jelölni az általa indukált kévét (lásd Lemma 2.5). Könnyen lehet látni, hogy a tenzorszorzás mindkét változójában jobb-egzakt funktor. Ha $\mathcal{F}$ lokálisan szabad, akkor egyszerűbb az élet: a fenti ekőkéve már rögtön kéve lesz, és az F-fel való tenzor-szorzás egzakt funktor. Legyenek most $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ tetszőleges koherens kévék. Ha a $\mathcal{G}$ lokális prezentációját megszorozzuk $\mathcal{F}$-fel, akkor látjuk, hogy $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ lokálisan előáll, mint $\mathcal{F}$ egy véges direkt hatványának a faktora, tehát Tétel 2.8 miatt koherens.
(6) $\mathbb{C}$-*modulusok*: A konstans $\mathbb{C}$ kéve egy gyűrűkéve X-en (nem koherens!), világos, hogy $\mathbb{C} \subset \mathcal{O}_X$ rész-gyűrű-kéve (a lokálisan konstans holomorf függvények kévéje). Ezért minden $\mathcal{O}_X$-modulus kéve automatikusan $\mathbb{C}$-modulus kéve is. Ha V egy komplex vektortér, akkor a konstans V kéve egy $\mathbb{C}$-moduluskéve X-en. Ha A, B $\mathbb{C}$-modulus kévék, akkor a tenzor szorzatuk $A \otimes_{\mathbb{C}} B$ legyen az a $\mathbb{C}$-modulus kéve, amelyik minden U nyílt halmazhoz hozzárendeli az $A(U) \otimes_{\mathbb{C}(U)} B(U)$ $\mathbb{C}(U)$-modulust. Ez most kéve lesz, és a tenzor szorzás mindkét változójában egzakt funktor. Ha $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ két $\mathcal{O}_X$ modulus, akkor (a tenzorszorzat univerzális tulajdonsága miatt) van egy $\mathcal{E} \otimes_C \mathcal{F} \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ homomorfizmus, ami egy természetes transzformáció a két tenzorszorzat funktor között.

(7) *globális szelések*: Legyen $\mathcal{F}$ egy $\mathcal{O}_X$ modulus X-en. A konstans $H^0(X, \mathcal{F})$ kéve egy $\mathbb{C}$-modulus kéve, és mivel a globális szeléseket meg lehet szorítani minden $U \subseteq X$ nyílt halmazra, azért kapunk egymással kompatibilis $H^0(X, \mathcal{F}) \to \mathcal{F}(U)$ homomorfizmusokat, tehát egy $H^0(X, \mathcal{F}) \to \mathcal{F}$ kéve leképezést, ami $\mathbb{C}$-modulus homomorfizmus. Ez pedig ad egy

$$H^0(X, \mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X \to \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X \to \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{F}$$

homomorfizmust. Mindent eggybevetve kaptunk egy

$$H^0(X, \text{--}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X : \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(X)$$

kovariáns funktort, és egy

$$H^0(X, \mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$$

természetes transzformációt. Érdemes ezt koordinátákkal is kiszámolni. Választunk egy $\{h_i\} \subset H^0(X, \mathcal{F})$ bázist, ekkor $H^0(X, \mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X \simeq \bigoplus_i h_i \otimes \mathcal{O}_X$. Ezután, ha s ennek a nyalábnak egy szelése az U nyílt halmazon, akkor felírható $s = \sum s_i \cdot h_i$ alakban (véges sok s_i lehet csak nem 0). De h_i valójában az $\mathcal{F}$ kéve globális szelése, tehát ez a lineáris kombináció kiértékelhető $\mathcal{F}_X(U)$-ban is, így kapunk egy $\overline{s} \in \mathcal{F}_X(U)$ elemet. A konstrukció nem függ a bázistól. Az $s \to \overline{s}$ homomorfizmus éppen a fenti $H^0(X, \mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ természetes transzformáció.

(8) *divízorok*: Egy meromorf függvény pólusai egy kodimenziós zárt analitikus halmazt alkotnak X-ben, és minden komponenshez tartozik egy multipliciás: hogy hányszoros polusa van ott a függvénynek. A szimmetria gyököket is pólusnak számítjuk, negatív multiplicitással. Tehát egy f meromorf függvény pólusa $(f) = \delta_1 D_1 + \cdots + \delta_n D_n$ alakban írható, ahol δ_i egésszámok a multiplicitások, és D_i-k egy kodimenziós zárt felbonthatatlan analitikus részhalmazok. Ugyanezt a jeölést használjuk vonalnyalábok meromorf szelésének pólusaira is. Az ilyen $D = \delta_1 D_1 + \cdots + \delta_n D_n$ formális lineáris kombinációkat *divízoroknak* hívjuk, a formális összeadásra nézve szabad Abel csoportot alkotnak, és az egymásnak megfelelő együtthatók összehasonlítás megad rajtuk egy természetes részben-rendezést.

(9) *csavart vonalnyaláb*: Fordítva, legyen most $D = \delta_1 D_1 + \cdots + \delta_n D_n$ egy tetszőleges divízor. $\mathcal{O}_X(D)$ jelöli a $D-ben$ eltűnö meromorf függvények kévéjét: $\mathcal{O}_X(D)(U)$ azokat az U-ban értelmezett f meromorf függvényeket tartalmazza, amelyekre $(f) \geq D$. Részletesen kiírva: f-nek minden D_i mentén legfeljebb δ_i-szeres pólusa lehet, negatív δ_i esetén ez azt jelenti, hogy D_i

mentén legaláb $-\delta_i$-szeres zérushelynek kell lennie. Könnyen látható, hogy az $\mathcal{O}_X(D)$ kéve lokálisan szabad, tehát egy vonalnyaláb holomorf szeléseinek kévéje. Ha L tetszőleges vonalnyaláb, akkor az $L(D)$ *csavart vonalnyaláb* ugyanígy értelmezhető: olyan $f : U \to L$ meromorf szelésekből áll, amelyekre $(f) \leq D$.

$$L(D_1 + D_2) \simeq L(D_1)(D_2) \simeq L(D_1) \otimes \mathcal{O}_X(D_2)$$

(10) *fontos nyalábok*: T_X jelöli az érintő nyalábot, és a hozzá tartozó koherens kévét. $\Omega^1_X = T^*_X$ jelöli a ko-érintő nyalábot, $\Omega^p_X = \bigwedge^p \Omega^1_X$ jelöli a p-formák nyalábját, $\omega_X = \Omega_X^{\dim(X)}$ pedig a kanonikus nyalábot.

(11) *grassmann sokaság*: Legyen $X = \mathrm{Grass}(k, n)$ az n dimenziós tér k dimenziós altereit paraméterező grassman sokaság. Jelölje $U_X \subseteq \mathcal{O}_X^{\oplus n}$ az univerzális résznyalábot, $Q_X = \mathcal{O}_X^{\oplus n}/U_X$ az univerzális hányados nyalábot. Az érintő nyaláb:

$$T_X \simeq \mathrm{Hom}(U_X, Q_X)$$

(12) *projektív tér*: Legyen $X = \mathbb{P}^n = \mathrm{Grass}(1, n+1)$ projektív tér, $\mathcal{O}_X(-1) = U_X$ jelöli az univerzális résznyalábot, pozitív k-ra $\mathcal{O}_X(k)$ jelöli a k-adik tenzor-hatványát, $\mathcal{O}_X(-k)$ pedig az $\mathcal{O}_X(k)$ duálisát (ezek mindannyian vonal-nyalábok $\mathbb{P}^n$-en). Ha $H \subset X$ egy hipersík, akkor $\mathcal{O}_X(H) \simeq \mathcal{O}_X(1)$, tehát $\mathcal{O}_X(dH) \simeq \mathcal{O}_X(d)$ minden d-re. A $0 \to U_X \to \mathcal{O}_X^{\oplus(n+1)} \to Q_X \to 0$ egzakt sorozatban Q_X jelüli az univerzális hányados-nyalábot, ha erre alkalmazzuk a $\mathrm{Hom}(U_X, \_)$ funktort (és a grassmann sokaság érintőnyalábját kiszámító formulát) akkor az Euler seorozhoz jutunk:

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(1)^{\oplus(n+1)} \to T_X \to 0$$

egzakt. Ebből minden Ω^p_X is kiszámolható. Speciálisan:

$$\omega_X = \mathcal{O}_X(-n-1)$$

(13) *ideál kévék*: Az O_X struktúra-kéve koherens rész-kévéit koherens ideál-kévéknek hívjuk. Ideálkévékkel ugyanúgy lehet számolni, mint közönséges ideálokkal: véges sok koherens ideálkéve összege, metsze, szorzata szintén koherens ideál-kéve. Tetszőleges $\mathcal{F}$ koherens kévét megszorozhatunk egy koherens ideálkévével, így az $\mathcal{F}$ egy koherens rész-kévéjéhez jutunk. Speciális eset: ha $Z \subseteq X$ egy részsokaság, akkor $\mathcal{I}_Z \lhd \mathcal{O}_X$ jelóli a Z-ben eltűnő holomorf függvények kévéjét: $I_Z(U)$ az U-n értelmezett, $Z \cap U$-ban eltűnő holomorf függvényekből áll.

(14) *részsokaság*: Legyen $Z \overset{i}{\hookrightarrow} X$ egy zárt részsokaság. Világos, hogy $\mathcal{O}_Z(U \cap Z) \simeq (\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Z)(U)$ minden $U \subseteq X$ nyílt halmazra. Legyen $\mathcal{F}$ egy koherens kéve Z-n, $i_*\mathcal{F}$ jelöli azt a kévét X-en, amelyre $i_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(U \cap Z)$. Látható, hogy $i_*\mathcal{F}$ egy $\mathcal{O}_X/I_Z$-modulus, tehát egyben $\mathcal{O}_X$-modulus is, és koherens. Fordítva, legyen $\mathcal{G}$ egy koherens kéve X-en, és legyen $i^*\mathcal{G} = \mathcal{G}|Z$ a megszorítása: $i^*\mathcal{G}(Z \cap U) = (\mathcal{G}/\mathcal{I}_Z \cdot \mathcal{G})(U)$. Ez nem függ az U halmaztól, csak az $U \cap Z$ metszettől, és egy koherens kévét definiál Z-n.

(15) *részsokaság folytatása*: Legyen $Z \overset{i}{\hookrightarrow} X$ egy zárt részsokaság. Az előbbi $i_* : \mathrm{Coh}(Z) \to \mathrm{Coh}(X)$ és $i^* \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(Z)$ adjungált funktorok, i_* egzakt, i^* jobb-egzakt, és $i^*i_*\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}$. Ezért i_* segítségével azonosíthatjuk $\mathrm{Coh}(Z)$-t azon $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$ koherens kévékkel, amelyekre $I_z \cdot \mathcal{F} = 0$ teljesül. Ezt az azonosítás gyakran komolyan gondoljuk, és egyszerűen csak $\mathcal{F}$-et írunk $i_*\mathcal{F}$ helyett.

(16) *kohomológia részsokaságon*: Legyen $Z \overset{i}{\hookrightarrow} X$ egy zárt részsokaság és $\mathcal{F}$ koherens kéve Z-n. Ekkor minden k-ra

$$H^k(U, i_*\mathcal{F}) \simeq H^k(U \cap Z, \mathcal{F})$$

Ezt úgy láthatjuk be, hogy az i_*-ot értelmezzük tetszőleges kévékre is (ugyanazzal a formulával), és azokra is egzakt funktort kapunk. A kohomológia funktorok egyértelműségéből következik, hogy $H^k(U, i_*(\_))$ természetesen izomorf a $H^k(U \cap Z, \_)$ funktorral.

(17) *megszorítás részsokaságra*: Legyen $Z \overset{i}{\hookrightarrow} X$ egy zárt részsokaság, és $\mathcal{F}$ egy koherens kéve X-en. Az $\mathcal{F}$ *megszotítása* Z-re az $\mathcal{F}|_Z = i_*i^*\mathcal{F}$ koherens kéve (ha $\mathrm{Coh}(X)$ elemeként gondolunk rá). Könnyen látható, hogy $\mathcal{F}|_Z = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z$. Ekkor X-en felírhatunk egy egzakt sorozatot:

$$0 \to I_Z \cdot \mathcal{F} \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}|_Z \to 0$$

(18) *adjunkciós formula* Legyen $Z \overset{i}{\hookrightarrow} X$ egy zárt részsokaság. Ekkor a következő sorozat egzakt:

$$0 \to I_Z/I_Z^2 \to \Omega_X^1\Big|_Z \to \Omega_1^Z \to 0$$

Ennek a determinánsa:

$$\omega_Z = \omega_X\Big|_Z \otimes \det(I_Z/I_Z^2)^{-1}$$

Ezekben a formulákban I_Z/I_Z^2 a részsokaság ko-normális nyalábja. Ha Z nem részsokaság, csak zárt analitikus részhalmaz, akkor a sorozat bal oldalon nem marad egzakt.

(19) *egy kodimenziós részsokaság*: Legyen $Z \subset X$ egy kodimenziós részsokaság (vagy zárt analitikus halmaz) X-ben. Ekkor Z divízor is egyben, és az ideálkévéje $I_Z \simeq \mathcal{O}_X(-Z)$ (közvetlenül látható a definícióból: mindkettőben a Z mentén eltűnő holomorf függvények élnek).

(20) *invertálható függvények*: Legyen $\mathcal{O}_X^*(U)$ az U halmazon értelmezett, sehol sem nulla holomorf függvények csoportja a szorzásra nézve. Az O_X^* nem koherens, még csak nem is $\mathcal{O}_X$-modulus, mégis roppant fontos.

(21) *exponenciális sorozat* Az exponenciális leképezée (e^z) holomorf, összeget szorzatba visz, és a zérushelye a $2\pi i$ egésszamú többszörösei. $\mathbb{C}^*$ egyszeresen összefüggő tartományain van inverze is: a logaritmus függvény. Tehát kapunk egy egzakt sorozatot:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{O}_X \to\xrightarrow{e^z} \mathcal{O}_X* \to$$

Ez egy konkrét példa arra, hogy az utolsó leképezés csak egyszeresen összefüggő U nyílt halmazok feletti szeléseken szürjektív, egy kör gyűrűn pl. nem (hiszen ott nincs logaritmus). Szerencsére mindenki lefedhető pl. konvex nyílt halmazokkal.

(22) *Picard csoport*: Az egyenes nyalábok X-en Abel csoportot alkotnak a tenzorszorzásra nézve, az inverz a duális. Ezt a csoportot $\mathrm{Pic}(X)$-szel jelóljük. A nzalábokat invertálható áttérési függvények segítségével szoktuk megadni, ebből látható, hogy

$$\mathrm{Pic}(X) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$$

(23) *A Picard csoport kiszámítása*: A Picard csoport megjelenik az exponenciális sorozathoz tartozó hosszú egzakt sorozatban, abból jól számolható:

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X) \to \mathrm{Pic}(X) \to H^2(X, \mathbb{Z})$$

Ha X kompakt, akkor a baloldali leképezés injektív (mert a sorozatban előtte a szürjektív $\mathbb{C} \xrightarrow{e^z} \mathbb{C}^*$ áll), $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ pedig egy véges dimenziós vektortér. Ha még azt is tudjuk, hogy X projektív (vagy Kähler), akkor $H^1(X, Z)$ maximális rangú diszkrét részcsoport $H^1(X, \mathcal{O}_X)$-ben, a hányadosuk tehát egy komplex tórusz:

$$\mathrm{Pic}^0(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X)/H^1(X, \mathbb{Z})$$

A jobb oldalon álló $H^2(X,\mathbb{Z})$ viszont egy végesen generált Abel csoport, tehát diszkrét. Egy vonalnyaláb képe $H^2(X,\mathbb{Z})$-ben éppen az első Chern osztálya. Ha X megint projektív, akkor Hodge elmélet segítségével a jobboldalon álló leképezés képét is beazonosíthatjuk: $H^2(X,\mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X)$.

4. A projektív tér kohomológiái

Ebben a fejezetben ak $\mathbb{P}^n$ projektív teret vizsgáljuk., Legyen $H \subset \mathbb{P}^n$ egy hipersík. Ekkor minden d egészre definiálhatjuk az $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(dH)$ vonalnyalábokat.

Legyen $\phi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ a projektív tér szokásos előállítása, ez egy principális $\mathbb{C}^*$-nyaláb. A $\mathbb{C}^*$ csoport minden χ karaktere megad egy kompatibilis $\mathbb{C}^*$ hatást a $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}$ triviális nyalábon:

$$a \cdot (p, v) = (a \cdot p, \chi(a) \cdot v)$$

és ha a triviális nyalábot leosztjuk ezzel a $\mathbb{C}^*$ hatással, akkor kapunk egy vonal-nyalábot $\mathbb{P}^n$-en. A $\mathbb{C}^*$ karaktereit az egésszámok paraméterezik: $\chi_d : a \to a^d$, és a χ_d karakterből éppen az $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ nyalábhoz jutunk.

A d fokú homogén n-változós polinomok megadják a $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}$ triviális nyaláb egy szelését, amelyik invariáns a χ_d karakterből származó $\mathbb{C}^*$ hatásra. Ez zért megadják az $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ nyaláb egy szelését is.

Ezt másképpen is láthatjuk: Ha a H hipersík egyenlete $x = 0$, és p egy homogén d fokú polinom, akkor $\frac{p}{x^d}$ egy racionális törtfüggvény $\mathbb{P}^n$-en, amelyiknek a H mentén van legfeljebb d-szeres pólusa, tehát az $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(dH)$ nyalábnak is szelése. Ebből a felírásból az is látható, hogy különböző polinomokhoz különböző szelések tartoznak.

Tétel 4.1. *Minden n, d, i egészre kiszámítjuk az n dimenziós projektív téren a $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ kohomológia csoportokat:*

(1) $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ *izomorf az $(n+1)$-változós d fokú homogén polinomok terével (lásd fent).*
(2) $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = 0$ *ha* $0 < i < n$.
(3) $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \simeq H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d-n-1))^*$ *mindig.*

5. Fontos tételek koherens kévék kohomológiáiról

Ebben a fejezetben párhuzamosan lesz szó komplex sokaságokról, és algebrai varietásokról. A tételeket egyszerre mondom ki mindkét kategóriára: legyen X egy komplex sokaság, vagy egy algebrai varietás... Értelemszerűen, minden további objektum

Tétel 5.1 (Koherens kohomológia eltűnése)**.** *Legyen X egy n dimenziós komplex sokaság, vagy egy n dimenziós algebrai varietás és $\mathcal{F}$ egy* *koherens kéve. Ekkor*

$$H^p(U, \mathcal{F}) = 0 \qquad ha\; p > n$$

Bizonyítási ötletek. Algebrai eset: Noether topológikus tereken tetszőleges kévékre igaz, nem csak koherensekre. Lásd Hartshorn könyvét. Komplex eset: Ha sikerül olyan $\{U_i\}$ fedést találni, amelyikben bármely $n+2$ fedő halmaz metszete diszjunkt, akkor a fedéshez tartozó Čech kohomológiák eltűnnek $p > n$-re. Minden fedésnek van ilyen finomítása (parakompakt terek topológikus dimenziója), tehát a Čech kohomológiára érvényes az eltűnés. Parakompakt Hausdorff tereken a Čech kohomológia megegyezik a (derivált funktor) kohomológiával.

Definíció 5.2 (Stein sokaság)**.** *Egy X komplex sokaságot* Stein sokaságnak *hívunk, ha rendelkezik a következő – ekvivalens – tulajdonságok valamelyikével:*

1. *X biholomorf $\mathbb{C}^N$ egy zárt részsokaságával (valamilyen N-re).*
2. *X biholomorf egy $U \subseteq \mathbb{C}^N$ konvex nyílt halmaz egy zárt részsokaságával.*
3. *Létezik X-en szigorúan pluri-szubharmónikus függvény, amelyiknek minden szinthalmaza kompakt.*

Tétel 5.3 (Serre tétele)**.** *Legyen X egy komplex sokaság, vagy egy algebrai varietás. A következő tulajdonságok ekvivalensek:*

1. *X Stein sokaság, vagy affin varietás.*
2. *$H^0(X, \_\_)$ egy egzakt funktor a koherens kévék kategóriáján, megad egy ekvivalenciát a koherens kévék kategóriája és a végesen generált $\mathcal{O}_X(X)$-modulusok kategóriája között.*
3. *$H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ minden $\mathcal{F}$ koherens kévére.*
4. *$H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ minden $i > 0$ fokszámra és minden $\mathcal{F}$ koherens kévére.*

A bizonyítás a komplex esetben mély analízis, az algebrai megfelelője viszonylag könnyű.

Definíció 5.4 (Projektív varietások)**.** *Egy X algebrai varietást (vagy kompleex sokaságot)* projektívnak *mondunk, ha izomorf egy $\mathbb{P}^N$ proojektív tér egy részvarietásával (zárt részsokaságával). Az $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(k)$ egyenesnyaláb megszorítását X-re $\mathcal{O}_X(k)$-val jelöljük. (Ez függ a konkrét beágyazástól!) Ha $\mathcal{F}$ tetszőleges koherens kéve X-en, akkor $\mathcal{F}(k)$ jelöli az $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(k)$ koherens kévét.*

Tétel 5.5 (Koherens kohomológia véges dimenziós)**.** *Legyen X egy kompakt komplex sokaság, vagy egy projektív varietás. Ekkor $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ izomorf az alap-testtel (tehát $\mathbb{C}$ a komplex esetben), és minden $\mathcal{F}$ koherens kéve minden $H^p(X, \mathcal{F})$ kohomológia csoportja véges dimenziós vektortér.*

Megjegyzés: A komplex eset nehéz analízis. Az algebrai eset lényegesen könnyebb. A tétel (és általánosítása "proper" leképezésekre) talán a legfontosabb végességi tételek az algebrai geometriában.

Tétel 5.6. *Legyen X egy n dimenziós projektív varietás. Ekkor találhatunk m, d egészszámokat, hogy $\mathcal{F}$ az $\mathcal{O}_X(d)^{\oplus m}$ lokálisan szabad kéve faktora. Ezért ilyen alakú kévékből készíthető lokálisan szabad feloldás. Ha X nem szinguláris, akkor találhatunk egy n hosszúságú lokálisan szabad feloldást is:*

$$0 \to \mathcal{E}_n \to \cdots \to \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{F} \to 0$$

Bizonyítási ötlet: Ha $H \subset \mathbb{P}^N$ egy hipersík, akkor $U = X \setminus H$ egy affin varietás, tehát rengeteg szelése van $\mathcal{F}(U)$-ban. Ha $s \in \mathcal{F}(U)$ egy szelás, akkor csak véges rendű pólusai lehetnek $H \cap X$ mentén, tehát elég nagy e-re s kiterjed $\mathcal{F}(eH) \simeq \mathcal{F}(e)$ egy szelésévé. Ez ad egy $\mathcal{O}_X(-e) \to \mathcal{F}$ nem nulla homomorfizmust. Ezel a módszerrel lehet lokálisan szabad feloldásokat építeni. Az X lokális gyűrűi regulárisak, a projektív dimenziójuk éppen n, tehát a feloldás n-edik lépésében a mag lapos modulus, azaz lokálisan szabad. Így a feloldást az n-edik lépésben befejezhetjük.

Tétel 5.7 (Serre eltűnés). *Legyen X egy projektív varietás és $\mathcal{F}$ egy koherens kéve X-en. Ekkor $H^p(X, \mathcal{F})$ egy véges dimenziós vektortér minden p-re, és elég nagy ($\mathcal{F}$-től függő) k esetén*

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathcal{F}(k)) \otimes \mathcal{O}_X \twoheadrightarrow \mathcal{F}(k) &\qquad \textit{szürjektív, és} \\ H^p(X, \mathcal{F}(k)) = 0 &\qquad \textit{ha } p > 0. \end{aligned}$$

Tétel 5.8 (Serre dualitás). *Legyen X egy n dimenziós sima projektív varietás, és $\mathcal{E}$ egy vektornyaláb X-en. (Tehát véges rangú lokálisan szabad $\mathcal{O}_X$-modulus.) Ekkor*

$$H^i(X, \mathcal{E}^* \otimes \omega) \simeq H^{n-i}(X, \mathcal{E})^*$$

minden i-re. Itt $(\ )^*$ a duálist jelenti.

Tétel 5.9 (Riemann-Roch tétel). *Legyen C egy g nemű sima projektív görbe és $\mathcal{L}$ egy vonalnyaláb rajta. Ekkor*

$$\dim H^0(C, \mathcal{L}) + \dim H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}^{-1}) = \deg \mathcal{L} + 1 - g$$

Tétel 5.10 (Kodaira eltűnés). *Legyen X egy n dimenziós sima projektív varietás a komplex számok felett, és $\mathcal{L}$ egy bőséges vonalnyaláb X-en. Ekkor*

$$\begin{aligned} H^i(X, \mathcal{L} \otimes \omega_X) = 0 &\qquad \textit{ha } i > 0 \\ H^i(X, \mathcal{L}^{-1}) = 0 &\qquad \textit{ha } i < n \end{aligned}$$

Konstrukció: Legyen X egy sima (azaz nem szinguláris) algebrai varietás a komplex számtest felett. Ekkor minden $U \subset X$ affin részhalmaz beábyazható $\mathbb{C}^N$-be (valamilyen N-re) mint affin részvarietás. De $\mathbb{C}^n$-nek van egy standard analitikus struktúrája is, ennek segítségével az U komplex sokasággá tehető, és ez a komplex struktúra nem függ a választott $U \to \mathbb{C}^N$ beágyazástól. Sőt, az egyes affin nyílt halmazokon kapott komplex struktúrák kompatibilisek, és az egész X-ből is egy X^{an} komplex sokaságot csinálnak. Ez a sokaság nem függ semmilyen választástól, csak magától az X-től. A konstrukció akkor is működik, ha nem kötjük ki, hogy X sima legyen, de ilyenkor sokaság helyett csak komplex analitikus teret kapunk.

Legyen most $\mathcal{F}$ egy koherens kéve X-en. Ekkor találhatunk olyan U affin nyílt halmazt, amely felett F-nek van egy véges prezentációja: $\mathcal{O}_U^m \xrightarrow{M} \mathcal{O}_U^n \to \mathcal{F} \to 0$. Az M leképezés egy $\mathcal{O}_U(U)$-beli függvényekből összerakott mátrix, tehát értelmezhetjük úgy, mint egy U^{an} fölötti holomorf függvényekből álló mátrix. Ennek segítségével legyárthatunk egy $(\mathcal{F}|_U)^{\mathrm{an}}$ koherens kévét (meg a prezentációját) az U^{an} téren. Egy egyszerű számolgatás mutatja, hogy a konstrukció nem függ a választásainktól, csak az eredeti $\mathcal{F}$ kévétól, és a kapott kévék összeragadnak egy $\mathcal{F}^{\mathrm{an}}$ koherens kévévé az X^{an} téren.

A most következő tétel nagyon mély, rengeteg fontos következménye van. A bizonyításról most nem szólok semmit.

Tétel 5.11 (Serre GAGA tétele)**.** *Legyen X egy projektív varietás és legyen X^{an} az X-hez tartozó analitikus tér (mint fent). Az*

$$(\ )^{\mathrm{an}} : \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(X^{\mathrm{an}})$$

funktor egy ekvivalencia a két kategória között, egzakt, és megőrzi a kohomológia csoportokat:

$$H^p(X, \mathcal{F}) \simeq H^p(X^{\mathrm{an}}, \mathcal{F}^{\mathrm{an}})$$

minden p-re és minden $\mathcal{F}$ koherens kévére.