

Kombinatorikus Geometria

Nemes Gergő

Előszó

A jegyzet Kiss György "Kombinatorikus geometria" című kurzusának előadásai alapján készült, melyet a 2011-es év őszi félévében tartott az Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikus M. Sc. szakos hallgatói számára. Törekedtem arra, hogy ahol csak lehet, világosabbá tegyem az elhangzottakat, megkönnyítve ezzel a vizsgára készülő hallgatók munkáját. Észrevételeket, megjegyzéseket, pontosításokat és javításokat szívesen fogadok.

Nemes Gergő

Tartalomjegyzék

Előszó	iii
Tartalomjegyzék	v
1. Véges geometriák	1
1.1. Projektív síkok	1
1.2. Az n -edrendű sík, véges affin síkok	4
1.3. Részsíkok	7
1.4. Magasabb dimenziós projektív terek	10
1.5. Ívek, teljes ívek	12
1.6. Oválisok, focibajnokságok	16
1.7. Segre tétele	19
1.8. Ovoidok és másodrendű felületek	24
1.9. Möbius síkok	27
1.10. Hermite-görbék és felületek	31
1.11. Lefogó pontthalmazok	37
1.12. Általánosított sokszögek és négyszögek	39
2. Konvex geometria	47
2.1. Konvex halmazok, támaszhipersíkok, elválasztási tételek	47
2.2. Helly tétele és alkalmazásai, Jung tétele	49
2.3. Szabályos politópok, Schläfli-szimbólum	56
2.4. Politópok kombinatorikus tulajdonságai	60
2.5. Poláris halmazok	62
2.6. A tér felosztásai hipersíkokkal	65
Az előadóról	67
Irodalomjegyzék	69

1. fejezet

Véges geometriák

Ebben a fejezetben a projektív síkok geometriai és kombinatorikus tulajdonságait vizsgáljuk. Defináljuk a projektív és affin síkokat, vizsgáljuk az íveket, teljes íveket, lefogó ponthalmazokat. Bevezetjük a Mőbius síkokat, a Hermite-görbéket és felületeket. Végül az általánosított sokszögeket tárgyaljuk.

1.1. Projektív síkok

A vizsgatematikában ez az első tétel.

1.1.1. Definíció. A $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, I)$ hármast **projektív síknak** nevezzük, ha $\mathcal{P}$ és $\mathcal{E}$ két különböző halmaz (**pontok** és **egyenesek** halmaza), I pedig egy **illeszkedésnek** nevezett reláció $\mathcal{P} \times \mathcal{E}$ -n, továbbá teljesülnek a következő axiómák:

(P1) bármely két különböző ponthoz egyértelműen létezik őket összekötő egyenes;

(P2) bármely két különböző egyenesnek egyértelműen létezik metszéspontja;

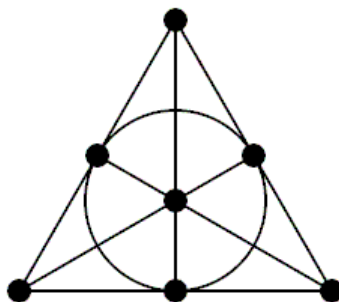
(P3) bármely egyenesre legalább 3 pont illeszkedik;

(P4) bármely ponton át legalább 3 egyenes megy.

Figyeljük meg a (P1), (P2) és a (P3), (P4) axiómák duális kapcsolatát!

Megjegyzés. A (P1) és (P2) axiómák mellett a (P3) és (P4) axiómák ekvivalensek a következő (P5) axiómával: létezik négy általános helyzetű pont (semelyik három nem kollineáris).

Példa. Tekintsünk egy háromdimenziós V vektorteret egy $\mathbb{K}$ test felett. A V egydimenziós altereit nevezzük pontoknak, kétdimenziós altereit egyeneseknek. Egy pont illeszkedjen egy egyenesre, ha a megfelelő kétdimenziós altér tartalmazza az egydimenziósat. Belátható, hogy így projektív síkot kapunk (lásd a számolást az előadáson), ez a *testtel koordinátázott sík*. Az ilyen típusú síkokra részletesebben visszatérünk majd az 1.3 részben. Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor a *klasszikus projektív sík*ot kapjuk, ha $\mathbb{K} = \text{GF}(q)$ a q elemű test, akkor a $\text{PG}(2, q)$ jelölést használjuk (kétdimenziós projektív geometria a q elemű test felett). Ha $q = 2$, akkor $\text{PG}(2, 2)$ izomorf a *Fano-síkkal* (lásd az 1.1 ábrát). ♣



1.1. ábra. A Fano-sík.

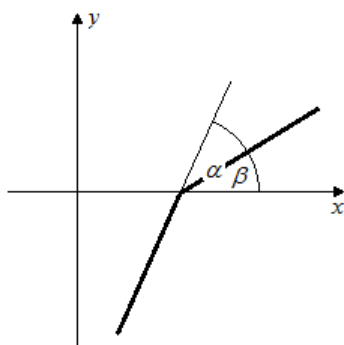
1.1.1. Tétel (Desargues tétele). *A klasszikus projektív síkon két háromszög pontosan akkor pontra nézve perspektív ha egyenesre nézve perspektív.*

Megmutatható, hogy Desargues tétele igaz vektortérből származtatott projektív síkokra is. *Desarguesi síkoknak* nevezzük az olyan projektív síkokat ahol igaz a tétel. Léteznek azonban olyan projektív síkok, melyekben nem igaz Desargues tétele (*nem desarguesi síkok*). Ez utóbbira példa a következő:

Példa. (Moulton-sík) A klasszikus projektív síkot fogjuk módosítani. A Moulton-sík pontjai legyenek a klasszikus projektív sík pontjai ($\mathbb{R}^2$ és az ideális pontok). Az egyenesek definiálásához vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert. Az egyenesek a következők legyenek: klasszikus projektív sík ideális egyenese, a sík függőleges egyenesei, a nempozitív meredekségű egyenesek ($y = mx + k$, ahol $m \leq 0$), továbbá a pozitív meredekségű egyenesek "eltörtjei". Ez utóbbi alatt a következőt értjük. Az egyenes alsó félsíkba eső része legyen az eredeti, a felső

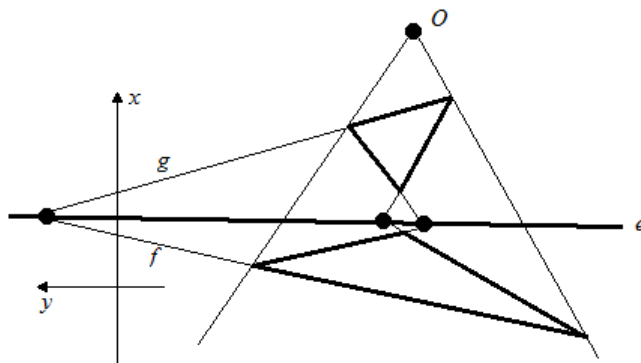
félsíkba eső részét viszont eltörjük: az eredeti α szögű meredekség helyett β szögű meredekséggel haladjon tovább, ahol $2 \tan \beta = \tan \alpha$ (így továbbra is lesz tetszőleges meredekségű egyenes) (lásd az 1.2 ábrát).

Az illeszkedést a következő módon definiáljuk. Az "eltört" egyeneseket le-számítva minden a régi. Azoknál is csak az ideális pontjukkal van baj. Ezt úgy orvosoljuk, hogy eldöntjük, hogy minden ilyen egyenesnél egységesen a törött vagy az eredeti részhez tartozó ideális pontot tekintjük az ő ideális pontjának. Megmutatható, hogy az így kapott Moulton-sík projektív sík.



1.2. ábra. A Moulton-sík konstrukciója.

Megmutatjuk, hogy a Moulton-síkon nem igaz Desargues tétele. A klasszikus projektív síkon teljesül a tétel (1.3 ábra). A két (O -ra nézve) perspektív háromszög oldalainak meghosszabbításainak metszéspontjai egy e egyenesen helyezkednek el.



1.3. ábra. Desargues tétele.

A Moulton-síkon az f és g egyenes viszont nem az e egyenesen metszi egymást

mert (a koordinátarendszer elhelyezéséből adódóan) az f eltörik az x -tengely felett. Ezzel beláttuk, hogy a Moulton-sík nem desarguesi sík. ♣

1.2. Az n -edrendű sík, véges affin síkok

A vizsgatematikában ez a második tétel.

1.2.1. Állítás. *A $\text{PG}(2, q)$ síkon $q^2 + q + 1$ pont és ugyanennyi egyenes van.*

Bizonyítás. A $\text{GF}(q)$ test feletti háromdimenziós vektortérben q^3 elem van. Megszámoljuk az egydimenziós alterek számát (ami éppen a pontok száma $\text{PG}(2, q)$ -ban). Egy egydimenziós alteret 1 vektor generál, amit $(q^3 - 1)$ -féleképpen választhatunk (a $\mathbf{0}$ vektort nem). Egy egydimenziós altérben q vektor van, ezek közül a $\mathbf{0}$ vektort kivéve mindegyik generálja őt. Így összesen

$$\frac{q^3 - 1}{q - 1} = q^2 + q + 1$$

különböző egydimenziós altér van, és így ennyi pont van $\text{PG}(2, q)$ -ban. Hasonló gondolatmenettel látható, hogy

$$\frac{(q^3 - 1)(q^3 - q)}{(q^2 - 1)(q^2 - q)} = \frac{q^3 - 1}{q - 1} = q^2 + q + 1$$

különböző kétdimenziós altér van, és így ennyi egyenes van $\text{PG}(2, q)$ -ban (Érvényesül a dualitás!). ■

1.2.2. Tétel. *Ha egy projektív síknak van olyan egyenese amin pontosan $n + 1$ pont van, akkor*

- (i) *van olyan pont amin át $n + 1$ egyenes megy;*
- (ii) *minden egyenesen $n + 1$ pont van;*
- (iii) *minden ponton át $n + 1$ egyenes megy;*
- (iv) *a síkon összesen $n^2 + n + 1$ pont és ugyanennyi egyenes van.*

1.2.1. Definíció. *Az ilyen projektív síkot n -edrendű síknak nevezzük ($n \geq 2$).*

Tétel bizonyítása. *(i) igazolása:* Legyen e a sík azon egyenese amin $n + 1$ pont van. Van olyan P pont, ami nem illeszkedik e -re. Ha nem lenne, akkor a sík összes pontja e -n rajta lenne. A (P4) axióma szerint még legalább 2 egyenes menne át P -n. Ezek a (P2) axióma miatt nem metszhetik máshol e -t, de akkor nekik csak egy pontjuk van, ami ellentmond a (P3) axiómának. Van tehát egy e -re nem illeszkedő P pontunk. Ha a (P1) és (P2) axiómákat alkalmazzuk P -re és az e egyenes $n + 1$ pontjára, akkor azt kapjuk, hogy legalább $n + 1$ egyenes megy át P -n. Több nem is lehet, mert egy újabb a (P2) axióma miatt metszené e -t, a (P1) axióma miatt egy $(n + 2)$ -edik pontban, ami nem lehet. Általában:

Ha R és f nem illeszkedő pont-egyenes pár, akkor az R -en átmenő egyenesek száma megegyezik az f -en lévő pontok számával. (*)

(ii) igazolása: Legyen e a sík azon egyenese amin $n + 1$ pont van. Legyen h egy e -től különböző egyenes. Az előző gondolatmenet alapján van olyan Q pont, ami nem illeszkedik e -re. A Q választható úgy is, hogy h -ra se illeszkedjen. Ha nem így lenne, akkor minden pont vagy e -n vagy h -n rajta lenne. A (P4) axióma szerint lenne még legalább 1 egyenes ami átmegy Q -n. Ennek a (P2) axióma miatt nem lehet több metszéspontja sem e -vel sem pedig h -val, így csak egy pontja van, ami ellentmond a (P3) axiómának. Van tehát egy Q pont, ami sem e -re sem h -ra nem illeszkedik. A (*) szerint Q -n ugyanannyi egyenes megy át mint ahány pont van e -n, illetve ugyanannyi egyenes megy át mint ahány pont van h -n. Tehát h -n ugyanannyi pont van mint e -n: $n + 1$ darab.

(iii) igazolása: Az előzőek alapján csak az e -n lévő pontokról nem tudjuk, hogy rajtuk éppen $n + 1$ egyenes megy át. Legyen E az e egy pontja. Vegyünk egy P pontot ami nem illeszkedik e -re (láttuk, hogy ilyen van). Legyen h egy olyan egyenes, ami P -t és az e egy E -től különböző pontját köti össze, a (P1) axióma miatt van ilyen. A h nem az e , mert P nincs az e -n, így h nem mehet át E -n is mert akkor a (P2) axióma sérülne. A (ii) pont miatt h -n $n + 1$ pont van, a (*) szerint így az E -n $n + 1$ egyenes megy át.

(iv) igazolása: Vegyünk egy P pontot a síkon. A (iii) pont szerint ezen $n + 1$ egyenes megy át. Minden egyenesen van további n pont. Ezek mind különböznek egymástól, mert különben két egyenes 2 pontban metszené egymást ellentmondásban a (P2) axiómával. Így a síkon legalább $1 + (n + 1)n = n^2 + n + 1$ pont van.

Több pont nem lehet: ha lenne még egy Q pontunk, akkor az nem lenne rajta az előbbi $n + 1$ egyenesen. A (P1) axióma miatt lenne egy Q -n és P -n átmenő egyenes, és így P -n $n + 2$ egyenes menne át, ami nem lehet a (iii)-as pont miatt. A pontok és az egyenesek szerepcseréjével kapjuk, hogy ugyanennyi egyenes van a síkon (dualitás). ■

1.2.2. Definíció. A $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, I)$ hármast **affin síknak** nevezzük, ha $\mathcal{P}$ és $\mathcal{E}$ két különböző halmaz (**pontok** és **egyenesek** halmaza), I pedig egy **illeszkedésnek** nevezett reláció $\mathcal{P} \times \mathcal{E}$ -n, továbbá teljesülnek a következő axiómák:

- (A1) bármely két különböző ponthoz egyértelműen létezik őket összekötő egyenes;
- (A2) minden nem illeszkedő (P, e) pont-egyenes párhoz egyértelműen létezik a P -n átmenő, az e -t nem metsző egyenes;
- (A3) létezik három nem kollineáris pont (háromszög).

1.2.3. Definíció. Az *affin síkon* két egyenes **párhuzamos** ha nincs közös pontjuk, vagy egybe esnek.

1.2.3. Állítás. A párhuzamosság ekvivalencia-reláció az egyenesek halmazán.

Bizonyítás. A párhuzamosság reflexív és szimmetrikus a definíció szerint. A tranzitivitás kell. Tegyük fel, hogy e és f valamint f és g párhuzamos (mind különbözőnek). Ha e -nek és g -nek volna egy közös P pontja, akkor (P, f) nem illeszkedő pont-egyenes pár lenne. Ehhez a párhoz két olyan egyenes is van (e és g), ami átmegy P -n és nem metszi f -et, ellentmondásban az (A2) axiómával. ■

1.2.4. Definíció. Az ekvivalencia-osztályokat **ideális pontoknak** nevezzük. Az **ideális egyenes** az ideális pontokat (és más pontokat nem) tartalmazó egyenes.

1.2.4. Állítás. Legyen $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, I)$ affin sík. Ha $\mathcal{P}$ -hez hozzávesszük az ideális pontokat, $\mathcal{E}$ -hez az ideális egyenest, és I -t értelemszerűen kiterjesztjük, akkor projektív síkot kapunk. Az így kapott projektív síkot az eredeti affin sík **projektív lezártjának** nevezzük.

1.2.5. Állítás. *Ha egy affin síknak van olyan egyenese amin pontosan n pont van, akkor*

- (i) *minden egyenesen n pont van;*
- (ii) *minden ponton át $n + 1$ egyenes megy;*
- (iii) *a síkon összesen n^2 pont és $n^2 + n$ egyenes van.*

Bizonyítás. Készítsük el az affin sík projektív lezártját, majd alkalmazzuk a 1.2.2 Tételt, végül töröljük az ideális pontokat és az ideális egyenest. ■

1.2.5. Definíció. *Az ilyen affin síkot n -edrendű affin síknak nevezzük ($n \geq 2$) és $AG(2, n)$ -nel jelöljük.*

1.3. Részsíkok

A vizsgatematikában ez a hatodik tétel.

1.3.1. Definíció. *Legyen $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, I)$ projektív (vagy affin) sík. A $(\mathcal{P}', \mathcal{E}', I')$ hármas **részsík**, ha projektív (vagy affin) sík és*

- (i) $\mathcal{P}' \subsetneq \mathcal{P}$;
- (ii) $\mathcal{E}' \subsetneq \mathcal{E}$;
- (iii) $I' = I|_{\mathcal{P}' \times \mathcal{E}'}$.

Példa. A testtel koordinátázott síkokat vesszük szemügyre. Legyen $\mathbb{K}$ tetszőleges test és tekintsük a $PG(2, \mathbb{K})$ projektív síkot. A pontok a $\mathbb{K}$ feletti vektortér egydimenziós alterei. Rögzítsünk egy bázist a térben. Egy alteret egy $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} = (x_1 : x_2 : x_3)$ vektorral generálhatunk. Ez egy pontot reprezentál a $PG(2, \mathbb{K})$ síkon. Persze a $\lambda \mathbf{v} = (\lambda x_1 : \lambda x_2 : \lambda x_3)$, $\mathbb{K} \ni \lambda \neq 0$ vektor is ugyanazt az alteret generálja, és így ugyanazt a pontot reprezentálja. Az $(x_1 : x_2 : x_3)$ felírást a pont *homogén koordinátáinak* nevezzük. *Normált koordinátahármas* ha az utolsó nem nulla koordináta 1. Az egyenesek a $\mathbb{K}$ feletti vektortér kétdimenziós alterei. Őket az

ortogonális kiegészítő altér egy generáló vektorának homogén koordinátaival reprezentáljuk. Jelölésben: $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} = [u_1 : u_2 : u_3]$ ($\lambda \mathbf{u} = [\lambda u_1 : \lambda u_2 : \lambda u_3]$, $\mathbb{K} \ni \lambda \neq 0$ ugyanazt az egyenest reprezentálja). Az $(x_1 : x_2 : x_3)$ pont és az $[u_1 : u_2 : u_3]$ egyenes illeszkednek, ha

$$\sum_{j=1}^3 x_j u_j = 0.$$

Ha $\mathbb{F} \subsetneq \mathbb{K}$, akkor $\text{PG}(2, \mathbb{F}) \subsetneq \text{PG}(2, \mathbb{K})$. Ez példa részsíkra. ♣

Tekintsük a $\text{PG}(2, \mathbb{R}) \subsetneq \text{PG}(2, \mathbb{C})$ projektív síkokat. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban a részsíkot *kicsi síknak*, a tartalmazó síkot *nagy síknak* nevezzük. A nagy sík egy egyenesének vajon hány pontja esik a kicsi síkba? Azaz ha $[u_1 : u_2 : u_3]$ tetszőleges egyenes, akkor ezen mikor van a valós sík egy $(x_1 : x_2 : x_3)$ pontja? Legyen $u_j = a_j + ib_j$ ($j = 1, 2, 3$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$). Az $(x_1 : x_2 : x_3)$ pont pontosan akkor van az $[u_1 : u_2 : u_3]$ egyenesen, ha

$$\sum_{j=1}^3 x_j u_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^3 x_j (a_j + ib_j) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^3 x_j a_j = 0 \text{ és } \sum_{j=1}^3 x_j b_j = 0.$$

Azaz az $(x_1 : x_2 : x_3)$ pont illeszkedik az $\mathbf{a} = [a_1 : a_2 : a_3]$ és a $\mathbf{b} = [b_1 : b_2 : b_3]$ valós síkbeli egyenesekre (itt persze egyik egyenes sem lehet $[0 : 0 : 0]$ alakú, de ez feltehető, mert különben nyilvánvaló lenne a válasz az eredeti kérdésre). Két eset van: $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egybe esnek vagy egyetlen pontban metszik egymást. A második eset azt jelenti, hogy a

$$\sum_{j=1}^3 x_j a_j = 0 \text{ és } \sum_{j=1}^3 x_j b_j = 0$$

egyenleteket (homogén értelemben) egy $(x_1 : x_2 : x_3)$ kicsi síkbeli pont elégíti ki. Tehát ilyenkor a nagy síkbeli egyenesnek egy pontja esik a kicsi síkba. Nézzük az első esetet: $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egybe esnek. Ez azt jelenti, hogy $a_j = \lambda b_j$ ($j = 1, 2, 3$, $\mathbb{R} \ni \lambda \neq 0$), azaz

$$u_j = a_j + ib_j = \lambda b_j + ib_j = (\lambda + i) b_j.$$

Ez azt jelenti, hogy $[u_1 : u_2 : u_3]$ és $[b_1 : b_2 : b_3]$ ugyanazt az egyenest reprezentálják a $\text{PG}(2, \mathbb{C})$ síkban. Minden koordinátája valós: a $\text{PG}(2, \mathbb{R})$ sík egyenese ez, illetve annak kiterjesztése a $\text{PG}(2, \mathbb{C})$ síkra.

1.3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy valamely n -edrendű projektív síknak van m -edrendű részsíkja. Ekkor két eset lehetséges:*

(i) $n = m^2$ és ekkor a nagy sík minden egyenesének van közös pontja a kicsi síkkal;

(ii) $n \geq m^2 + m = m(m + 1)$.

Példa. $\text{PG}(2, q) \subsetneq \text{PG}(2, q^2)$, itt $n = m^2$.



Tétel bizonyítása. A nagy sík egy egyenesre a kicsi síkot 0, 1 vagy $m + 1$ pontban metszi. Ha két különböző pontban metszené, akkor ő a kicsi síkban is egyenes (megszorítva): a két pontot összekötő egyértelmű egyenes. Mivel a kicsi sík m -edrendű, így ilyenkor ennek az egyenesnek $m + 1$ pontja van a kicsi síkban. Tehát valóban csak a felsorolt három eset lehetséges. A kicsi síkot 0, 1 illetve $m + 1$ pontban metsző egyenest rendre *elkerülő*, *érintő* és *szelő* egyenesnek hívjuk.

Legyen P a nagy sík olyan pontja, ami nincs a kicsi síkban. Jelöljük e , t és s betűkkel a P -n átmenő, a kicsi síkot elkerülő, érintő és szelő nagy síkbeli egyenesek számát. Figyelembe véve, hogy a kicsi síknak $m^2 + m + 1$ pontja van,

$$(i) \quad m^2 + m + 1 = 0 \cdot e + 1 \cdot t + (m + 1) \cdot s.$$

Az n -edrendű nagy síkban minden ponton és így P -n is $n + 1$ egyenes megy át, így

$$(ii) \quad n + 1 = e + t + s.$$

A nagy síkban bármely két egyenesnek egy metszéspontja van (mert projektív sík). Mivel a szelők P -ben metszik egymást, így a kicsi síkban már nem metszhetik egymást. De ezek a kicsi síkra megszorítva, a kicsi síkban kellene hogy messék egymást, mert az is projektív sík. Így legfeljebb egy szelő lehet, azaz $s = 1$ vagy $s = 0$.

Nézzük először az $s = 1$ esetet. Az (i) egyenlet szerint ekkor $t = m^2$. Ezt és a (ii) egyenletet használva $n + 1 = e + m^2 + 1$, azaz $n = e + m^2$. Ha $e = 0$, akkor a nagy sík minden egyenesének van közös pontja a kicsi síkkal és $n = m^2$. Ha $e \neq 0$, akkor vegyünk egy f elkerülő egyenest. A kicsi sík minden egyenesének a nagy síkra kiterjesztettje különböző pontban metszi f -et. Ha lenne két egyenes amik ugyanott metszik, akkor a nagy síkban (és így a kicsiben is) ez lenne az egyértelmű

metszéspontjuk. Mivel a kicsi sík is projektív, így muszály hogy ez a metszéspont ő benne legyen, ami nem lehet mert f elkerülő. Tehát a kicsi sík egyenesei legfeljebb annyian vannak mint ahány pontja van az f elkerülő egyenesnek. A kicsi síknak $m^2 + m + 1$ egyenese van, az f -nek $n + 1$ pontja van, így $m^2 + m + 1 \leq n + 1$, azaz $n \geq m^2 + m = m(m + 1)$.

Nézzük a másik esetet: $s = 0$. Az (i) egyenlet szerint ekkor $t = m^2 + m + 1$. Ezt és a (ii) egyenletet használva $n + 1 = e + m^2 + m + 1$, azaz $n = e + m^2 + m$. Mivel $e \geq 0$, így $n \geq m^2 + m = m(m + 1)$. ■

1.3.2. Definíció. Az n -edrendű sík $\sqrt{n}$ -edrendű részsíkját **Baer-részsíknak** nevezzük.

1.4. Magasabb dimenziós projektív terek

A vizsgatematikában ezt a második tételhez kéri.

1.4.1. Definíció. Legyen $\mathbb{K}$ test. A $\text{PG}(n, \mathbb{K})$, **n -dimenziós projektív teret** a következőképpen kapjuk. Legyen V egy $(n + 1)$ -dimenziós vektortér a $\mathbb{K}$ test felett. A $\text{PG}(n, \mathbb{K})$ tér **k -dimenziós alterekből áll**, a k -dimenziós alterek éppen a V $(k + 1)$ -dimenziós alterei.

Axiomatikusan:

1.4.2. Definíció. A $(\mathcal{P}, \mathcal{S}_{-1}, \mathcal{S}_0, \dots, \mathcal{S}_n)$ $(n + 3)$ -as **n -dimenziós projektív tér**, ha az $\mathcal{S}_i$ -k a $\mathcal{P}$ részhalmazainak családjai (az $\mathcal{S}_i$ elemeit i -dimenziós altereknek nevezzük) és teljesülnek a következők:

- 1) $\mathcal{S}_{-1}$ -nek egy eleme van: az üres halmaz ($\emptyset$);
- 2) $\mathcal{S}_0$ -nak $|\mathcal{P}|$ darab eleme van: a $\mathcal{P}$ egyelemű részhalmazai;
- 3) $\mathcal{S}_n$ -nek egy eleme van: a teljes $\mathcal{P}$ halmaz;
- 4) ha $i \neq j$, akkor $\mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j = \emptyset$;
- 5) alterek tetszőleges családjának metszete altér (tetszőleges számosságra);
- 6) az előző alapján definiáljuk tetszőleges pontthalmaz által generált alteret;

7) a *dimenzió axióma*: tetszőleges W_1 és W_2 alterekre $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(\langle W_1, W_2 \rangle)$ ("dimenzió formula");

8) létezik $n + 2$ általános helyzetű pont (semelyik $n + 1$ nincs egy altérben).

Megjegyzés. Kiderül, hogy minden $n \geq 3$ dimenziós projektív tér előállítható az első definícióban elmondottak szerint.

1.4.1. Tétel. Minden $n \geq 3$ dimenziós projektív térben igaz Desargues tétele.

Az előadáson elhangzott a tétel bizonyítása, de mivel a tematikában nem szerepel, így nem kell tudni a vizsgán.

Megnézzük még $\text{PG}(3, q)$ kombinatorikus tulajdonságait. A $\text{GF}(q)$ test feletti négydimenziós vektortérben q^4 elem van. Megszámoljuk az egydimenziós alterek számát (ami éppen a pontok száma $\text{PG}(3, q)$ -ban). Egy egydimenziós alteret 1 vektor generál, amit $(q^4 - 1)$ -féleképpen választhatunk (a $\mathbf{0}$ vektort nem). Egy egydimenziós altérben q vektor van, ezek közül a $\mathbf{0}$ vektort kivéve mindegyik generálja őt. Így összesen

$$\frac{q^4 - 1}{q - 1} = q^3 + q^2 + q + 1$$

különböző egydimenziós altér van, és így ennyi pont van $\text{PG}(3, q)$ -ban. Hasonló gondolatmenettel látható, hogy

$$\frac{(q^4 - 1)(q^4 - q)}{(q^2 - 1)(q^2 - q)} = \frac{(q^4 - 1)(q^3 - 1)}{(q^2 - 1)(q - 1)} = (q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$$

különböző kétdimenziós altér van, és így ennyi egyenes van $\text{PG}(3, q)$ -ban. A síkoknak a háromdimenziós alterek felelnek meg, ezeket ortogonális kiegészítőkként (egydimenziós alterek) megszámlálva arra jutunk, hogy ugyanannyi sík van, mint pont: $q^3 + q^2 + q + 1$. A dualitás most a következőképpen érvényesül: a pontoknak a síkok, az egyeneseknek az egyenesek felelnek meg.

Egy egyenesen $q + 1$ pont van (egy kétdimenziós altér ennyi egydimenziós alteret tartalmaz). Egy síkban $q^2 + q + 1$ pont van (egy háromdimenziós altér ennyi egydimenziós alteret tartalmaz).

Megszámoljuk még az egy egyenesre illeszkedő síkok számát (ami a dualitás miatt megegyezik az egy egyenes által tartalmazott pontok számával). Egy ilyen síkot meghatároz az egyenes $q + 1$ pontja és egy további síkbeli, az egyenesen nem

lévő pont. Az egyenes $q + 1$ pontja mellé $(q^3 + q^2 + q + 1) - (q + 1)$ további pont közül választhatunk egyet. Mivel egy síkban $q^2 + q + 1$ pont van így $q^2 (= (q^2 + q + 1) - (q + 1))$ pont fogja ugyanazt a síkot adni. Tehát egy egyenesre

$$\frac{(q^3 + q^2 + q + 1) - (q + 1)}{q^2} = q + 1$$

sík illeszkedik.

1.5. Ívek, teljes ívek

A vizsgatematikában ez a harmadik tétel.

1.5.1. Definíció. *Egy projektív vagy affin síkon valamely k pontból álló ponthalmazt k -ívnek nevezünk, ha semelyik három pontja nem kollineáris.*

Egy egyenes az ívhez képest lehet *elkerülő* (nincs közös pontjuk), *érintő* (egy közös pontjuk van) és *szelő* (két közös pontjuk van).

A k -ív *teljes*, ha nem része $(k + 1)$ -ívnek. Mit mondhatunk egy (teljes) ív méretéről? Először alsó korlátot adunk.

1.5.1. Állítás. *Bármely teljes k -ív szelői tartalmazzák a sík összes pontját.*

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk. Legyen P olyan pont, melyet a $\mathcal{K}$ teljes k -ív egyetlen szelője sem tartalmaz. Ekkor a $\mathcal{K} \cup \{P\}$ ponthalmaz $(k + 1)$ -ív és tartalmazza a teljes k -ívünket, ami a teljesség definíciója miatt lehetetlen. ■

1.5.2. Következmény. *Ha $\mathcal{K}$ teljes k -ív az n -edrendű projektív síkon, akkor $k \geq \sqrt{2n}$.*

Bizonyítás. A teljes k -íven k pont van. A szelők száma: $\binom{k}{2}$. Minden szelőn a síknak $n + 1$ pontja van, 2 ezek közül a teljes k -ív valamelyik k pontja közül kerül ki, tehát a síkon legfeljebb

$$k + \binom{k}{2} ((n + 1) - 2) = k + \binom{k}{2} (n - 1)$$

pont van. Pontosan is tudjuk a pontok számát: $n^2 + n + 1$, így $k + \binom{k}{2} (n - 1) \geq n^2 + n + 1$. Azaz

$$k + \frac{k(k-1)}{2} (n-1) \geq n^2 + n + 1,$$

$$(3-n)k + (n-1)k^2 \geq 2n^2 + 2n + 2.$$

Mivel

$$(3-n)k + (n-1)k^2 \leq (3-n)k + nk^2 - k = (3-(n+1))k + nk^2 \leq nk^2$$

és $2n^2 + 2n + 2 \geq 2n^2$, így $nk^2 \geq 2n^2$, azaz $k \geq \sqrt{2n}$. ■

Megjegyzés. Léteznek konstrukciók $\sqrt{n} \log^c n$ ($c > 0$) elemszámú teljes ívre, de $c\sqrt{n}$ elemszámúra nem ismert ilyen.

Felső korlátot ad egy ív méretére a következő tétel:

1.5.3. Tétel (Bose). Ha $\mathcal{K}$ k -ív az n -edrendű projektív síkon, akkor

$$k \leq \begin{cases} n+1, & \text{ha } n \text{ páratlan;} \\ n+2, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen R a $\mathcal{K}$ egy pontja. Az R -en át pontosan $n+1$ egyenes megy, mindegyik legfeljebb további egy pontot tartalmaz a $\mathcal{K}$ pontjai közül. Így $k \leq 1 + (n+1) = n+2$. Ez az okoskodás páratlan n esetén is igaz, de ott az $n+1$ -es felső korlát is elérhető: megmutatjuk, hogy nem létezhet $(n+2)$ -ív, ha n páratlan. Bármely $(n+2)$ -ív esetén, egy P pontján átmenő egyenes kell, hogy egy második pontban is metsze az ívet (azaz ilyenkor nincs érintő). Ez azért van így, mert P -n pontosan $n+1$ egyenes megy át és P -nek az ív további $n+1$ pontjával vannak egyértelmű összekötő egyenesei (a (P1) axióma miatt). Legyen Q olyan pont, ami nincsen rajta $\mathcal{K}$ -n. Minden Q -n átmenő egyenes vagy szelő vagy elkerülő. Tehát $\mathcal{K}$ elemszáma a szelői számának kétszerese, azaz $n+2$ páros szám, ami ellentmond annak, hogy n páratlan. ■

Bose tétele éles a $\text{PG}(2, q)$ síkon: konstruálunk egy $(q+1)$ -ívet. Tekintsük a $\{(t : t^2 : 1) \mid t \in \text{GF}(q)\} \cup \{(0 : 1 : 0)\}$ parabolát $\text{PG}(2, q)$ -n (az első halmaz éppen egy parabola az $\text{AG}(2, q)$ affin síkon, a második halmazban lévő pont az ő ideális

pontja). Megmutatjuk, hogy ő $(q+1)$ -ív. Nyilván $q+1$ pontja van, azt kell leellenőriznünk, hogy semelyik három pontja nem kollineáris. Nézzük először az affin pontokat. A $(t_i : t_i^2 : 1)$ ($i = 1, 2, 3$) pontok pontosan akkor kollineárisak, ha

$$\begin{vmatrix} t_1 & t_1^2 & 1 \\ t_2 & t_2^2 & 1 \\ t_3 & t_3^2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Mivel ez egy Vandermonde-determináns, így nem nulla ha $t_i \neq t_j$ ($i \neq j$). Ha az egyik az ideális pont akkor pedig

$$\begin{vmatrix} t_1 & t_1^2 & 1 \\ t_2 & t_2^2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = t_2 - t_1,$$

ami nem nulla, ha $t_1 \neq t_2$.

Most megmutatjuk, hogy ha q páros, akkor ez a parabola kiegészíthető $(q+2)$ -ívvé. Először megmutatjuk, hogy a parabolánknak minden pontjában egyértelműen létezik érintője. Mi lesz egy $(t : t^2 : 1)$ pontbeli érintő? A (t, t^2) pontbeli affin érintő egyenlete:

$$y - t^2 = \frac{dt^2}{dt}(x - t) = 2t(x - t) \Rightarrow y = 2tx - t^2.$$

Ez tetszőleges testen így van (ahogy $\mathbb{R}$ -ben megszoktuk). Megmutatjuk, hogy a parabolának ezen nincs több pontja. Az ideális pont nincs rajta (az az $x = t$ -n van). Egy (s, s^2) affin pontra pedig

$$s^2 = 2ts - t^2 \Leftrightarrow (s - t)^2 = 0 \Leftrightarrow s = t.$$

Az ideális pont érintője pedig az ideális egyenes. Ha q páros, akkor $2tx = 0$ ("2 = 0") így az affin pontbeli érintők vízszintes egyenesek. A vízszintes egyenesek ideális pontja $(1 : 0 : 0)$. Ezen a ponton az ideális egyenes is átmegy, tehát $q+1$ egyenes megy át rajta, vagyis az összes rajta átmenő egyenes éppen a $\text{PG}(2, q)$ síkbeli parabolánk érintői. Vegyük hozzá a parabolához ezt az $(1 : 0 : 0)$ pontot, így kapjuk a $(q+2)$ -ívet.

Példa. Konstruálunk "kis méretű" teljes ívet a $PG(2, q)$ síkon, ha $q \equiv 3 \pmod{4}$ (ez LUCIO LOMBARDO-RADICE konstrukciója). Tekintsük a

$$\left\{ \left(t : \frac{1}{t} : 1 \right) \mid t \in GF(q) \setminus \{0\} \text{ négyzetelem} \right\} \cup \{(0 : 0 : 1), (1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0)\}$$

ponthalmazt $PG(2, q)$ -n (az első halmaz egy négyzetelemekből álló hiperbola az $AG(2, q)$ affin síkon, a második halmazban lévő pontok rendre: az origó, az x és y tengely ideális pontjai). Nevezzük az egyszerűség kedvéért őt hiperbolának. Megmutatjuk, hogy ő $\frac{q+5}{2}$ -ív. Egy q elemű testben $\frac{q-1}{2}$ négyzetelem van (q páratlan!), így a hiperbolánknak tényleg $\frac{q-1}{2} + 3 = \frac{q+5}{2}$ pontja van. A parabolához hasonló számolás mutatja, hogy az affin sík hiperbolájának egyetlen ponthármasa sincs egy egyenesen, semelyik ideális ponttal nincs két affin pont egy egyenesen, 2 ideális és egy affin pont sincs egy egyenesen. Az origó, egy ideális pont és egy affin pont sincs egy egyenesen. Marad az origó és két affin pont esete.

$$\begin{vmatrix} t_1 & \frac{1}{t_1} & 1 \\ t_2 & \frac{1}{t_2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{t_1}{t_2} - \frac{t_2}{t_1} \stackrel{?}{=} 0.$$

Ez pontosan akkor nulla, ha $t_1^2 = t_2^2$ azaz $t_1 = t_2$ vagy $t_1 = -t_2$. Ez utóbbi viszont nem lehet, mert akkor $\frac{t_1}{t_2} = -1$ négyzetelem lenne (négyzetelemek hányadosa is négyzetelem), de $q \equiv 3 \pmod{4}$ esetén a -1 nem az.

Meg kell még mutatnunk, hogy ő teljes ív. Azt kell belátnunk, hogy a szelői lefognak a síkot, azaz a sík minden pontján át megy a hiperbolának szelője (így nem tudunk hozzávenni pontot az ív-tulajdonság elrontása nélkül). Az ideális pontokon átmegy a hiperbola két ideális pontját tartalmazó ideális egyenes mint szelő. Az $(a, b) = (a : b : 1)$ affin pontokat kell megnéznünk. Négy esetre bontjuk a problémát:

- (i) Ha $a \cdot b = 0$, akkor az origót az egyik ideális ponttal összekötő egyenes (szelő) jó lesz.
- (ii) Ha a négyzetelem, akkor a $(0 : 1 : 0)$ és az $(a : \frac{1}{a} : 1)$ ponton átmenő egyenes (szelő) jó lesz.
- (iii) Ha b négyzetelem, akkor az $(1 : 0 : 0)$ és a $(b : \frac{1}{b} : 1)$ ponton átmenő egyenes (szelő) jó lesz.

- (iv) Ha egyikük sem négyzetelem, akkor kössük össze a $(0, 0)$ origót az (a, b) ponttal. Megmutatjuk, hogy ez metszi a hiperbolánkat egy origótól különböző pontban. Az egyenes egyenlete $y = \frac{b}{a}x$, ahol $\frac{b}{a}$ négyzetelem (nem négyzetelemek (más néven kvadratikus nemmaradékok) szorzata és hányadosa négyzetelem (más néven kvadratikus maradék)). Tehát az $y = mx$ és $y = \frac{1}{x}$ egyenletek egy közös x négyzetelem megoldását keressük, ahol m négyzetelem.

$$x^2 = \frac{1}{m} = \left(\frac{1}{m}\right)^2 = k^2 \Rightarrow x = \pm k.$$

Szerencsénk van, mert k és $-k$ közül pontosan az egyik négyzetelem (ha mindkettő az volna, akkor a hányadosuk (-1) is az lenne). Tehát van egy metszéspont.

Ezzel a konstrukciót is befejeztük.



1.6. Oválisok, focibajnokságok

A vizsgatematikában ez a negyedik tétel.

1.6.1. Definíció. Az n -edrendű síkon egy $(n + 1)$ -ív neve **ovális**.

1.6.1. Állítás. Egy $\mathcal{O}$ oválisnak minden pontjában egyértelműen létezik érintő egyenese.

Bizonyítás. Legyen $P \in \mathcal{O}$. A P -n $n + 1$ egyenes megy át. Ezek közül n az ovális többi n pontjával köti össze P -t (a (P1) axióma miatt). A maradék egy egyenes lesz az érintő. ■

1.6.2. Állítás. Ha n páratlan, $\mathcal{O}$ ovális valamely n -edrendű síkon, akkor $\frac{n(n+1)}{2}$ ponton át pontosan 2 érintője megy $\mathcal{O}$ -nak (**külső pontok**), $\frac{n(n-1)}{2}$ ponton át pedig nem megy érintője (**belső pontok**).

Bizonyítás. Legyen $P \in \mathcal{O}$. Legyen $K_1 \neq P$ olyan pont, amely rajta van a P -beli érintőn. A K_1 -en átmenő egyeneseket osztályozzuk az oválishoz való viszonyuk szerint: e darab elkerülő, t darab érintő és s darab szelő egyenes megy át K_1 -en. Nyilván az ovális összes pontjára $n + 1 = 0 \cdot e + 1 \cdot t + 2 \cdot s$ igaz. Mivel $n + 1$ és

$2s$ páros, így t páros. $t = 0$ nem lehet, mert K_1 egy érintőn van rajta (a P -belin), így K_1 -en át legalább 2 érintő megy át. A P -beli érintőn a P -n és a K_1 -en kívül még $n - 1$ pont van: $K_2, \dots, K_n$. Az iménti okoskodást megismételve azt találjuk, hogy az összes K_i -n át legalább 2 érintője megy $\mathcal{O}$ -nak. Az előző állítás szerint az $\mathcal{O}$ -nak minden pontjában egyértelműen létezik érintője, tehát $n + 1$ darab érintő van. A P -belitől különböző tehát csak n darab. Mivel P -n kívül ugyanennyi pont van az érintőn, így a skatulya-elv szerint a K_1 -n pontosan 2 érintő ment át (és a többi K_i -n is). Összesen $n + 1$ érintőnk van, mindegyiken n olyan pont amin át két érintő megy. Ez $n(n + 1)$ pont, de mindenkit két érintőn számoltunk, így összesen $\frac{n(n+1)}{2}$ külső pont van.

A belső pontok számát megkapjuk, ha a sík összes pontjainak számából levonjuk az ovális pontjainak számát és a külső pontok számát:

$$(n^2 + n + 1) - (n + 1) - \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{n(n - 1)}{2},$$

ahogy azt állítottuk. ■

1.6.3. Állítás. *Elkerülő egyenesen $\frac{n+1}{2}$ külső és ugyanennyi belső pont van. Szelő egyenesen $\frac{n-1}{2}$ külső és ugyanennyi belső pont van.*

Bizonyítás. Ha egy elkerülő egyenesen k külső pont van, akkor az ezeken átmenő érintők száma $2k$. Másrészt ezek száma $n + 1$, azaz $k = \frac{n+1}{2}$. A belső pontok száma az egyenes összes pontjainak száma és a rajta lévő külső pontok számának különbsége: $(n + 1) - \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2}$. Ha egy szelő egyenesen k külső pont van, akkor az ezeken átmenő érintők száma $2k + 2$. Másrészt ezek száma $n + 1$, azaz $k = \frac{n-1}{2}$. A rajta lévő belső pontok, a két metszéspont és a külső pontok alkotják az egyenes $n + 1$ pontját, így a belső pontok száma: $(n + 1) - 2 - \frac{n-1}{2} = \frac{n-1}{2}$. ■

1.6.4. Állítás. *Ha n páros, $\mathcal{O}$ ovális valamely n -edrendű síkon, akkor $\mathcal{O}$ érintői egy ponton mennek át ($\mathcal{O}$ magpontja).*

1.6.5. Következmény. *Páros rendű síkon az oválisok nem teljes ívek (kiegészíthetők $(n + 2)$ -ívvé).*

Állítás bizonyítása. Legyen $P \notin \mathcal{O}$. A P -n átmenő egyeneseket osztályozzuk az oválishoz való viszonyuk szerint: e darab elkerülő, t darab érintő és s darab szelő

egyenes megy át P -n. Nyilván az ovális összes pontjára $n + 1 = 0 \cdot e + 1 \cdot t + 2 \cdot s$ igaz. Mivel $n + 1$ páratlan és $2s$ páros, így t páratlan. Következésképpen a sík minden pontján át megy az oválisnak legalább egy érintője ($P \notin \mathcal{O}$ esetén most láttuk, $Q \in \mathcal{O}$ esetén pedig a Q -beli érintő jó lesz). Tegyük fel indirekt, hogy nem mennek át egy ponton az érintők. Akkor van e, f és g érintő akik háromszöget alkotnak. Az e -n van $n + 1$ pont, f -en további n (1 közös e -vel) és g -n további $n - 1$ pont van (1 közös g -vel és egy másik f -fel). A maradék $n - 2$ érintő egyenes mindegyike legfeljebb $n - 1$ ezektől különböző pontot tartalmazhat még. Mivel a sík összes pontján át ment érintő így a síkon legfeljebb

$$(n + 1) + n + (n - 1) + (n - 2) \cdot (n - 1) = n^2 + 2$$

pont van. Ez ellentmondás, mert ennél több van: $n^2 + n + 1$ ($n \geq 2$). ■

Körmérkőzőses focibajnokságot szervezünk. Feltételek:

- (i) páros sok csapat van;
- (ii) minden csapat a másikkal pontosan egyszer játszik;
- (iii) fordulók vannak: minden csapat minden fordulóban pontosan egyszer játszik.

Ha n csapat van, akkor a feladat a következő: az n csúcsú teljes gráfot ki kell színeznünk $(n - 1)$ színnel úgy, hogy minden csúcsban csupa különböző színű él találkozzon.

Tegyük fel, hogy 18 csapatunk van. $18 = 17 + 1 = 16 + 2$ (páratlan prímszám +1, páros prímszám +2). A $\text{PG}(2, 16)$ és a $\text{PG}(2, 17)$ síkon is van 18-ív.

Első konstrukció. A $\text{PG}(2, 16)$ síkon vegyünk egy $\mathcal{K}$ 18-ívet. A csapatok legyenek a 18-ív pontjai: $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_{18}$. Legyen e a $\mathcal{K}$ -t elkerülő egyenes, $f_1, f_2, \dots, f_{17}$ az $\mathcal{O}$ pontjai (ezek a fordulók). A beosztás a következő: a $\mathcal{K}_i$ és $\mathcal{K}_j$ csapatok pontosan akkor játszanak egymással az f_k fordulóban, ha $\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j$ és f_k kollineárisak.

Második konstrukció. A $\text{PG}(2, 17)$ síkon vegyünk egy $\mathcal{K}$ 18-ívet. Legyen e a $\mathcal{K}$ -t az E pontban érintő egyenes. A csapatok legyenek a 18-ív pontjai: $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_{17}, E$. A fordulók legyenek az e -nek E -től különböző pontjai: $f_1, f_2,$

$\dots, f_{17}$. A beosztás a következő: ha $\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j \neq E$, akkor a $\mathcal{K}_i$ és $\mathcal{K}_j$ csapatok pontosan akkor játszanak egymással az f_k fordulóban, ha $\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j$ és f_k kollineárisak. Az E és $\mathcal{K}_i$ csapatok pontosan akkor játszanak egymással az f_j fordulóban, ha az f_j -t és $\mathcal{K}_i$ -t összekötő egyenes érintője $\mathcal{K}$ -nak.

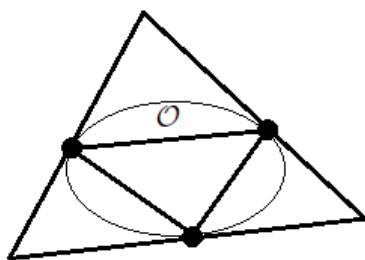
Harmadik konstrukció. Legyen $2k$ csapatunk. Vegyünk fel egy szabályos $(2k - 1)$ -szöget és a középpontját. Számozzuk meg a csúcsokat 1-től $(2k - 1)$ -ig, a középpontot jelölje 0. Az első forduló a következő párosítás szerint történik: kössük össze az 1-es csúcsot a 0-sal. Erre merőleges egyenesekkel állítsuk párba a többi csapatot. A következő fordulót az egyenesek eggyel elforgatásával kapjuk.

1.7. Segre tétele

A vizsgatematikában ez az ötödik tétel.

1.7.1. Tétel (Segre¹). *Ha q páratlan, akkor a $\text{PG}(2, q)$ síkon minden ovális meg-egyezik egy irreducibilis másodrendű görbével (néha kúpszeletet mondunk helyette).*

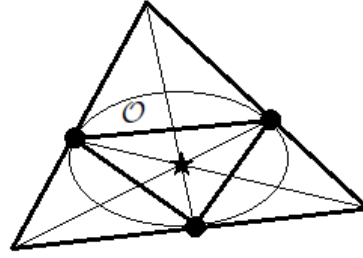
Bizonyítás. Legyen $\mathcal{O}$ ovális. Válasszunk rajta 3 különböző pontot és húzzuk be a pontbeli érintőket, illetve a pontokat összekötő egyeneseket. Kapunk egy körülírt és egy beírt háromszöget (1.4 ábra).



1.4. ábra. Az $\mathcal{O}$ ovális körülírt és egy beírt háromszöge.

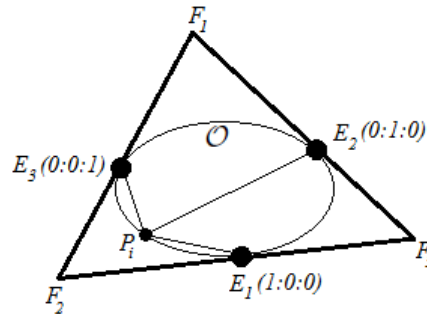
Megmutatjuk, hogy két ilyen háromszög pontra nézve perspektív. Ez pontosan azt jelenti, hogy az 1.5 ábrán behúzott egyenesek egy pontban metszik egymást (ezt a pontot $\star$ jelöli).

¹Ejtsd: Szegré



1.5. ábra. A két háromszög pontra nézve perspektív.

Bevezetjük az 1.6 ábrán látható jelöléseket: P_i az ovális maradék $q - 2$ pontja közül egy ($i = 1, 2, \dots, q - 2$). Az E_j pontok mellett az ő homogén koordinátázásuk látható. Azt kell belátnunk, hogy az $F_j E_j$ egyenesek egy pontban metszik egymást. Meghatározzuk az $E_j P_i$ egyenesek egyenletét. A $j = 1$ esetben $E_1 P_i$ egyenlete legyen $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = 0$. Itt $n_1 = 0$ kell legyen, mert $E_1 = (1 : 0 : 0)$ rajta van. Az n_2 nem nulla mert az $E_2 = (0 : 1 : 0)$ pont nincs rajta az egyenesen (ha rajta lenne, akkor az oválisnak három pontja volna egy egyenesen, ami nem lehet). Így $x_2 = \alpha_i x_3$ alakú az $E_1 P_i$ egyenes egyenlete. Hasonló okoskodás mutatja, hogy az $E_2 P_i$ és $E_3 P_i$ egyenesek egyenletei rendre $x_3 = \beta_i x_1$ és $x_1 = \gamma_i x_2$ alakúak. Ugyan ilyen meggondolásokkal az E_1, E_2 és E_3 pontokon átmenő érintők egyenletei rendre $x_2 = t_1 x_3$, $x_3 = t_2 x_1$ és $x_1 = t_3 x_2$ alakúak.



1.6. ábra. Jelölések.

Készítsünk táblázatot az együtthatókról (1.1 táblázat)!

A $\times$ jel azt jelenti, hogy összeszorozzuk a sorok illetve oszlopok elemeit. Tehát: $\alpha_i \beta_i \gamma_i = 1$, $(-1)^3 = -1$ és $\prod_{i=1}^{q-2} \alpha_i t_1 = \prod_{i=1}^{q-2} \beta_i t_2 = \prod_{i=1}^{q-2} \gamma_i t_3 = -1$. Ezekből

adódik, a bekeretezett: $t_1 t_2 t_3 = -1$. Valóban:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -\alpha_i \\ -\beta_i & 0 & 1 \\ 1 & -\gamma_i & 0 \end{vmatrix} = 1 - \alpha_i \beta_i \gamma_i,$$

másrésről a Ceva-tétel szerint ez a determináns 0 a kollinearitás miatt. Ebből kapjuk, hogy $\alpha_i \beta_i \gamma_i = 1$.

	α_i	β_i	γ_i	$\times$
P_1	α_1	β_1	γ_1	1
P_2	α_2	β_2	γ_2	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
P_{q-2}	α_{q-2}	β_{q-2}	γ_{q-2}	1
t_i	t_1	t_2	t_3	-1
$\times$	-1	-1	-1	-1

1.1. táblázat. Az együttthatók táblázata.

Most megmutatjuk, hogy minden oszlopban minden nemnulla testelem éppen egyszer fordul elő. A Wilson-tétel szerint ezek szorzata éppen -1 , ahogy azt állítjuk. Nézzük például az első oszlopot. Ha $\alpha_i = \alpha_j$ ($i \neq j$) volna, akkor $E_1 P_i$ és $E_1 P_j$ ugyan az az egyenes volna, és így az oválisnak lenne három kollineáris pontja. Ha $t_1 = \alpha_i$ volna, akkor P_i rajta volna az E_1 -beli érintőn, de azon csak az ovális E_1 pontja van. Ha $\alpha_i = 0$ volna, akkor $x_2 = 0$ egyenletünk lenne, amin E_3 is rajta van, tehát az ovális három pontja (E_1 , E_3 és P_i) kollineáris lenne. Ha $t_1 = 0$ lenne, akkor ez nem az érintő volna. Készen vagyunk, a másik két oszlop teljesen hasonlóan megy. Következésképp:

$$t_1 t_2 t_3 = -1.$$

Ezekkel a t_i -kel kifejezzük az F_1 , F_2 és F_3 pontok koordinátáit. Az F_1 az $x_3 = t_2 x_1$ érintőn van rajta. Feltehető, hogy $x_2 = 1$, így $F_1 = (t_3 : 1 : t_2 t_3)$ adódik. Hasonlóan $F_2 = (t_1 t_3 : t_1 : 1)$ és $F_3 = (1 : t_1 t_2 : t_2)$. Mivel $E_1 = (1 : 0 : 0)$, $E_2 = (0 : 1 : 0)$ és $E_3 = (0 : 0 : 1)$, így látható, hogy az $F_1 E_1$ egyenes egyenlete:

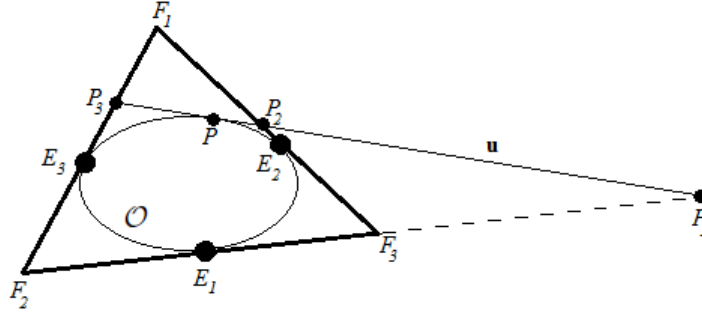
$x_3 = t_2 t_3 x_2$. Hasonlóan az $F_2 E_2$ és $F_3 E_3$ egyenesek egyenletei: $x_1 = t_1 t_3 x_3$ és $x_2 = t_1 t_2 x_1$. Azt akartuk látni, hogy ezek egy ponton mennek át, és ez valóban teljesül:

$$\begin{vmatrix} 0 & t_2 t_3 & -1 \\ -1 & 0 & t_1 t_3 \\ t_1 t_2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (t_1 t_2 t_3)^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0.$$

Legyen a közös metszéspont $E = (1 : 1 : 1)$ (megválasztható így a koordináta-rendszerünk). Ez kielégíti az $F_1 E_1$ egyenes egyenletét: $x_3 = t_2 t_3 x_2$, azaz $1 = t_2 t_3$. Mivel $t_1 t_2 t_3 = -1$, így $t_1 = -1$. Hasonlóan adódik, hogy $t_2 = t_3 = -1$. Így $F_1 = (-1 : 1 : 1)$, $F_2 = (1 : -1 : 1)$ és $F_3 = (1 : 1 : -1)$. Legyen $P = (x_1 : x_2 : x_3)$ az $\mathcal{O}$ ovális egy pontja (E_1, E_2, E_3 -től különböző), $\mathbf{u} = [u_1 : u_2 : u_3]$ a P -beli érintő. Az illeszkedés miatt

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

Bevezetjük az 1.7 ábrán látható jelöléseket. A $P_1 E_2$, $P_2 E_1$ és $P F_3$ egy ponton mennek át az előzőek szerint (megint pontra nézve perspektív háromszögeink vannak). Meghatározzuk ezeknek az egyeneseknek az egyenleteit.



1.7. ábra. Jelölések.

Nézzük a $P_1 E_2$ egyenest. P_1 rajta van $\mathbf{u}$ -n és az E_1 -beli érintőn, aminek egy koordinátázása $[0 : 1 : 1]$ (mert $E_1 = (1 : 0 : 0)$). Tehát a $P_1 E_2 = [y_1 : 0 : y_3]$, $\mathbf{u}$ és $[0 : 1 : 1]$ egyenesek egy pontban metszik egymást ($y_2 = 0$, mert $E_2 = (0 : 1 : 0)$ illeszkedik az egyenesre), így

$$0 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ y_1 & 0 & y_3 \end{vmatrix} = y_1 (u_2 - u_3) + u_1 y_3,$$

amiből $y_1 = u_1$ és $y_2 = -(u_2 - u_3) = u_3 - u_2$ jó. Tehát a P_1E_2 egyenes egyenlete $u_1x_1 + (u_3 - u_2)x_3 = 0$. Ugyanígy adódnak a P_2E_1 és PF_3 egyenesek koordinátázásai: $[0 : u_2 : u_3 - u_1]$ és $[-x_2 - x_3 : x_1 + x_3 : x_1 - x_2]$. Mivel ők egy ponton mennek át (a P_1E_2 , P_2E_1 és PF_3), így $0 =$

$$\begin{vmatrix} u_1 & 0 & u_3 - u_2 \\ 0 & u_2 & -u_1 + u_3 \\ -x_2 - x_3 & x_1 + x_3 & x_1 - x_2 \end{vmatrix} = (u_1 + u_2 - u_3)(-u_2(x_2 + x_3) - u_1(x_1 + x_3)).$$

Az $u_1 + u_2 - u_3$ tényező nem lehet 0, mert az azt jelentené, hogy $F_3 = (1 : 1 : -1)$ rajta van $\mathbf{u}$ -n. De F_3 -on már két érintő megy át (egyik sem a P -beli) és tudjuk, hogy oválshoz egy pontból 0 vagy 2 érintő húzható (belső és külső pontok). Következésképpen a második tényező 0 azaz

$$u_2(x_2 + x_3) = u_1(x_1 + x_3).$$

Most ugyanezt a gondolatmenetet végigjátszhatjuk a PF_3 egyenes helyett a PF_1 és PF_2 egyenesekkel, azt kapjuk, hogy

$$u_2(x_1 + x_2) = u_3(x_1 + x_3),$$

$$u_1(x_1 + x_2) = u_3(x_2 + x_3).$$

Egyik u_i sem nulla, mert különben valamelyik E_i rajta lenne $\mathbf{u}$ -n. Ez pedig azért nem lehet, mert $\mathbf{u}$ a P -beli érintő és $P \neq E_i$ a feltevés szerint. Ha $x_1 + x_2 = 0$ volna, akkor P rajta lenne az E_3 -beli érintőn, ami nem lehet, mert $P \neq E_3$. Hasonlóan kapjuk, hogy $x_1 + x_3 \neq 0$ és $x_2 + x_3 \neq 0$. Így

$$u_2 = \frac{u_1(x_1 + x_3)}{x_2 + x_3}, \quad u_3 = \frac{u_1(x_1 + x_2)}{x_2 + x_3},$$

azaz

$$\begin{aligned} u = [u_1 : u_2 : u_3] &= \left[u_1 : \frac{u_1(x_1 + x_3)}{x_2 + x_3} : \frac{u_1(x_1 + x_2)}{x_2 + x_3} \right] \\ &= [x_2 + x_3 : x_1 + x_3 : x_1 + x_2]. \end{aligned}$$

Ha ezt beleírjuk az $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ összefüggésbe, akkor rendezés után azt kapjuk, hogy P koordinátái kielégítik a

$$2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = 0$$

egyenletet. Ezt persze E_1 , E_2 és E_3 koordinátái is kielégítik. Mivel q páratlan, így $2 \neq 0$. Ennek a görbének a mátrixa

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

aminek a determinánsa $2 \neq 0$. Tehát ő egy közönséges irreducibilis másodrendű görbe. Felhasználva, hogy másodrendű görbének $q+1$ pontja van, és $\mathcal{O}$ -nak is, azt kapjuk, hogy ez a görbe maga az $\mathcal{O}$ ovális. ■

Páros rendű síkon nem igaz Segre tétele. Tegyük fel, hogy $q \geq 8$ páros. Legyen $\mathcal{C}$ másodrendű görbe $q+1 \geq 9$ ponttal. Legyen M a magpontja (az érintői közös pontja) és legyen $P \in \mathcal{C}$ tetszőleges. A $(\mathcal{C} \setminus \{P\}) \cup \{M\} \neq \mathcal{C}$ ponthalmaz egy ovális és van 5 közös pontja a $\mathcal{C}$ másodrendű görbével. Egy másodrendű görbét 5 pontja egyértelműen meghatároz, tehát az oválisunk nem lehet másodrendű görbe.

1.8. Ovoidok és másodrendű felületek

A vizsgatematikában ez a nyolcadik tétel.

1.8.1. Definíció. A $\text{PG}(n, q)$ projektív térben ($n \geq 3$) valamely k pontból álló ponthalmazt **süvegnek** nevezünk, ha semelyik három pontja nem kollineáris.

1.8.2. Definíció. A $\text{PG}(n, q)$ projektív térben ($n \geq 3$) valamely k pontból álló ponthalmazt **ívnek** nevezünk, ha semelyik $n+1$ pontja sem illeszkedik hipersíkra.

Ívre példa a következő ponthalmaz:

$$\{(1, t, t^2, \dots, t^{n-1}, t^n) \mid t \in \text{GF}(q)\} \cup \{(0 : 0 : 0 : \dots : 0 : 1)\}.$$

1.8.1. Állítás. Legyen q páratlan. A $\text{PG}(3, q)$ projektív térben egy süveg legfeljebb $q^2 + 1$ pontot tartalmaz és ilyen van is.

Bizonyítás. Vegyük az $\mathcal{S}$ süveg tetszőleges két pontját: A, B . Az AB egyenesre illeszkedő tetszőleges sík ívben metszi a süvegünket. Mivel q páratlan, így egy ilyen ívnek Bose tétele szerint legfeljebb $q-1$ pontja lehet még A -n és B -n kívül. Mivel

AB -re $q+1$ sík illeszkedik (korábban láttuk, hogy $\text{PG}(3, q)$ -ban egy egyenesre $q+1$ sík illeszkedik), így

$$|\mathcal{S}| \leq 2 + (q+1)(q-1) = q^2 + 1.$$

Az egyenlőséget az elliptikus másodrendű felületek mutatják. ■

1.8.3. Definíció. A $\text{PG}(3, q)$ projektív térben **ovoidnak** nevezzük a $q^2 + 1$ pontú sűvegeket (páros q -ra is definiáljuk).

1.8.2. Állítás. Ha egy sík egy ovoidnak legalább 2 pontját tartalmazza, akkor pontosan $q+1$ pontját tartalmazza.

Bizonyítás. Legyen A és B az ovoid azon két pontja, amit a sík tartalmaz. Az AB egyenesre éppen $q+1$ sík illeszkedik, ezek mindegyike legfeljebb további $q-1$ pontját tartalmazza az ovoidnak. De az előző bizonyításbeli egyenlőtlenséget megnézve muszáj mindegyiknek pontosan további $q-1$ pontot tartalmaznia, így az eredeti síkunk is pontosan $q+1$ pontját tartalmazza az ovoidnak. ■

Példa. Másodrendű felületek közt keresünk ovoidot. Másodrendű felület egyenlete: $\mathbf{x}A\mathbf{x}^\top$, ahol $\det A \neq 0$ és $A = A^\top$. Például a gömb esetében:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Projektív térben is felírhatjuk ezt az egyenletet: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2$. Ez valami "gömbszerűség" lesz. Megnézzük, hogy ennek hány pontja van $\text{PG}(3, 3)$ -ban. Esetszétválasztással dolgozunk:

- (i) $x_4 = 0$. Ekkor $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ -t kell megoldanunk. Mivel $0^2 = 0$ és $1^2 = 2^2 = 1$, így láthatóan semelyik másik koordináta nem lehet nulla. Ha például feltesszük, hogy $x_3 = 1$, akkor négy megoldást találunk: $(1 : 1 : 1 : 0)$, $(1 : 2 : 1 : 0)$, $(2 : 1 : 1 : 0)$ és $(2 : 2 : 1 : 0)$.
- (ii) $x_4 \neq 0$. Feltehető, hogy $x_4 = 1$. Ekkor hat megoldást kapunk: $(0 : 0 : 1 : 1)$, $(0 : 0 : 2 : 1)$, $(0 : 1 : 0 : 1)$, $(0 : 2 : 0 : 1)$, $(1 : 0 : 0 : 1)$ és $(2 : 0 : 0 : 1)$.

Tehát a felületünknek 10 pontja van, ami éppen $3^2 + 1 = q^2 + 1$. Ellenőrizhető, hogy semelyik három pontja nem kollineáris, így ez valóban ovoid. ♣

Megmutatható, hogy még egy másodrendű felület van: $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2$. Ha diagonalizáljuk A -t akkor látható, hogy több felület nem lehet. Ez olyan felület, ami a valós esetben minden pontján át két egyenest tartalmaz, a gömb nem ilyen.

Legyen $\mathcal{E}$ egy ovoid. Az egyenesek lehetnek *elkerülő*k (nincs közös pontjuk $\mathcal{E}$ -vel), *érintők* (egy közös pontjuk van $\mathcal{E}$ -vel) és *szelők* (két közös pontjuk van $\mathcal{E}$ -vel).

A szelők száma az ovoid pontpárjainak száma: $\binom{q^2+1}{2} = \frac{q^4+q^2}{2}$.

Mennyi érintő egyenese van? Legyen $P \in \mathcal{E}$. Tudjuk, hogy $\text{PG}(3, q)$ -ban egy ponton át $q^2 + q + 1$ egyenes megy. Ezek közül q^2 szelő (a P -t az $\mathcal{E}$ többi q^2 pontjával összekötő egyenesek). Így P -n át $(q^2 + q + 1) - q^2 = q + 1$ érintő megy. Így összesen $(q^2 + 1)(q + 1)$ érintője van az ovoidunknak.

Az elkerülő egyenesek számát megkapjuk, ha az összes egyenes számából kivonjuk a szelők és az érintők számát:

$$(q^2 + 1)(q^2 + q + 1) - \binom{q^2 + 1}{2} - (q^2 + 1)(q + 1) = \binom{q^2 + 1}{2}.$$

Tehát ugyanannyi elkerülő egyenes van, mint szelő egyenes. Bijekció adható meg közöttük: A P és R pontokon áthaladó szelőnek feleltessük meg a P és R -beli érintősíkok metszetét mint elkerülő egyenest. Nyilván minden szelőhöz egyértelműen létezik a metszet. Adott elkerülő egyenes esetén szeretnénk megmutatni, hogy egyértelműen létezik hozzá szelő egyenes. Legyen e elkerülő és tekintsük az e -re illeszkedő $q + 1$ síkot. Legyen s_i az i -edik sík és az ovoid metszéspontjainak száma ($i = 1, 2, \dots, q + 1$). Tudjuk, hogy ha egy sík legalább 2 pontban metszi az ovoidot, akkor pontosan $q + 1$ pontban metszi őt. Így az s_i -k értéke 0, 1 vagy $q + 1$ lehet. Másrészt $s_1 + s_2 + \dots + s_q + s_{q+1} = q^2 + 1$, így csak az lehet, hogy $q - 1$ darab sík $q + 1$ pontban metsz és 2 olyan van, ami egy pontban érint. Ezt a két érintési pontot összekötő szelő éppen az ami kellett.

Mennyi érintősíkja van? Legyen $P \in \mathcal{E}$. Tudjuk, hogy $\text{PG}(3, q)$ -ban egy pontra $q^2 + q + 1$ sík illeszkedik. Felhasználjuk azt a tényt, hogy egy ovoidnak bármely három pontja kifeszít egy síkot. Meghatározzuk a P -re illeszkedő metsző síkok számát. Egy metsző síkot P és az ovoid további 2 pontja feszíti ki. Tehát a

maradék q^2 pontból kell választanunk. Mivel egy metsző sík $q + 1$ pontban metsz így minden metsző síkot $\binom{q}{2}$ -ször számoltunk amikor a P mellé választottunk a rajta lévő maradék q pontból kettőt. A metsző síkok száma tehát

$$\frac{\binom{q^2}{2}}{\binom{q}{2}} = q^2 + q.$$

Mivel P -re összesen $q^2 + q + 1$ sík illeszkedik, így 1 érintősík van P -ben. Tehát az ovoidnak minden pontjában egyértelműen létezik érintősíkja. Végül meghatározzuk az összes metsző síkok számát. Egy metsző síkot meghatároz az ovoidnak 3 pontja, de egy metsző sík $q + 1$ pontban metsz így minden metsző síkot $\binom{q+1}{3}$ -ször számoltunk, így

$$\frac{\binom{q^2+1}{3}}{\binom{q+1}{3}} = q^3 + q$$

metsző síkja van az $\mathcal{E}$ -nek. Az érintősíkokkal együtt éppen $(q^3 + q^2 + q + 1)$ -nyien vannak, ami a tér összes síkjának száma. Így minden sík vagy metsző vagy érintő.

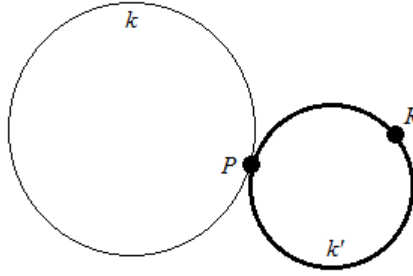
1.9. Möbius síkok

A vizsgatematikában ez a kilencedik tétel.

1.9.1. Definíció. A $(\mathcal{P}, \mathcal{K}, I)$ hármast **Möbius síknak** nevezzük, ha $\mathcal{P}$ és $\mathcal{K}$ két különböző halmaz (**pontok** és **körök** halmaza), I pedig egy **illeszkedésnek** nevezett reláció $\mathcal{P} \times \mathcal{K}$ -n, továbbá teljesülnek a következő axiómák:

- (M1) bármely három különböző ponthoz egyértelműen létezik rajtuk átmenő kör;
- (M2) bármely $P, R \in \mathcal{P}$, $k \in \mathcal{K}$ hármashoz egyértelműen létezik a P -n és R -en átmenő olyan k' kör, amelynek k -val csak a P a közös pontja (1.8 ábra);
- (M3) van 4 olyan pont amik nincsenek egy körön.

Példa. Möbius síkra keresünk példát. Első ötlet: vegyük az Euklideszi sík pontjait és köreit. Az (M1) axióma teljesül. Sajnos az (M2) axióma nem mindig igaz: ha R a k -nak a P -beli érintőjén van, akkor nincs megfelelő k' kör. Ha hozzávesszük az egyeneseket is a körök halmazához, akkor ez a probléma megoldódik. Ellenőrizzük az (M2) axiómát az új körökre is.



1.8. ábra. A Möbius sík második axiómája.

Ha P -n átmegy egy e egyenes (mint kör) és R nincs rajta, akkor szerkeszthető olyan (nem egyenes jellegű) kör, amely átmegy R -en és e a P -ben érinti őt. De jó lesz a P -t R -rel összekötő egyenes is. Sérül az egyértelműség. Vegyünk hozzá a pontokhoz egy (∞) pontot. Ez a pont illeszkedjen minden régi egyenesre, de ne illeszkedjen egyetlen körre sem. Így már valóban Möbius síkot kapunk, amit ügyesen is ellenőrizhetünk: vegyünk egy gömböt, amit a síkunk egy D -vel jelölt déli pontban érint. Legyen N az északi, átellenes pont. Visszafelé hajtjuk végre a sztereografikus projekciót: a körök és az egyenesek körökbe mennek a gömbfelszínen. A pontok pontokba, a (∞) pedig N -be. ♣

1.9.1. Állítás. Tekintsünk egy gömböt a háromdimenziós Euklideszi térben. Nevezzük pontoknak a gömb pontjait, köröknek a gömbfelszínen lévő köröket. Lássuk el a két halmazt a természetes illeszkedéssel. Ekkor Möbius síkot kapunk.

Bizonyítás. Az (M1) axióma teljesül: a három pontra illesztett egyértelmű sík gömbbel vett metszete a megfelelő kör. Az (M3) nyilvánvalóan igaz. Az (M2) axióma: legyen P és R két pont a gömbön, k egy, a P -t tartalmazó, R -et nem tartalmazó kör. Vegyük a gömb P -beli érintősíkját, és ebben a k körünket érintő e_k egyenest. Az e_k -t és az R -et tartalmazó sík gömbbel vett metszete lesz a jó k' . ■

1.9.2. Állítás. Tekintsünk egy $\mathcal{E}$ ovoidot a $\text{PG}(3, q)$ térben (q páratlan). Nevezzük pontoknak az $\mathcal{E}$ pontjait, köröknek az $\mathcal{E}$ metszeteit $q + 1$ pontban metsző síkokkal. Lássuk el a két halmazt a természetes illeszkedéssel. Ekkor Möbius síkot kapunk.

Bizonyítás. Az (M1) axióma teljesül, mert $\mathcal{E}$ -nek nincs három kollineáris pontja, így bármely három pontja egyértelműen meghatároz egy síkot, ami az $\mathcal{E}$ -t $q + 1$

pontban metszi (ami a definíció szerint most egy kör). Az (M2) axióma: Legyen P és R két különböző pontja az ovoidnak. Legyen k egy olyan metsző sík, ami P -t tartalmazza, de R -et nem (definíció szerint ez egy P -t tartalmazó, de R -et nem tartalmazó kör). Az ovoidunknak egyértelműen létezik érintősíkja a P -ben, az érintősíkban a k -t (mint kört) érintő e egyenes is egyértelmű. Az e -re illeszkedő síkok – az érintősíkot kivéve – $q + 1$ pontban metszik az $\mathcal{E}$ ovoidot. Ezek a definíció szerint körök. Mivel ezek a síkok partícionálják a teret, így van egy olyan k' , ami R -et is tartalmazza. Találtunk egy R -et és P -t tartalmazó k' kört. Be kell látnunk, hogy k -nak és k' -nek csak P a közös pontja. Ha lenne még egy közös Q pont, akkor mindkét sík tartalmazná e -t és Q -t is, de akkor megegyeznének. Végül be kell látnunk, hogy nincs több ilyen kör. Ezek az e -t nem tartalmazó síkok, egy ilyen valamely f egyenesben metszi a k síkot. Ez az f átmegy P -n, de nem érintő (az egyértelmű: e), így metszi egy másik M pontban a k síkot (kört), tehát nem tesz eleget az (M2) axiómának. Az (M3) axióma nyilvánvalóan teljesül. ■

Megvizsgáljuk ennek a síknak a kombinatorikus tulajdonságait. A pontok száma $\mathcal{E}$ pontjainak száma: $q^2 + 1$. A körök száma a metsző síkok száma: $q^3 + q$. Minden körre $q + 1$ pont illeszkedik. Tudjuk hogy egy ovoid P pontján át $q^2 + q$ az ovoidot metsző sík van, így a Möbius síkunkban minden ponton át $q^2 + q$ kör megy.

1.9.3. Lemma. *Legyen $(\mathcal{P}, \mathcal{K}, I)$ Möbius sík. Legyen P tetszőleges pontja, $\mathcal{K}_P$ a P -n átmenő körök halmaza. Ekkor $(\mathcal{P} \setminus \{P\}, \mathcal{K}_P, I)$ affin sík (a Möbius sík **derivált síkja**).*

Bizonyítás. (A1) *teljesül:* vegyünk két különböző Q, R pontját a $(\mathcal{P} \setminus \{P\}, \mathcal{K}_P, I)$ síknak. Ha P -t hozzávesszük a síkhoz, akkor egyértelműen létezik olyan kör, ami P, Q, R -t tartalmazza. Most hagyjuk el P -t. A kör éppen a Q, R pontpárt összekötő egyértelmű egyenes.

(A2) *teljesül:* Legyen R és k nem illeszkedő pont-egyenes pár. Vegyük hozzá P -t a síkhoz. Az (M2) axióma miatt egyértelműen van olyan k' kör, ami R -t és P -t tartalmazza és k -val csak P a közös pontja. Hagyjuk el P -t. Ekkor k' az R -en átmenő, a k -t nem metsző egyenes.

(A3) *teljesül:* Tegyük fel, hogy nincs három általános helyzetű pont. Ez azt je-

lenti, hogy bárhogyan is választunk az eredeti síkban három, a P -től különböző pontot, van őket és a P -t tartalmazó kör. Vegyünk tetszőleges négy pontot az eredeti síkon: A, B, C, D . Az indirekt feltevés szerint vannak olyan $P \in K_1, K_2$ körök, amelyekre $A, B, C \in K_1$ és $A, B, D \in K_2$. Ekkor $A, B, P \in K_1, K_2$, ami az (M1) axióma miatt azt jelenti, hogy $K_1 = K_2$. Tehát bármely négy ponthoz van olyan kör, ami őket tartalmazza. Ez ellentmond az (M3) axiómának. ■

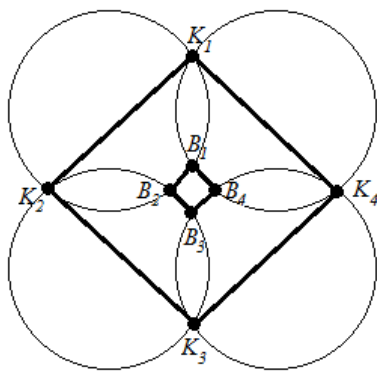
1.9.4. Tétel. *Ha egy Möbius síkon van olyan kör, amire $n + 1$ pont illeszkedik, akkor*

- (i) *a pontok száma $n^2 + 1$;*
- (ii) *a körök száma $n^3 + n$;*
- (iii) *minden körre $n + 1$ pont illeszkedik;*
- (iv) *minden ponton át $n^2 + n$ kör megy.*

Bizonyítás. Legyen k az a kör amire $n + 1$ pont illeszkedik, és legyen $P \in k$. Ezzel a ponttal végrehajtjuk a deriválást: egy n -edrendű affin síkot kapunk. Ennek n^2 pontja van, tehát az eredeti Möbius síkon $n^2 + 1$ pont volt. Továbbá $n^2 + n$ egyenese van, tehát P -n át $n^2 + n$ kör ment az eredeti síkon. Minden egyenesen n pont van, ezek az eredeti síkon a P -n átmenő körök voltak, így a Möbius síkon minden P -n átmenő körön $n + 1$ pont van. Vegyünk egy tetszőleges $T \neq P$ pontot az eredeti síkon és hajtsuk végre vele a deriválást. Mivel van olyan kör ami T -n és P -n is átmegy és az $n + 1$ pontú, így megint n -edrendű affin síkot kapunk. És arra tudunk következtetni, hogy minden T -n átmenő körön $n + 1$ pont van az eredeti síkon és T -n át $n^2 + n$ kör ment az eredeti síkon. Mivel $T \neq P$ tetszőleges pont volt, így a Möbius síkunk minden körén $n + 1$ pont van és minden ponton át $n^2 + n$ kör megy. Még a körök számát kell meghatároznunk. Megszámoljuk az illeszkedő pont-kör párokat. A síkon $n^2 + 1$ pont van, minden ponton át $n^2 + n$ kör megy, így az illeszkedő pont-kör párok száma: $(n^2 + 1)(n^2 + n)$. Másrészt ha x a körök száma, akkor mivel egy körön $n + 1$ pont van, az illeszkedő pont-kör párok száma: $x(n + 1)$. Így $x(n + 1) = (n^2 + 1)(n^2 + n) = (n^3 + n)(n + 1)$, azaz $x = n^3 + n$. ■

1.9.2. Definíció. A tételben leírt Möbius síkot *n-edrendű Möbius síknak* nevezzük.

Meg lehet mutatni, hogy egy Möbius sík pontosan akkor származik elliptikus másodrendű felületből, ha igaz rajta Miquel tétele (1.9 ábra).



1.9. ábra. Miquel tétele azt mondja, hogy $K_1K_2K_3K_4$ pontosan akkor húrnégyszög, ha $B_1B_2B_3B_4$ az.

1.10. Hermite-görbék és felületek

A vizsgatematikában ez a tizedik tétel.

A *polaritás* egy kollineáció projektív síkból a duálisába: az $(x_1 : x_2 : x_3)$ ponthoz az $[x_1 : x_2 : x_3]$ egyenest rendeljük hozzá. Megőrzi az illeszkedést és négyzete az identitást.

Ha $\det A \neq 0$, akkor az $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}A)$ vonalkoordinátájú egyenes egy polaritás. Az $\mathbf{x}$ pontosan akkor illeszkedik a képre, ha $\mathbf{x}A\mathbf{x}^\top = 0$ (*autokonjugáltság*). Az ilyen polaritásnak *közönséges polaritás* a neve.

Tekintsük a $\text{PG}(2, s^2)$ projektív síkot. Testautomorfizmusból származó kollineáció a következő: $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^s, \mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}^s$ minden $\mathbf{x}$ pontra és $\mathbf{u}$ egyenesre (Jelentése: $(x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (x_1^s : x_2^s : x_3^s)$, azaz koordinátánként hatványozunk, egyenesekre ugyanez). Illeszkedés:

$$\mathbf{x}\mathbf{u}^\top = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 u_i x_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 u_i^s x_i^s = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}^s (\mathbf{u}^s)^\top = 0.$$

Vegyük azt a polaritást, ami az $\mathbf{x}$ ponthoz az $\mathbf{x}^s$ -t mint egyenest rendeli, és az $\mathbf{u}$ egyeneshez az $\mathbf{u}^s$ -t mint pontot rendeli. Mivel az s^2 rendű síkon vagyunk így kétszer alkalmazva tényleg az identitást kapjuk $((x^s)^s = x^{s^2} = x)$, és az előbbi számolás szerint megőrzi az illeszkedést. Tehát tényleg polaritást definiáltunk. Az autokonjugált pontok azok amelyekre $\mathbf{x}(\mathbf{x}^s)^\top = 0$, azaz

$$x_1^{s+1} + x_2^{s+1} + x_3^{s+1} = 0.$$

Ezt nevezzük *Hermite-görbének*. A továbbiakban a $\text{GF}(s^2)$ és $\text{GF}(s) \subset \text{GF}(s^2)$ testekben számolunk. Sokszor $\mathbf{xy}^\top$ helyett csak $\mathbf{xy}$ -t írunk.

1.10.1. Állítás. $x^{s+1} = a$ megoldásainak száma 0, ha $a \notin \text{GF}(s)$; $s+1$, ha $a \in \text{GF}(s) \setminus \{0\}$ és 1, ha $a = 0$.

Bizonyítás. Ha $a = 0$, akkor nyilván 1 megoldás van: $x = 0$. Ha $x^{s+1} = a$, akkor $(x^{s+1})^{s-1} = a^{s-1}$. A bal oldal 0 vagy 1, így $a^{s-1} = 0$ vagy 1. A 0-t kizártuk, 1 pedig pontosan akkor lehet, ha $a \in \text{GF}(s)$. Ha $a \in \text{GF}(s) \setminus \{0\}$, akkor $a = g^{s+1}$, ahol g generátorelem a $\text{GF}(s^2)$ multiplikatív csoportjában. A g -t egységgyökökkel szorozva kapjuk az $s+1$ megoldást. ■

1.10.2. Állítás. $x^{s-1} = -1$ megoldásainak száma $s-1$.

Bizonyítás. Ha s páros, akkor az $(s-1)$ -edik egységgyökök jók lesznek, több megoldás pedig nem lehet. Ha s páratlan, akkor a -1 rendje 2, így

$$-1 = g^{\frac{s+1}{2}(s-1)}$$

azaz $g^{\frac{s+1}{2}}$ jó megoldás. Ha $0 \neq t \in \text{GF}(s)$, akkor $g^{\frac{s+1}{2}}t$ adja az összes $s-1$ darab megoldást. ■

1.10.3. Állítás. A *Hermite-görbének* van pontja.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy az $x_3 = 0$ egyenesen $s+1$ pontja van. Az

$$x_1^{s+1} = -x_2^{s+1}$$

alakot kapjuk. Ha $x_2 = 0$, akkor $x_1 = 0$, de a $(0 : 0 : 0)$ nem pont. Tehát $x_2 \neq 0$, a homogenitás miatt feltehető, hogy $x_2 = 1$. Azt kell megmutatnunk, hogy az

$$x_1^{s+1} = -1 \in \text{GF}(s)$$

egyenletnek $s+1$ megoldása van. Ez viszont következik a korábbi állításunkból. ■

1.10.4. Állítás. *Bármely két különböző autokonjugált pont összekötő egyenesén $s+1$ autokonjugált pont van.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ két autokonjugált pont: $\mathbf{x}^{s+1} = 0$, $\mathbf{y}^{s+1} = 0$. Az összekötő egyenesük egy $\mathbf{x}$ -től különböző pontja $\alpha\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ($\alpha \in \text{GF}(s^2)$) alakban írható. Az $(\alpha\mathbf{x} + \mathbf{y})^{s+1} = 0$ egyenlet α megoldásaira vagyunk kíváncsiak.

$$\begin{aligned} (\alpha\mathbf{x} + \mathbf{y})^{s+1} &= \alpha^{s+1}\mathbf{x}^{s+1} + \mathbf{y}^{s+1} + \alpha^s\mathbf{x}^s\mathbf{y} + \alpha\mathbf{xy}^s = \mathbf{y}^{s+1} + \alpha^s\mathbf{x}^s\mathbf{y} + \alpha\mathbf{xy}^s \\ &= \alpha\mathbf{xy}^s + (\alpha\mathbf{xy}^s)^s, \end{aligned}$$

azaz az $\alpha\mathbf{xy}^s + (\alpha\mathbf{xy}^s)^s = 0$ egyenlet α megoldásait keressük. Lehet-e $\mathbf{xy}^s = 0$? Az $\mathbf{y}^s$ éppen az $\mathbf{y}$ képe a polaritásnál. Tehát $\mathbf{xy}^s = 0$ azt jelenti, hogy $\mathbf{x}$ illeszkedik az $\mathbf{y}$ poláris egyenesére ($\mathbf{y}$ képére a polaritásnál). Erre újból polaritást alkalmazva azt kapjuk, hogy $\mathbf{y}$ illeszkedik az $\mathbf{x}$ poláris egyenesére (és persze a saját poláris egyenesére is). De különböző pontok poláris egyenesei különböznek, így $\mathbf{xy}^s \neq 0$. Ekkor $\mathbf{xy}^s = a$ egy $a \neq 0$ elemmel és $\mathbf{x}^s\mathbf{y} = a^s$. Így az $\alpha\mathbf{xy}^s + (\alpha\mathbf{xy}^s)^s = 0$ egyenlet $\alpha a + \alpha^s a^s = 0 \Leftrightarrow \alpha + \alpha^s a^{s-1} = 0$ alakban írható. Az $\alpha = 0$ jó megoldás, ez éppen az $\mathbf{y}$, ami tényleg rajta van az illető egyenesen. Ha $\alpha \neq 0$, akkor $\alpha^{s-1} = -\frac{1}{a^{s-1}}$. Ennek $s-1$ különböző megoldása $\alpha = \frac{t}{a}$ alakban írható, ahol t az $t^{s-1} = -1$ egyenlet $s-1$ megoldásának egyike. Több megoldás pedig nem lehet. Így találtunk s megoldást, s autokonjugált pontot az egyenesen. Az $(s+1)$ -edik pedig maga az $\mathbf{x}$ pont. ■

1.10.5. Következmény. *Két autokonjugált pont összekötő egyenese nem autokonjugált egyenes.*

Bizonyítás. Az előző bizonyításban láttuk, hogy autokonjugált egyenesen csak egy autokonjugált pont lehet. ■

1.10.6. Állítás. *Bármely nem autokonjugált egyenesen $s + 1$ autokonjugált pont van.*

Bizonyítás. Legyen e egy nem autokonjugált egyenes, $P \in e$ tetszőleges nem autokonjugált pont. Vegyük a P poláris egyenesét $p(P)$ -t. Mivel P nem autokonjugált ($\Leftrightarrow$ nem illeszkedik a polárisára), ezért $p(P)$ az e -t egy $R \neq P$ pontban metszi. A P és az R konjugáltak (azaz a megfelelő reprezentáló vektorokkal $\mathbf{p}(\mathbf{r}^s)^\top = 0$, mert ez ekvivalens azzal, hogy $\mathbf{p}^s \mathbf{r}^\top = 0$ ami azt jelenti, hogy R illeszkedik $p(P)$ -re). Az R sem autokonjugált pont, mert ha az volna, akkor $p(R)$ átmenne R -en és P -n is (ez utóbbi azért van így, mert $p(P)$ az R -en megy át), és így $p(R) = e$ volna. Ez nem lehet, mert akkor e autokonjugált volna. Keresünk a $PR = e$ egyenesen $\alpha \mathbf{p} + \beta \mathbf{r}$ alakú autokonjugált pontokat.

$$(\alpha \mathbf{p} + \beta \mathbf{r})^{s+1} = \alpha^{s+1} \mathbf{p}^{s+1} + \beta^{s+1} \mathbf{r}^{s+1} + \beta \alpha \mathbf{p}^s \mathbf{r} + \beta \alpha \mathbf{r}^s \mathbf{p} = \alpha^{s+1} \mathbf{p}^{s+1} + \beta^{s+1} \mathbf{r}^{s+1}$$

mert $\mathbf{p}^s \mathbf{r} = \mathbf{r}^s \mathbf{p} = 0$ a P és R konjugáltsága miatt. Tehát az $\alpha^{s+1} \mathbf{p}^{s+1} + \beta^{s+1} \mathbf{r}^{s+1} = 0$ egyenlet homogén $(\alpha : \beta)$ megoldaspárjai kellenek. Ha $\alpha = 0$ volna akkor $\mathbf{r}^{s+1} = 0$ lenne, ami nem lehet, mert R nem autokonjugált. Feltehető tehát, hogy $\alpha \neq \beta$. Ekkor

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{s+1} = -\frac{\mathbf{r}^{s+1}}{\mathbf{p}^{s+1}}$$

megoldásait keressük. Mivel

$$\left(-\frac{\mathbf{r}^{s+1}}{\mathbf{p}^{s+1}}\right)^s = (-1)^s \frac{\mathbf{r}^{s^2+s}}{\mathbf{p}^{s^2+s}} = -\frac{\mathbf{r}^{1+s}}{\mathbf{p}^{1+s}} = -\frac{\mathbf{r}^{s+1}}{\mathbf{p}^{s+1}},$$

így $-\frac{\mathbf{r}^{s+1}}{\mathbf{p}^{s+1}} \in \text{GF}(s)$. Ilyenkor tudjuk, hogy $s + 1$ megoldásunk van az $\frac{\alpha}{\beta}$ -ra. ■

1.10.7. Tétel. *A Hermite-görbének $s^3 + 1$ pontja van. Minden pontján át 1 darab érintő (egy pontban metsző) és s^2 darab szelő ($s + 1$ pontban metsző) egyenes megy át. A sík minden egyenese vagy érintő vagy szelő.*

Bizonyítás. A Hermite-görbét az autokonjugált pontok alkotják. Azt kell megmutatnunk, hogy $s^3 + 1$ autokonjugált pont van. Jelölje k az autokonjugált pontok számát. Mivel az egyenes pontosan akkor autokonjugált, ha átmegy a pólusán (aki a képe a polaritásnál), az autokonjugált egyenesek száma is k . Így $s^4 + s^2 + 1 - k$

nem autokonjugált egyenes van. Az előzőek szerint másképp is összeszámolhatjuk őket: két autokonjugált pontot összekötő egyenes nem autokonjugált és minden nem autokonjugált egyenesen $s + 1$ autokonjugált pont van. Két autokonjugált pontot $\binom{k}{2}$ -féleképpen választhatunk, egy ilyen pár meghatároz egy nem autokonjugált egyenest és így az összes nem autokonjugált egyenest megkapjuk. Mivel minden nem autokonjugált egyenesen $s + 1$ autokonjugált pont van, így minden egyenest $\binom{s+1}{2}$ -ször számoltunk. Így

$$s^4 + s^2 + 1 - k = \frac{\binom{k}{2}}{\binom{s+1}{2}},$$

azaz $k^2 + (s^2 + s - 1)k - s(s + 1)(s^4 + s^2 + 1) = 0$. Ennek két megoldása: $k = s^3 + 1$ és $k = -s^3 - s^2 - s < 0$. Nyilván az első adja az autokonjugált pontok számát.

Megszámoljuk az egy ponton átmenő érintők és szelők számát. Legyen P a $\mathcal{H}$ Hermite-görbe egy pontja. Jelöljük t -vel a rajta átmenő érintők számát. A P -t kivéve még s^3 pontja van $\mathcal{H}$ -nak. A P -n összesen $s^2 + 1$ egyenes megy át, ezek közül $s^2 + 1 - t$ darab metszi egy másik pontban a $\mathcal{H}$ -t. Minden ilyen egyenesen további s autokonjugált pont van, így $(s^2 + 1 - t)s$ pontja van a $\mathcal{H}$ -nak. Tehát $s^3 = (s^2 + 1 - t)s$, amiből $t = 1$. A P -n átmenő szelők a P -n átmenő egyenesek, kivéve egy érintőt, így a számuk $s^2 + 1 - 1 = s^2$. Mivel egy szelő a $\mathcal{H}$ két pontját (autokonjugált pontok) összekötő egyenes, így azon éppen $s + 1$ autokonjugált pont van, $s + 1$ pontja $\mathcal{H}$ -nak. A $\mathcal{H}$ mind az $s^3 + 1$ pontjában pontosan egy érintő megy, így összesen $s^3 + 1$ érintője van a $\mathcal{H}$ -nak. Megszámoljuk a szelőket: kiválasztunk két pontot a $\mathcal{H}$ $s^3 + 1$ pontja közül, ezek meghatároznak egy szelőt. Mivel egy szelőn $s + 1$ pontja van $\mathcal{H}$ -nak, így minden szelőt $\binom{s+1}{2}$ -ször számoltunk. Így

$$\frac{\binom{s^3+1}{2}}{\binom{s+1}{2}} = s^4 - s^3 + s^2,$$

szelője van $\mathcal{H}$ -nak. A szelők és az érintők száma összesen éppen $s^4 + s^2 + 1$, a sík összes egyeneseinek száma. Tehát a sík minden egyenese vagy érintő vagy szelő. ■

1.10.8. Tétel. *Bármely $(s + 1)$ -szelő pontjaihoz tartozó $s + 1$ darab érintő egy ponton megy át.*

Bizonyítás. Legyen e egy $(s+1)$ -szelő és $A, B \in e$ két tetszőleges pontja. Az A poláris egyenese a Hermite-görbéből csak A -t, a B poláris egyenese a Hermite-görbéből csak B -t tartalmazza, mert ezek autokonjugált pontok. Ezek tehát érintik a Hermite-görbét. A két poláris metszéspontja (M) tehát nincs a görbén, viszont konjugált A -hoz és B -hez is, azaz $\mathbf{ma}^s = 0$ és $\mathbf{mb}^s = 0$ teljesül. Az $(s+1)$ -szelő bármely $T \neq A, B$ pontját reprezentáló $\mathbf{t}$ vektor felírható $\mathbf{t} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ alakban. Felhasználva az $\mathbf{ma}^s = 0$ és $\mathbf{mb}^s = 0$ egyenlőségeket, számolás mutatja, hogy $\mathbf{m}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b})^s = 0$. Ez éppen azt jelenti, hogy a T polárisa (a görbe T -beli érintője) is átmegy M -en. ■

1.10.1. Definíció. A $\text{PG}(n, s^2)$ projektív térben **Hermite-felületnek** nevezzük azon $(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})$ pontok halmazát, melyekre

$$x_1^{s+1} + x_2^{s+1} + \dots + x_{n+1}^{s+1} = 0$$

teljesül.

1.10.9. Tétel. A $\text{PG}(n, s^2)$ projektív térben egy Hermite-felületnek

$$h_n(s) = \frac{(s^{n+1} + (-1)^n)(s^n - (-1)^n)}{s^2 - 1}$$

pontja van.

Bizonyítás. A dimenzió számára vonatkozó indukcióval. Ha $n = 1$, akkor

$$x_1^{s+1} + x_2^{s+1} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{s+1} = -1,$$

aminek $s+1$ megoldása van, ami éppen $h_1(s)$.

Tegyük fel, hogy $n \geq 1$ dimenzióban igaz a formula. Tekintsünk egy $(n+1)$ -dimenziós Hermite-felületet. Metsszük el őt az $\mathcal{S} = \{(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+2}) \mid x_{n+2} = 0\}$ hipersíkkal, ekkor egy n -dimenziós $\mathcal{H}$ Hermite-felületet kapunk $\mathcal{S}$ -ben. Ennek $h_n(s)$ pontja van az indukciós feltevés szerint. A $P = (0 : 0 : \dots : 0 : 1)$ pont nincs rajta az $(n+1)$ -dimenziós Hermite-felületen. A P -n átmenő egyenesek partíciónálják a teret, ezen egyenesek P -től különböző pontjai felírhatóak $\alpha\mathbf{p} + \mathbf{m}$ alakban, ahol M az $\mathcal{S}$ hipersíkban van (ez a P -t az M -mel összekötő egyenes egyenlete). Megmutatjuk, hogy ha M nincs benne $\mathcal{H}$ -ban akkor a P -t vele összekötő

egyenesen $s + 1$ pontja van a nagy $(n + 1)$ -dimenziós Hermite-felületnek. Ha pedig M benne van $\mathcal{H}$ -ban akkor a P -t vele összekötő egyenesen nincs M -től különböző pontja az $(n + 1)$ -dimenziós Hermite-felületnek. Ezzel kész leszünk, mert ekkor

$$h_{n+1}(s) = h_n(s) + \left(\underbrace{\frac{(s^2)^{n+1} - 1}{s^2 - 1}}_{\mathcal{S} \text{ pontjainak száma}} - h_n(s) \right) (s + 1)$$

és ebbe beírva az indukciós feltevés szerinti formulát $h_n(s)$ -re éppen a $h_{n+1}(s)$ -re vonatkozó képletet kapjuk.

Az $(\alpha \mathbf{p} + \mathbf{m})^{s+1} = 0$ egyenlet α megoldásainak számára vagyunk kíváncsiak $\mathbf{m}$ függvényében. Azt kell belátnunk, hogy ennek 1 megoldása van, ha M a kis $\mathcal{H}$ Hermite-felületben van és $s + 1$ megoldása van ha M nincs a kis $\mathcal{H}$ Hermite-felületben. Mivel

$$(\alpha \mathbf{p} + \mathbf{m})^{s+1} = \sum_{i=1}^{n+1} m_i^{s+1} + \alpha^{s+1},$$

így az

$$\alpha^{s+1} = - \sum_{i=1}^{n+1} m_i^{s+1}$$

egyenlet megoldásszámát kell vizsgálnunk. A jobb oldal $\text{GF}(s)$ eleme, mert s -edik hatványa önmaga. Tudjuk, hogy ennek 1 megoldása van, ha $\sum_{i=1}^{n+1} m_i^{s+1} = 0$ (M a $\mathcal{H}$ -ban van) és $s + 1$ megoldása van, ha $\sum_{i=1}^{n+1} m_i^{s+1} \neq 0$ (M nincs a $\mathcal{H}$ -ban). ■

1.11. Lefogó ponthalmazok

A vizsgatematikában ez a hetedik tétel.

1.11.1. Definíció. A projektív sík egy $\mathcal{L}$ ponthalmaza **lefogó ponthalmaz**, ha a sík minden egyenesén van pontja. A $\mathcal{B}$ ponthalmaza **blokkoló ponthalmaz**, ha lefogó és nem tartalmaz teljes egyenest. Egy blokkoló halmaz **minimális** ha bármely pontját elhagyva a maradék már nem blokkoló.

Példa. A $\text{PG}(2, n)$ síkon egy Hermite-görbe $(n\sqrt{n} + 1)$ pontú) vagy egy $\sqrt{n}$ -edrendű részsík $(n + \sqrt{n} + 1)$ pontú) lefogó ponthalmazok. ♣

1.11.1. Tétel. *Ha egy n -edrendű projektív síkon a B minimális blokkoló halmaznak b darab pontja van, akkor $n + \sqrt{n} + 1 \leq b \leq n\sqrt{n} + 1$.*

Az alsó korlátot külön tételben is megfogalmazzuk és ezt a tételt bizonyítjuk csak.

1.11.2. Tétel (Bruen–Pelikán). *Ha egy n -edrendű projektív síkon a B minimális blokkoló halmaznak b darab pontja van, akkor $n + \sqrt{n} + 1 \leq b$. Ha itt egyenlőség áll, akkor B részsík.*

Bizonyítás. Legyenek $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{n^2+n+1}$ a sík egyenesei, és legyen $b_i = |\ell_i \cap B|$ minden i -re. Egy ℓ_i egyenesen tehát b_i pontja van a B halmazunknak. Mivel B blokkoló, így az ℓ_i egyenesünknek van olyan pontja ami nincs B -ben. Ezen további n egyenes megy át, és mivel B lefogó, így mindegyiken van legalább 1 pontja. Vagyis $b \geq n + b_i$ minden i -re. Ezt $b_i \leq b - n$ alakban fogjuk használni.

Számoljuk össze azon (P, e) pont-egyenes párokat, melyekre $P \in B$ és P illeszkedik e -re. Egyrészt B -nek b pontja van és mindegyiken $n + 1$ egyenes megy át. Így $b(n + 1)$ ilyen pontpár van. Másrészt számolhatunk úgy is, hogy minden egyenesen megnézzük a rajta lévő B belüli pontokat: $\sum_{i=1}^{n^2+n+1} b_i$. Így azt kaptuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n^2+n+1} b_i = b(n + 1).$$

Számoljuk össze azon (P_1, P_2) pontpárokat, melyekre $P_1, P_2 \in B$. Egyrészt B -nek b pontja van és bármelyik kettő összeköthető egyenessel. Így $b(b - 1)$ ilyen pontpár van. Másrészt számolhatunk úgy is, hogy minden egyenesen megnézzük a rajta lévő B belüli pontpárokat: $\sum_{i=1}^{n^2+n+1} b_i(b_i - 1)$. Így azt kaptuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n^2+n+1} b_i(b_i - 1) = b(b - 1).$$

Felhasználva ezeket és a korábbi egyenlőtlenségeinket, a

$$\begin{aligned} b(b - 1) &= \sum_{i=1}^{n^2+n+1} b_i(b_i - 1) \leq \sum_{i=1}^{n^2+n+1} (b - n)(b_i - 1) \\ &= (b - n) \left(\sum_{i=1}^{n^2+n+1} b_i - \sum_{i=1}^{n^2+n+1} 1 \right) = (b - n) (b(n + 1) - (n^2 + n + 1)) \end{aligned}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Az egyenlőtlenségnél felhasználtuk, hogy B lefogó: $b_i \geq 1 \Leftrightarrow b_i - 1 \geq 0$. Átrendezés után a

$$0 \leq b^2 - 2(n+1)b + n^2 + n + 1$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ebből azt kapjuk, hogy $n - \sqrt{n} + 1 \geq b$ és $n + \sqrt{n} + 1 \leq b$. Az első nem teljesülhet, mert $b \geq n + 1$. Még azt kell igazolnunk, hogy egyenlőség esetén a B részsík. Ha megnézzük a becsléseinket, akkor azt találjuk, hogy egyenlőség esetén minden i -re vagy $b_i = 1$ vagy $b_i = b - n = \sqrt{n} + 1$. Ebből a részsíkokra vonatkozó jellemzés alapján igazolható, hogy B egy $\sqrt{n}$ -edrendű azaz Baer-részsík. ■

Megemlíjtjük, hogy ha p páratlan prím, akkor a $\text{PG}(2, p)$ síkon érvényes az élesebb $b \geq \frac{3}{2}(p+1)$ becslés is.

1.12. Általánosított sokszögek és négyszögek

A vizsgatematikában ez a tizenegyedik tétel.

Tekintsük a $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, I)$ hármast, ahol $\mathcal{P}$ és $\mathcal{E}$ két különböző halmaz (*pontok és egyenesek* halmaza), I pedig egy *illeszkedésnek* nevezett reláció $\mathcal{P} \times \mathcal{E}$ -n. Feltezzük, hogy a $\mathcal{P} \cup \mathcal{E}$ halmaz bármely két eleme közt létezik illeszkedő elemekből álló *lánc*.

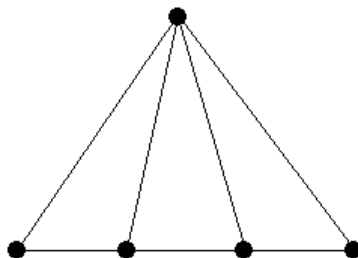
1.12.1. Definíció. Az $x_0 I x_1 I x_2 I \cdots I x_h$ lánc **hossza** h (vigyázzunk, nem $h+1$). Ha $x, y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{E}$, akkor legyen $d(x, y)$ az x -et és y -t összekötő legrövidebb lánc hossza (*távolság*).

1.12.1. Következmény. Bármely két pont illetve egyenes távolsága páros szám, egy pont és egy egyenes távolsága páratlan.

1.12.2. Definíció. A $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, I)$ hármast **általánosított n -szögnek** nevezzük, ha teljesülnek a következők:

- (G n 1) bármely $x, y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{E}$ esetén $d(x, y) \leq n$;
- (G n 2) bármely $x, y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{E}$ esetén ha $d(x, y) = k < n$, akkor egyértelműen létezik őket összekötő k hosszú lánc;
- (G n 3) minden $\mathcal{P} \cup \mathcal{E} \ni x$ -hez létezik olyan $y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{E}$, hogy $d(x, y) = n$.

Példa. Az első érdekes eset az $n = 3$. A (G 3 1) és (G 3 2) axiómák miatt két különböző pontnak egyértelműen létezik összekötő egyenese. Valóban: két különböző pont távolsága páros, pozitív mert különböznek és 3-nál kisebb, azaz két különböző pont távolsága 2. Hasonlóan adódik, hogy két különböző egyenesnek egyértelműen létezik metszéspontja. Ezek alapján az általánosított 3-szögek a projektív síkok és az 1.10 ábrán látható síkhoz hasonló "elfajuló" esetek. ♣



1.10. ábra. Egy általánosított 3-szög.

Megjegyzés. Általánosított n -szög duálisa is általánosított n -szög.

Ha $n = 4$, akkor általánosított 4-szögre példa egy $k \times \ell$ -es négyzetrács a síkon, minden pontra két egyenes illeszkedik. Egy ilyennek a duálisa páros gráf: minden egyenesre két pont illeszkedik.

A továbbiakban feltesszük, hogy $n = 4$ és hogy minden ponton át legalább 3 egyenes megy és minden egyenesen legalább 3 pont van. Továbbá a pontok és egyenesek száma is véges legyen.

1.12.2. Állítás. Minden nem illeszkedő pont-egyenest párhoz egyértelműen létezik a ponton átmenő, az egyenest metsző egyenes. Következésképpen az általánosított 4-szögünkben nincs háromszög (klasszikus értelemben vett).

Bizonyítás. A (G 4 1) axiómából következik, hogy minden ilyen (P, e) párra $d(P, e) = 3$ (1-nél nagyobb páratlan számnak kell lennie és 4-nél kisebbnek). Van tehát olyan R pont és f egyenes, hogy $P I f I R I e$. A (G 4 2) axióma miatt ez a lánc egyértelmű. ■

Ennek az állításnak a duálisa önmaga.

1.12.3. Állítás. *Ha az általánosított 4-szögben van olyan egyenes amire $s + 1$ pont illeszkedik, akkor minden egyenesre $s + 1$ pont illeszkedik.*

Bizonyítás. Legyen e az az egyenes amire $s + 1$ pont illeszkedik. Legyen f egy tetszőleges másik egyenes. Tegyük fel először, hogy f nem metszi e -t. Az előző állítás miatt az e mind az $s + 1$ pontjához egyértelműen létezik a ponton átmenő, az f egyenest metsző egyenes. Tehát az f -nek legalább annyi pontja van mint az e -nek. Több pontja nem lehet, mert ha például $s + 2$ pontja volna, akkor ugyanilyen megfontolással az egy $(s + 2)$ -edik pontot jelölne ki e -n.

Most tegyük fel, hogy f az e -t metsző egyenes. Mivel minden ponton át legalább 3 egyenes megy, így ezen a metszésponton (f és e metszéspontján) átmegy egy h egyenes is. Minden egyenesen van legalább 3 pont, így van egy $h \ni P \notin e$ pont. Mivel minden ponton át legalább 3 egyenes megy, így ezen a P ponton átmegy egy g egyenes. A g nem metszi sem e -t, sem f -et, mert akkor háromszöget kapnánk. Az fentebbiek szerint g -nek ugyanannyi pontja van mint e -nek és f -nek. Tehát f -nek és ugyanannyi pontja van mint e -nek. ■

Ennek az állításnak a duálisa a következő:

1.12.4. Állítás. *Ha az általánosított 4-szögben van olyan pont amin át $t + 1$ egyenes megy, akkor minden ponton át $t + 1$ egyenes megy.*

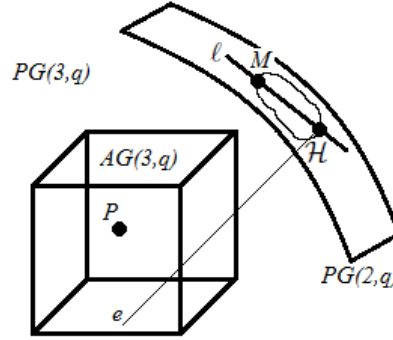
Megjegyezzük, hogy t nem feltétlenül egyezik meg s -sel.

1.12.3. Definíció. *Egy ilyen általánosított 4-szöget (s, t) -rendűnek nevezünk ($s, t \geq 2$).*

1.12.5. Állítás. *Legyen $q \geq 2$ kettőhatvány. Tekintsük a $PG(3, q)$ projektív teret, benne az $AG(3, q)$ affin teret és a $PG(2, q)$ projektív síkot (az $AG(3, q)$ affin tér ideális hipersíkja). Legyen $\mathcal{H}$ egy $(q + 2)$ -ív $PG(2, q)$ -ban. A pontok legyenek $AG(3, q)$ pontjai, az egyenesek $AG(3, q)$ azon egyenesei, melyek ideális pontjai $\mathcal{H}$ -beliek. Az illeszkedés legyen az $AG(3, q)$ térből örökölt. Ezzel egy olyan (s, t) -rendű általánosított 4-szöget adtunk meg, melyre $s \neq t$.*

Bizonyítás. Ha ez valóban általánosított 4-szög, akkor $s + 1$ megegyezik a q -adrendű affin tér egy egyenesén lévő pontok számával, ami q . Tehát $s = q - 1$. A $t + 1$ megegyezik $q + 2$ -vel, azaz $t = q + 1$. Így valóban $s \neq t$. Azt kell igazolnunk,

hogy tényleg általánosított 4-szöget definiáltunk. Azt kell csak ellenőriznünk, hogy minden nem illeszkedő pont-egyenes párhoz egyértelműen létezik a ponton átmenő, az egyenest metsző egyenes.

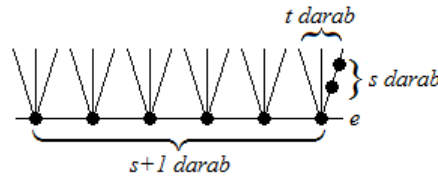


1.11. ábra. Az általánosított 4-szög.

Legyen (P, e) egy nem illeszkedő pont-egyenes pár. Ekkor ők egyértelműen meghatároznak egy S síkot $AG(3, q)$ -ban. Ez az S valamely ℓ egyenesben metszi a $PG(2, q)$ hipersíkot. Mivel ℓ egyenes, így átmegy a $\mathcal{H}$ egy pontján. Biztosan metszi $\mathcal{H}$ -ban az e -t is egy L pontban. Tudjuk azonban, hogy egy $(q + 2)$ -ívnek nincs érintője, így egyértelműen (ℓ szelő) létezik egy M második metszéspont a $\mathcal{H}$ -n. Van olyan $AG(3, q)$ -beli f egyenes, ami átmegy P -n és M az ideális pontja. Az S síkban egyértelműen létezik az e és f metszéspontja, legyen ez R . Ez az R egy $AG(3, q)$ -beli pont, mert amúgy csak L lehetne (ami definíció szerint nem pont), de f -nek M az ideális pontja. Tehát f átmegy P -n és R -ben metszi az e -t. Ha lenne még egy ilyen P -n átmenő egyenes, akkor az is S -ben lenne, tehát az ideális pontja M vagy L lenne. Az M nem lehet, mert akkor f -fel a P és az M is közös pontjuk volna. Így L -ben metszi e -t, ami pedig nem pont, mert nem $AG(3, q)$ -beli. ■

1.12.6. Állítás. Egy (s, t) -rendű általánosított 4-szögnek $(s + 1)(st + 1)$ pontja és $(t + 1)(st + 1)$ egyenese van.

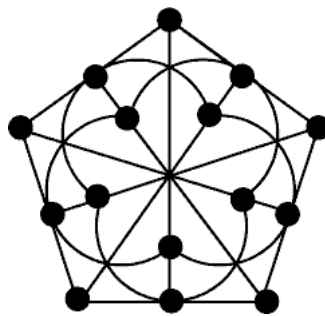
Bizonyítás. Csak a pontok számára vonatkozó formulát bizonyítjuk. Tekintsünk egy e egyenest. Ezen a feltevés szerint $s + 1$ pont van. Minden ilyen pontra külön-külön további t darab egyenes illeszkedik, és minden ilyen egyenesen van további s pont (1.12 ábra).



1.12. ábra. Az (s, t) -rendű általánosított 4-szögnek pontjainak száma.

Nevezzük az e egy pontját és a rajta lévő t egyenest az $\tilde{o}$ összes pontjaikkal egy kupacnak. Tehát összesen $s + 1$ kupacunk van. Egy kupacban $ts + 1$ pont van (mind a t egyenesen s darab és az e -n lévő közös pont). Így összesen $(s + 1)(ts + 1)$ pontunk van. Megmutatjuk, hogy mind különbözőek. Ha két kupac metszené egymást, akkor háromszög (klasszikus értelemben vett) keletkezne, ami nem lehet. Egy kupacban sem lehet egybeesés: tegyük fel, hogy egy kupacban egy f és g egyenesnek az e -n lévő P közös pontjukon kívül van még egy Q közös pontjuk is. Ekkor $fIPg$ és $fIQg$ két különböző 3-hosszú lánc, ami ellentmond a (G 4 2) axiómának. Azon feltétel miatt, hogy minden nem illeszkedő pont-egyenest párhoz egyértelműen létezik a ponton átmenő, az egyenest metsző egyenes; az e -t nem metsző egyeneseken lévő pontokat is számba vettük. ■

Feltehető a kérdés, hogy milyen (s, t) párokra létezik általánosított 4-szög. Kiderül, hogy általában (q, q) -rendű létezik. Ilyen például a $PG(3, q^2)$ térben egy Hermite-felületen lévő pontok és a felület által teljes egészében tartalmazott egyenesek. A $(2, 2)$ -rendű általánosított 4-szögnek 15 pontja és 15 egyenese van (1.13 ábra).



1.13. ábra. A $(2, 2)$ -rendű általánosított 4-szög.

Egy (s, t) -rendű általánosított 4-szög létezésére mond szükséges feltételt a követ-

kező tétel:

1.12.7. Tétel. *Ha létezik (s, t) -rendű általánosított 4-szög, akkor*

$$s + t \mid st(s + 1)(t + 1).$$

1.12.8. Következmény. *Nem létezik $(2, 3)$ -rendű általánosított 4-szög.*

Tétel bizonyítása. Legyenek $P_1, P_2, \dots, P_v$ az általánosított négyszög pontjai ($v = (s + 1)(st + 1)$). Készítsük el azt a $v \times v$ -es illeszkedési mátrixot, melyre az i -edik sor j -edik eleme

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i = j; \\ 0, & \text{ha } i \neq j \text{ és } P_i \text{ és } P_j \text{ nem kollineáris;} \\ 1, & \text{ha } i \neq j \text{ és } P_i \text{ és } P_j \text{ kollineáris.} \end{cases}$$

Ezt a mátrixot nehezen tudjuk kezelni, a $B = A^2$ mátrixot viszont könnyen. A b_{ij} (a B i -edik sorának j -edik eleme) azon pontok száma amelyek P_i -vel és P_j -vel is kollineárisak, azaz

$$b_{ij} = \begin{cases} s(t + 1), & \text{ha } i = j; \\ t + 1, & \text{ha } i \neq j \text{ és } P_i \text{ és } P_j \text{ nem kollineáris;} \\ s - 1, & \text{ha } i \neq j \text{ és } P_i \text{ és } P_j \text{ kollineáris.} \end{cases}$$

Valóban: egy ponton át $t + 1$ egyenes megy, mindegyiken s további pont. Így egy ponthoz $s(t + 1)$ kollineáris van. Egy P ponton át $t + 1$ egyenes megy. Egy vele nem kollineáris Q pont esetén minden ilyen P -n átmenő egyeneshez egy olyan Q -n átmenő van ami metszi őt. Ezek a metszéspontok mind kollineárisak P -hez és Q -hoz is és $t + 1$ darab ilyen van. Végül, két különböző kollineáris pont egy egyenesen van, amelyen még további $s - 1$ pont van. Így

$$A^2 - (s - t - 2)A - (t + 1)(s - 1)I = (t + 1)E,$$

ahol I a $v \times v$ -es egységmátrix, E pedig a $v \times v$ -es csupa 1 mátrix. Kiszámítjuk E sajátértékeit.

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v - \lambda & 1 & \cdots & 1 \\ v - \lambda & 1 - \lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v - \lambda & 1 & \cdots & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} v - \lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix} = (v - \lambda) (-\lambda)^{v-1}.$$

Az első lépésben a második, harmadik, $\dots$, v -edik oszlopot hozzáadtuk az első oszlophoz. A második lépésben az első sort kivontuk az összes többiből. Tehát a v egyszeres, a 0 pedig $(v - 1)$ -szeres sajátértéke az E -nek. A v -hez tartozó sajátvektor a csupa 1 vektor. $A = A^\top$, tehát az A diagonalizálható. A csupa 1 vektort A -val szorozva azt a vektort kapjuk, amelyben minden koordináta az egy ponthoz kollineáris pontok száma: $s(t + 1)$. Az $s(t + 1)$ tehát az A -nak egyszeres sajátértéke. Az ettől különböző sajátértékeire

$$\lambda^2 - (s - t - 2)\lambda - (t + 1)(s - 1) = 0,$$

azaz ezek felelnek meg az E 0 sajátértékeinek. Ebből $\lambda_1 = -t - 1$ és $\lambda_2 = s - 1$. Legyen λ_i multiplicitása m_i ($i = 1, 2$). Ekkor egyrészt $m_1 + m_2 = v - 1 = s^2 t + st + s$, másrészt $s(t + 1) + m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 = \text{tr}(A) = 0$, azaz $(t + 1)m_1 - (s - 1)m_2 = (t + 1)s$. A két egyenletből

$$m_1 = \frac{(st + 1)s^2}{s + t}, \quad m_2 = \frac{st(s + 1)(t + 1)}{s + t}.$$

Mivel m_2 egész szám, így $s + t \mid st(s + 1)(t + 1)$. Habár m_1 is egész, nem szolgáltat új információt, mert $m_1 + m_2$ egész. ■

Az alábbi állítást bizonyítás nélkül közöljük:

1.12.9. Állítás (Higman-egyenlőtlenség). *Ha létezik (s, t) -rendű általánosított 4-szög, akkor $s \leq t^2$ és $t \leq s^2$.*

2. fejezet

Konvex geometria

Ebben a fejezetben konvex halmazok tulajdonságait vizsgáljuk. Elválasztási tételeket bizonyítunk, majd belátjuk Helly tételét és annak néhány következményét. Megvizsgáljuk a szabályos politópokat és a poláris halmazokat, végül megszámloljuk, hogy n hipersík hány részre osztja a d dimenziós teret.

2.1. Konvex halmazok, támaszhipersíkok, elválasztási tételek

A vizsgatematikában ez a tizenkettedik tétel.

2.1.1. Definíció. *A P és R pontok összekötő szakasza*

$$\overline{PR} = \{\alpha \mathbf{p} + \beta \mathbf{r} \mid 0 \leq \alpha, \beta \text{ és } \alpha + \beta = 1\}.$$

*A C pontthalmaz **konvex**, ha bármely két pontjának összekötő szakaszát is tartalmazza.*

Egy $\mathcal{H}$ hipersíkot megadhatunk egy $\mathbf{p}$ pontjával és egy $\mathbf{n}$ normálvektorával:

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{p} \rangle\}.$$

Félttereket a következő módon adhatunk meg:

$$\mathcal{H}^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle \geq \alpha\} \text{ és } \mathcal{H}^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle \leq \alpha\}.$$

Ezek *zárt féltterek*, ha az egyenlőséget nem engedjük meg, akkor *nyílt félttereket* kapunk.

2.1.1. Tétel. *A félterek konvex halmazok.*

Bizonyítás. Tekintsük például a

$$\mathcal{H}^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle \geq \alpha\}$$

zárt félteret. Legyen $\lambda \in [0, 1]$ és $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}^+$, ekkor $\langle \mathbf{n}, \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle + (1 - \lambda) \langle \mathbf{n}, \mathbf{y} \rangle \geq \lambda \alpha + (1 - \lambda) \alpha = \alpha$. ■

2.1.2. Tétel. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz, $P \notin K$ pedig tetszőleges pont. Ekkor egyértelműen létezik K -nak P -hez legközelebbi R pontja.*

Bizonyítás. Legyen K' egy P középpontú gömb és a K metszete. Ekkor K' kompakt. A K' -n értelmezett $R \mapsto d(P, R)$ folytonos függvény felveszi a minimumát. Indirekt tegyük fel, hogy van két minimumhely: R_1 és R_2 , azaz $d(P, R_1) = d(P, R_2)$. Ha R_3 az $R_1 R_2$ felezőpontja, akkor a konvexség miatt $R_3 \in K$ és $d(P, R_1) > d(P, R_3)$, ami ellentmondás. ■

2.1.3. Következmény. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz, $P \notin K$ pedig tetszőleges pont. Ha K -nak a P -hez legközelebbi pontja R és $\mathbf{n} = \overrightarrow{PR}$, $\mathcal{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{p} \rangle\}$, akkor $K \subset \mathcal{H}^+$.*

2.1.4. Tétel. *Minden $K \neq \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz előáll öt tartalmazó zárt félterek metszeteként.*

Bizonyítás. Az előző következményben minden $P \notin K$ pont esetén találtunk K -t tartalmazó zárt félteret. Ezek metszetében nem lehet K -n kívüli pont. ■

2.1.5. Tétel. *Legyenek X és Y diszjunkt zárt konvex halmazok. Ha X kompakt, akkor létezik őket szigorúan elválasztó hipersík.*

Bizonyítás. Minden $P \in X$ pontra legyen $P' \in Y$ az a pont, melyre PP' minimális. Ezután keressük meg azt a pontot X -ben, melyre a távolság a legkisebb (kompakt halmazon folytonos függvény felveszi a minimumát), az így kapott pontpár összekötő egyenesére merőleges sík jó lesz. ■

2.1.6. Tétel. *Legyenek X és Y diszjunkt zárt konvex halmazok. Ekkor létezik őket elválasztó hipersík.*

2.1.7. Tétel. *Ha K zárt konvex halmaz, akkor K minden határpontjában létezik támaszhipersík.*

Bizonyítás. Ha P határpont, R_n pedig egy K^c -beli pontok hozzá tartó sorozata, akkor K és R_n hipersíkkal szétválasztható. Ezek normálvektoraiból kiválasztva egy konvergens részsorozatot, jó hipersíkot kapunk. A támaszhipersík nem mindig egyértelmű. ■

2.1.2. Definíció. *Az E a K ponthalmaz **extremális pontja**, ha nem létezik olyan K -beli szakasz, melynek E relatív belső pontja.*

2.1.3. Definíció. *A $\mathcal{P}$ ponthalmaz **konvex burkának** nevezzük azt a legszűkebb konvex halmazt, amely $\mathcal{P}$ minden pontját tartalmazza. Ezt a halmazt $\text{conv}(\mathcal{P})$ jelöli.*

2.1.8. Tétel (Minkowski). *Minden K kompakt konvex halmaz megegyezik az extremális pontjainak konvex burkával.*

Bizonyítás. Dimenzió szerinti indukcióval. Az $n = 1$ eset triviális. Ha $P \in K$ határpont, H_P pedig egy P -beli támaszhipersík, akkor $K \cap H_P$ legalább eggyel alacsonyabb dimenziós kompakt, konvex halmaz, aminek az extremális pontjai K -nak is extremális pontjai. Ha R belső pont, akkor vegyünk egy őt tartalmazó olyan K -beli szakaszt, melynek mindkét végpontja határpont. Mivel a határpontok benne vannak a konvex burokban, ezért a szakasz minden pontja is benne van. ■

2.2. Helly tétele és alkalmazásai, Jung tétele

A vizsgatematikában ez a tizenharmadik tétel.

A pontok koordinátavektorait néha ugyanúgy fogjuk jelölni, mint a pontokat. A szövegkörnyezetből mindig egyértelműen kiderül, hogy az adott betű éppen mit jelöl.

2.2.1. Állítás. Minden ponthalmaznak egyértelműen létezik konvex burka. A $\text{conv}(\mathcal{P})$ megegyezik a $\mathcal{P}$ -t tartalmazó összes konvex halmaz metszetével és

$$\text{conv}(\mathcal{P}) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i \mid P_i \in \mathcal{P}, 0 \leq \lambda_i, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}.$$

Bizonyítás. Csak a $\text{conv}(\mathcal{P})$ megadását igazoljuk. Először belátjuk, hogy a jobb oldalon álló halmaz konvex. Legyen $U = \sum_{i=1}^k \alpha_i P_i$ és $V = \sum_{i=1}^k \beta_i P_i$, ahol $P_i \in \mathcal{P}$, $0 \leq \alpha_i, \beta_i$ és $\sum_{i=1}^k \alpha_i = \sum_{i=1}^k \beta_i = 1$. Legyen $\lambda \in [0, 1]$ tetszőleges, ekkor

$$\lambda U + (1 - \lambda) V = \lambda \sum_{i=1}^k \alpha_i P_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^k \beta_i P_i = \sum_{i=1}^k (\lambda \alpha_i + (1 - \lambda) \beta_i) P_i$$

és

$$\sum_{i=1}^k (\lambda \alpha_i + (1 - \lambda) \beta_i) = \lambda \sum_{i=1}^k \alpha_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^k \beta_i = \lambda + (1 - \lambda) = 1,$$

tehát a halmaz konvex. Ha pedig $\mathcal{P} \subset \mathcal{K}$ ahol $\mathcal{K}$ konvex halmaz, akkor k szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy ha $R = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$, ahol $P_i \in \mathcal{P}$, $0 \leq \lambda_i$ és $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, akkor $R \in \mathcal{K}$. Ez $k = 1$ esetén nyilvánvaló. Ha $k = m$ -re igaz, akkor $R = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i P_i$ esetén feltehető, hogy $\lambda_{m+1} \neq 1$. Ekkor legyen

$$U = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{m+1}} P_i,$$

ahol

$$\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{m+1}} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{m+1}} = \frac{1}{1 - \lambda_{m+1}} \sum_{i=1}^m \lambda_i = \frac{1 - \lambda_{m+1}}{1 - \lambda_{m+1}} = 1,$$

tehát az indukciós feltevés szerint $U \in \mathcal{K}$. De így $R = (1 - \lambda_{m+1}) U + \lambda_{m+1} P_{m+1}$ azaz $R \in \mathcal{K}$. ■

2.2.1. Definíció. A $P_1, P_2, \dots, P_k$ pontok **affin összefüggők**, ha vannak olyan nem mind 0 α_i számok, hogy $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$ és $\sum_{i=1}^k \alpha_i P_i = O$ (O az origó).

2.2.2. Tétel (Carathèodory). Ha $\emptyset \neq \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges ponthalmaz, akkor $\text{conv}(\mathcal{P})$ bármely pontja előállítható $\mathcal{P}$ legfeljebb $n + 1$ pontjának lineáris kombinációjaként, azaz

$$\text{conv}(\mathcal{P}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i P_i \mid P_i \in \mathcal{P}, 0 \leq \lambda_i, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Bizonyítás. Tehát $k > n + 1$ esetén csökkenteni kell a lineáris kombinációban lévő pontok számát. Az $\mathbb{R}^n$ -ben egy legalább $n + 2$ elemszámú ponthalmaz mindig affin összefüggő. Legyenek tehát az α_i -k nem mind 0 számok úgy, hogy $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$ és $\sum_{i=1}^k \alpha_i P_i = O$. Feltehető, hogy $\alpha_k > 0$ és ha $\alpha_i > 0$, akkor $\lambda_k/\alpha_k \leq \lambda_i/\alpha_i$. Legyen $1 \leq i \leq k$ esetén $\beta_i = \lambda_i - \alpha_i(\lambda_k/\alpha_k)$. Ekkor $\beta_k = 0$, $\beta_i \geq 0$ és $\sum_{i=1}^k \beta_i = 1$. Továbbá

$$\sum_{i=1}^{k-1} \beta_i P_i = \sum_{i=1}^k \beta_i P_i = \sum_{i=1}^k \left(\lambda_i - \alpha_i \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \right) P_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \underbrace{\sum_{i=1}^k \alpha_i P_i}_O = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i.$$

■

2.2.3. Tétel. *Kompakt halmaz konvex burka kompakt.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt halmaz. Ha

$$D = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}) \mid 0 \leq \alpha_i, \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1 \right\},$$

akkor $D \times \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \dots \times \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{(n+1)^2}$ is kompakt, és ennek folytonos képeként megkapható $\text{conv}(\mathcal{P})$, tehát az is kompakt. ■

2.2.4. Tétel (Radon). *Legyen $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_k\} \subset \mathbb{R}^n$ véges ponthalmaz. Ha $k \geq n + 2$, akkor léteznek olyan $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ ponthalmazok, melyekre*

$$(i) \quad \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset;$$

$$(ii) \quad \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 = \mathcal{P};$$

$$(iii) \quad \text{conv}(\mathcal{P}_1) \cap \text{conv}(\mathcal{P}_2) \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Az $\mathbb{R}^n$ -ben egy legalább $n + 2$ elemszámú ponthalmaz mindig affin összefüggő. Legyenek tehát az α_i -k nem mind 0 számok úgy, hogy $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$ és $\sum_{i=1}^k \alpha_i P_i = O$. Feltehető, hogy van olyan $m \geq 1$, hogy $\alpha_i > 0$ amikor $1 \leq i \leq m$, és $\alpha_i \leq 0$ amikor $m < i \leq k$. Ekkor

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = - \sum_{i=m+1}^k \alpha_i = \beta > 0.$$

Legyen $\mathcal{P}_1 = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ és $\mathcal{P}_2 = \{P_{m+1}, P_{m+2}, \dots, P_k\}$. Ezek a halmazok az első két feltételnek nyilván eleget tesznek. Ha pedig

$$R = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^m \alpha_i P_i = -\frac{1}{\beta} \sum_{i=m+1}^k \alpha_i P_i,$$

akkor ez a pont a két rész konvex burkainak metszetében is benne van. ■

2.2.5. Tétel (Helly tétele véges sok halmazra). *Legyenek $K_1, K_2, \dots, K_m$ konvex halmazok $\mathbb{R}^n$ -ben. Ha közülük bármely $(n+1)$ -nek van közös pontja, akkor van olyan pont, amit mindegyikük tartalmaz.*

Bizonyítás. Indukcióval m szerint. Ha $m \leq n+1$, akkor az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy k halmazra igaz az állítás, bizonyítunk $m = k+1$ -re. Legyen

$$P_j \in \bigcap_{i \neq j} K_i.$$

Ilyen pont van az indukciós feltevés szerint. Ezután alkalmazzuk a P_j pontokra Radon tételét. Ezt megtehetjük, mert $m \geq n+2$. A két részre osztott pontok konvex burkai metszetének bármely pontja benne lesz a K_i halmazok mindegyikében. ■

Végtelen sok halmaz esetén a tétel nem igaz (vegyünk nyílt $\frac{1}{k}$ oldalú kockákat). Igaz viszont a következő:

2.2.6. Tétel (Helly tétele végtelen sok halmazra). *Legyen $\mathcal{K}$ kompakt, konvex halmazok tetszőleges családja $\mathbb{R}^n$ -ben. Ha közülük bármely $(n+1)$ -nek van közös pontja, akkor van olyan pont, amit mindegyikük tartalmaz.*

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy a $K \in \mathcal{K}$ kompakt konvex halmaz minden $P \in K$ pontjához van olyan $K_P \in \mathcal{K}$ halmaz, amely nem tartalmazza P -t. Mivel K_P zárt, ezért van olyan P középpontú nyílt gömb, amely teljes egészében diszjunkt K_P -től. Ezek a nyílt gömbök lefedik K -t, és mivel K kompakt így közülük véges sok is lefedi K -t. Ekkor viszont véges sok elemét kiválaszthatjuk $\mathcal{K}$ -nak úgy, hogy a metszetük üres. Ez ellentmond a véges Helly tételnek. ■

2.2.7. Tétel (Klee). *Legyen $\mathcal{K}$ kompakt, konvex halmazok tetszőleges családja $\mathbb{R}^n$ -ben, $M \subset \mathbb{R}^n$ pedig egy további kompakt konvex halmaz. Ekkor*

- (i) *ha $\mathcal{K}$ bármely $n+1$ tagjához található olyan eltoltja M -nek, amelyet mind az $n+1$ tag tartalmaz, akkor van olyan eltoltja M -nek, amit $\mathcal{K}$ minden tagja tartalmaz;*
- (ii) *ha $\mathcal{K}$ bármely $n+1$ tagjához található olyan eltoltja M -nek, amely mind az $n+1$ tagot tartalmazza, akkor van olyan eltoltja M -nek, ami $\mathcal{K}$ minden tagját tartalmazza;*
- (iii) *ha $\mathcal{K}$ bármely $n+1$ tagjához található olyan eltoltja M -nek, amely mind az $n+1$ tagot metszi, akkor van olyan eltoltja M -nek, ami $\mathcal{K}$ minden tagját metszi.*

Bizonyítás. (i) Minden $K \in \mathcal{K}$ esetén legyen

$$K' = \{P \mid (P + M) \subset K\}.$$

Ekkor K' kompakt, konvex halmaz, mert ha $U \in K'$ és $V \in K'$, akkor tetszőleges $\lambda \in [0, 1]$ esetén

$$((\lambda U + (1 - \lambda)V) + M) = (\lambda(U + M) + (1 - \lambda)(V + M)) \subset K,$$

hiszen K konvex. Alkalmazhatjuk Helly tételét. Ha R mindegyik K' halmazban benne van, akkor $R + M$ a $\mathcal{K}$ mindegyik elemében benne van.

(ii) Minden $K \in \mathcal{K}$ esetén legyen

$$K' = \{P \mid K \subset (P + M)\}.$$

Ekkor K' kompakt, konvex halmaz. Alkalmazhatjuk Helly tételét: Ha R mindegyik K' halmazban benne van, akkor az $R + M$ halmaz $\mathcal{K}$ mindegyik elemét tartalmazza.

(iii) Minden $K \in \mathcal{K}$ esetén legyen

$$K' = \{P \mid K \cap (P + M) \neq \emptyset\}.$$

Ekkor K' kompakt, konvex halmaz. Alkalmazhatjuk Helly tételét: Ha R mindegyik K' halmazban benne van, akkor az $R + M$ halmaz $\mathcal{K}$ mindegyik elemét metszi. ■

2.2.8. Tétel (Jung). Legyen $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konvex halmaz. Ha $r(\mathcal{P})$ jelöli a $\mathcal{P}$ -t tartalmazó legkisebb gömb sugarát, $\text{diam}(\mathcal{P})$ pedig a $\mathcal{P}$ pontjai közt fellépő távolságok maximumát, akkor

$$r(\mathcal{P}) \leq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} \text{diam}(\mathcal{P}).$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathcal{P}$ tartalmazza valamely $\text{diam}(\mathcal{P})$ élhosszúságú szabályos szimplex csúcsait.

Bizonyítás. Klee tételének (ii) pontja miatt elegendő legfeljebb $n+1$ pontból álló ponthalmazokra bizonyítani az állítást. Legyen $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ legfeljebb $n+1$ pontból álló halmaz, $\mathcal{G}$ pedig az őket tartalmazó legkisebb sugarú gömb. Legyenek $P_1, P_2, \dots, P_m$ azok a pontok, melyek $\mathcal{G}$ -n vannak. Ha $\mathcal{G}$ középpontja O , akkor

$$O \in \text{conv}(\{P_1, P_2, \dots, P_m\}).$$

Ha ugyanis nem ott lenne, akkor létezne O -t a konvex buroktól elválasztó $\mathcal{H}$ hipersík, és O -nak a $\mathcal{H}$ -n lévő O' merőleges vetületére $O'P_i \leq OP_i$ teljesülne. Azt is feltehetjük, hogy O az origó, és így

$$(P_i P_j)^2 = 2r(\mathcal{P})^2 - 2\langle P_i, P_j \rangle.$$

Ekkor léteznek nemnegatív α_i számok, melyekre $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ és $\sum_{i=1}^m \alpha_i P_i = O$. Így

$$\begin{aligned} 1 - \alpha_j &= \sum_{i \neq j} \alpha_i \geq \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{(P_i P_j)^2}{(\text{diam}(\mathcal{P}))^2} = \frac{2r(\mathcal{P})^2}{(\text{diam}(\mathcal{P}))^2} - \frac{2}{(\text{diam}(\mathcal{P}))^2} \left\langle \underbrace{\sum_{i=1}^m \alpha_i P_i}_{O}, P_j \right\rangle \\ &= \frac{2r(\mathcal{P})^2}{(\text{diam}(\mathcal{P}))^2}. \end{aligned}$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket adjuk össze $j = 1, 2, \dots, m$ -re:

$$m - 1 \geq \frac{2mr(\mathcal{P})^2}{(\text{diam}(\mathcal{P}))^2},$$

tehát

$$r(\mathcal{P}) \leq \sqrt{\frac{m-1}{2m}} \text{diam}(\mathcal{P}) \leq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} \text{diam}(\mathcal{P}).$$

Egyenlőség pontosan akkor van, ha $m = n$ és $P_i P_j = \text{diam}(\mathcal{P})$ minden $i \neq j$ párra.

■

Az előadáson elhangzott még Helly tételének egy alternatív bizonyítása 1- és 2-dimenzióban.

2.2.9. Tétel (Helly tétele véges sok halmazra 1-dimenzióban). *Legyenek $K_1, K_2, \dots, K_m$ konvex halmazok $\mathbb{R}$ -ben. Ha közülük bármely kettőnek van közös pontja, akkor van olyan pont, amit mindegyikük tartalmaz.*

Bizonyítás. A konvex halmazok (a_i, b_i) alakúak ($1 \leq i \leq m$), ahol $a_i, b_i \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Legyen A a legnagyobb a_i és B a legkisebb b_i . Ekkor $A \leq B$, mert különben az A -val kezdődő intervallum diszjunkt volna a B -vel végződő intervallumtól. ■

2.2.10. Tétel (Helly tétele véges sok halmazra 2-dimenzióban). *Legyenek $K_1, K_2, \dots, K_m$ konvex halmazok $\mathbb{R}^2$ -ben. Ha közülük bármely háromnak van közös pontja, akkor van olyan pont, amit mindegyikük tartalmaz.*

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítunk m szerint. Legyen $m = 4$. Legyen $P_i \in K_j \cap K_k \cap K_\ell$, ahol $\{i, j, k, \ell\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Négy esetet különböztetünk meg:

- (i) Ha valamely $i \neq j$ esetén $P_i = P_j$, akkor készen vagyunk.
- (ii) Ha létezik három kollineáris, például P_1, P_2 és P_3 , akkor P_1 és P_3 benne van K_2 -ben, és mivel K_2 konvex, így P_2 is benne van.
- (iii) Három pont, például P_1, P_2 és P_3 háromszöget alkot, és P_4 a háromszög belsejében van. Ekkor a háromszög csúcsai K_4 -ben vannak, K_4 konvex, így P_4 is benne van.
- (iv) A négy pont egy konvex négyszöget alkot. Ekkor az átlók metszéspontja jó lesz közös pontnak.

Most tegyük fel, hogy m halmazra igaz a tétel, bizonyítunk $(m + 1)$ -re. Legyen $K = K_m \cap K_{m+1}$. Ez is konvex és a $K_1, K_2, \dots, K_{m-1}, K$ halmazok teljesítik a tétel feltételeit, alkalmazható az indukciós feltevés. ■

2.3. Szabályos politópok, Schläfli-szimbólum

A vizsgatematikában ez a tizenötödik tétel.

2.3.1. Definíció. Véges sok pont konvex burkát **konvex politóp**nak nevezzük. A $\mathcal{P}$ konvex politópnek $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ **minimális reprezentációja**, ha $\mathcal{P} = \text{conv}\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ és $P_i \notin \text{conv}\{P_1, P_2, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_k\}$. $\mathcal{P}$ **valódi lapjai** a támaszhipersíkokkal való metszetei. Bármely lap dimenziója a metszet dimenziója. $\mathcal{P}$ -t magát is, valamint az üres halmazt is lapnak tekintjük.

2.3.1. Tétel. Ha a $\mathcal{P}$ konvex politópnek $M = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ minimális reprezentációja, akkor a következők ekvivalensek:

- (i) $P_i \in M$;
- (ii) P_i extrémális pontja $\mathcal{P}$ -nek.

2.3.2. Tétel. Ha véges sok zárt féltér metszete korlátos, akkor az konvex politóp.

Bizonyítás. A metszet kompakt, konvex, ezért Minkowski tétele szerint meg egyezik extrémális pontjainak konvex burkával. Dimenzió szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy csak véges sok extrémális pont van. $n = 1$ -re triviális. Ha E extrémális pont, akkor határpont is, azaz van olyan a metszetet előállító H hipersík amelynek pontja. Ekkor azonban E extrémális pontja az egész halmaz H -val vett metszetének is. ■

2.3.2. Definíció. Legyen P egy konvex politóp. Ekkor P egy csúcsához tartozó **csúcsalakzatának** az adott csúcsból kiinduló élek végpontjai által meghatározott politópot nevezzük.

2.3.3. Definíció. A P politóp **szabályos**, ha kétdimenziós lapjai szabályos sokszögek, gömb írható köré, és csúcsalakzatai egybevágó $(n - 1)$ -dimenziós szabályos politópok.

2.3.3. Tétel. Az n -dimenziós szabályos politópok száma $n = 3$ esetén 5, $n = 4$ esetén (legfeljebb) 6, $n \geq 5$ esetén pedig 3.

Bizonyítás. Rendeljük hozzá minden $P \subset \mathbb{R}^n$ politóphoz a következő *Schläfli-szimbólumot*:

$$(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}),$$

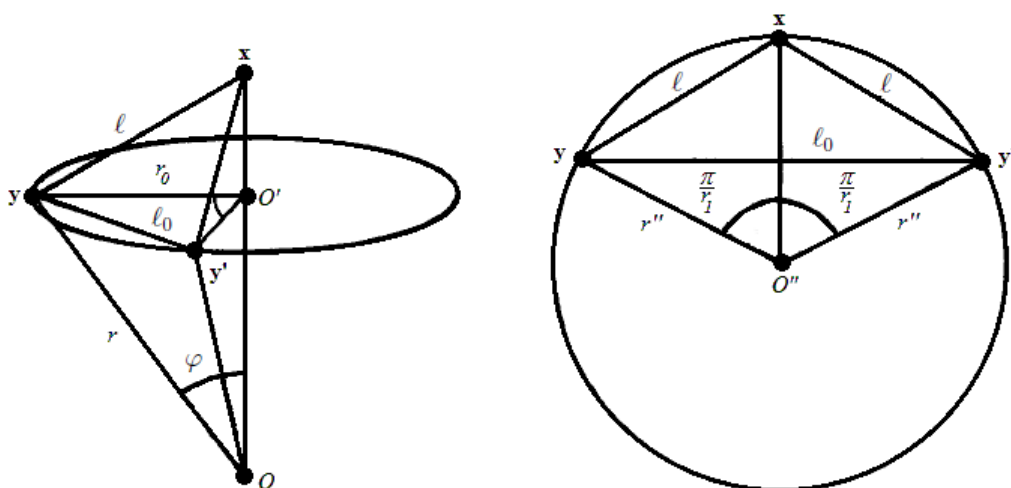
ahol r_1 a két dimenziós lapok oldalszáma, $(r_2, \dots, r_{n-1})$ pedig a csúcsalakzat Schläfli-szimbóluma. Jelölje továbbá a politóp élhosszát ℓ , körülírt gömbjének sugarát r , csúcsalakzatának élhosszát ℓ_0 , csúcsalakzatának körülírt gömbjének sugarát pedig r_0 .

2.3.4. Lemma. *A fent definiált szimbólumokra teljesül az*

$$\frac{\ell^2}{4r^2} = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\frac{\ell_0^2}{4r_0^2}}$$

összefüggés.

Lemma bizonyítása. Vegyük a poliéder egy két dimenziós lapját, azon egy $\mathbf{x}$ csúcst, és legyen annak a két szomszédja $\mathbf{y}$ és $\mathbf{y}'$. Az ábrákon O a poliéder, O' az $\mathbf{x}$ csúcshoz tartozó csúcsalakzat körülírt gömbjének a középpontja. O'' ennek a kiválasztott lapnak a körülírt körének a középpontja, r'' pedig a körülírt kör sugara. Legyen O -nak az $\mathbf{x}$ és az $\mathbf{y}$ csúcsokkal bezárt szöge φ .



2.1. ábra. A lemma bizonyítása.

Az első ábrán az $OO'y$ derékszögű háromszögből $r_0 = r \sin \varphi = 2r \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$. A második ábra alapján felírhatjuk, hogy $\ell = 2r \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$. Ezt átrendezve $\frac{\ell^2}{4r^2} = \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$. Hasonlóképpen a harmadik ábrán az $O''yy'$ és az $O''xy$ egyenlőszárú háromszögekben felírva ugyanezeket az egyenlőségeket $\ell = 2r'' \sin\left(\frac{\pi}{r_1}\right)$ és $\ell_0 = 2r'' \sin\left(\frac{2\pi}{r_1}\right)$. A második képletben alkalmazva a kétszeres szög színuszára vonatkozó képletet, behelyettesítve az első egyenletet adódik, hogy $\ell_0 = 2\ell \cos\left(\frac{\pi}{r_1}\right)$. Ezután sorba behelyettesítve a felírt összefüggéseket a bizonyítandó állításba, felhasználva, hogy $\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 1$, azonosságot kapunk. ■

A lemmából, valamint abból, hogy bármely két dimenziós lap oldalszáma legalább három, következik, hogy egy szabályos politóp esetén:

$$\frac{\ell^2}{4r^2} = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\frac{\ell_0^2}{4r_0^2}} > 0 \Rightarrow \frac{\ell_0^2}{4r_0^2} > \cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right) \geq \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}.$$

A lehetséges szabályos testeket most úgy fogjuk megkonstruálni, hogy megnézzük mi lehet a Schläfli-szimbólumuk.

Tudjuk, hogy $\mathbb{R}^3$ -ban öt szabályos poliéder van. Induljunk ki ezekből a poliéderekből, és nézzük meg, hogyan "folytathatóak" ezek a Schläfli-szimbólumok, ha rekurzívan akarjuk felépíteni őket:

$\mathbb{R}^3$ —ban :		(3, 3)		(3, 4)		(3, 5)		(4, 3)		(5, 3)
$\frac{\ell_0^2}{4r_0^2}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{5+\sqrt{5}}{8}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{3}{4}$
$\frac{\ell^2}{4r^2}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{5-\sqrt{5}}{10}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{3-\sqrt{5}}{6}$
		↙		↓		↘		↓		↓
$\mathbb{R}^4$ —ben :	(3, 3, 3)	(4, 3, 3)	(5, 3, 3)	(3, 3, 4)	(3, 3, 5)	(3, 4, 3)				
$\frac{\ell^2}{4r^2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7-3\sqrt{5}}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3-\sqrt{5}}{8}$	$\frac{1}{4}$				
	↓	•	•	↓	•	•				

Az ábrából látható, hogy $\mathbb{R}^4$ -ben legfeljebb hat szabályos poliéder létezhet. Az is látható, hogy magasabb dimenzióban már csak két "szálon" folytathatjuk a poliéderépítést. Nézzük meg ezt a két folytatási lehetőséget.

Az n -dimenziós $(3, \dots, 3)$ szimbólumot mindig folytathatjuk úgy, hogy elé írunk egy hármast, hiszen indukcióval belátható, hogy $\frac{\ell^2}{4r^2}$ értéke $\frac{n+1}{2n} > \frac{1}{4}$. Így kapjuk az

n -dimenziós szimplexet. $(3, \dots, 3)$ elé négyes is írható, de akkor a szimbólum nem folytatható tovább, hiszen $\frac{\ell^2}{4r^2}$ értéke $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{4}$ lesz. Ez az eset adja az n -dimenziós kockát.

Hasonló megfontolással kapjuk, hogy az n -dimenziós $(3, \dots, 3, 4)$ szimbólum elé is mindig írható hármas, hiszen $\frac{\ell^2}{4r^2}$ értéke mindig $\frac{1}{2}$ lesz, így kapjuk a keresztpolitópot. Ebben az esetben azonban négyes már nem írható a szimbólum elé. ■

2.3.4. Definíció. A $(3, 4, 3)$ szimbólumhoz tartozó poliéder a **24-cella**. Ennek 24 csúcsa van és 24 oktaéder határolja. A csúcsok a következők: A 4-dimenziós kocka csúcsai és egy kétszeresére nagyított 4-dimenziós keresztpolitóp csúcsai. A $(2, 0, 0, 0)$ csúcs szomszédai: $(1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Automorfizmus-csoportjának rendje: $24 \times 48 = 1152$.

2.3.5. Definíció. Az $(5, 3, 3)$ szimbólumhoz tartozó poliéder a **120-cella**. Ezt 120 dodekaéder határolja. A 2-dimenziós lapok száma $120 \times 12/2 = 720$, minden élnél 3 dodekaéder illeszkedik, az élek száma $120 \times 30/3 = 1200$, a csúcsok száma $120 \times 20/4 = 600$. Automorfizmus-csoportjának rendje $120 \times 120 = 14400$. Csúcsai a következők (τ az aranymetszési állandó):

- $(\pm 2, \pm 2, 0, 0)$ összes permutációja, 24 darab,
- $(\pm\sqrt{5}, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ összes permutációja, 64 darab,
- $(\pm\tau, \pm\tau, \pm\tau, \pm\tau^{-2})$ összes permutációja, 64 darab,
- $(\pm\tau^{-1}, \pm\tau^{-1}, \pm\tau^{-1}, \pm\tau^2)$ összes permutációja, 64 darab,
- $(\pm\tau^2, \pm\tau^{-2}, 0, \pm 1)$ páros permutációi, 96 darab,
- $(\pm\sqrt{5}, 0, \pm\tau, \pm\tau^{-1})$ páros permutációi, 96 darab,
- $(\pm 2, \pm 1, \pm\tau, \pm\tau^{-1})$ páros permutációi, 96 darab.

2.3.6. Definíció. A $(3, 3, 5)$ szimbólumhoz tartozó poliéder a **600-cella**. Ezt 600 tetraéder határolja. A 2-dimenziós lapok száma $600 \times 4/2 = 1200$, minden élnél 5 tetraéder illeszkedik, az élek száma $600 \times 6/5 = 720$, a csúcsok száma $600 \times 4/20 = 120$. Automorfizmus-csoportjának rendje $120 \times 120 = 14400$. Csúcsai a következők: A 24-cella csúcsai és a $(\pm\tau, \pm 1, \pm\tau^{-1}, 0)$ páros permutációi. A $(2, 0, 0, 0)$ csúcs szomszédai: $(\tau, \pm 1, \pm\tau^{-1}, 0)$, $(\tau, \pm\tau^{-1}, 0, \pm 1)$ és $(\tau, 0, \pm 1, \pm\tau^{-1})$.

2.4. Politópok kombinatorikus tulajdonságai

A vizsgatematikában ez a tizennegyedik tétel.

Bármely két lap metszete is lap. Bármely két laphoz egyértelműen létezik őket tartalmazó "legkisebb" lap. Tehát minden poliéderhez definiálhatjuk a *laphálóját*.

2.4.1. Definíció. *Két poliéder **kombinatorikusan azonos szerkezetű**, ha laphálójuk izomorfak.*

Például bármely két n -dimenziós szimplex kombinatorikusan azonos. Legyen $c(v, n)$ a kombinatorikusan különböző v csúcsú politópok száma $\mathbb{R}^n$ -ben. Ismert értékek: $c(n+1, n) = 1$ és $c(n+2, n) = \lfloor n^2/4 \rfloor$. Az általános – nehéz – probléma:

Probléma. *Adjunk meg szükséges és elégséges feltételt arra, hogy valamely $\mathcal{L}$ háló egy politóp laphálójája legyen.*

Legyen $f_j(\mathcal{P})$ a $\mathcal{P}$ politóp j -dimenziós lapjainak száma.

2.4.2. Definíció. *A $\mathcal{P}$ politóp **lapvektorának** nevezzük az*

$$f(\mathcal{P}) = (f_0(\mathcal{P}), f_1(\mathcal{P}), \dots, f_{n-1}(\mathcal{P}))$$

vektort.

Természetes kérdés, hogy az Euler–Poincaré formulán kívül van-e más összefüggés is az $f_j(\mathcal{P})$ számok közt.

2.4.1. Tétel. *Az n -dimenziós konvex politópok lapvektorai által kifeszített affin altér az*

$$X_0 - X_1 + \dots + (-1)^{n-1} X_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1}$$

egyenletű hipersík.

Bizonyítás. Dimenzió szerinti indukcióval bizonyítunk. $n = 1, 2$ esetén nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $n \geq 3$ és $\mathbb{R}^n$ minden $\mathcal{P}$ konvex politópjának lapvektorára teljesül a

$$\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j f_j(\mathcal{P}) = \beta$$

összefüggés. Legyen $\mathcal{Q}$ tetszőleges $(n-1)$ -dimenziós konvex politóp, $\mathcal{G}$ és $\mathcal{K}$ pedig a $\mathcal{Q}$ alapú gúla, illetve kettős gúla. Ekkor

$$f(\mathcal{G}) = (f_0(\mathcal{Q}) + 1, f_1(\mathcal{Q}) + f_0(\mathcal{Q}), \dots, f_{n-2}(\mathcal{Q}) + f_{n-3}(\mathcal{Q}), 1 + f_{n-2}(\mathcal{Q})),$$

$$f(\mathcal{K}) = (f_0(\mathcal{Q}) + 2, f_1(\mathcal{Q}) + 2f_0(\mathcal{Q}), \dots, f_{n-2}(\mathcal{Q}) + 2f_{n-3}(\mathcal{Q}), 2f_{n-2}(\mathcal{Q})).$$

Mindkét vektor rajta van a

$$\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j X_j = \beta$$

egyenletű hipersíkon, ezért a két egyenletet kivonva kapjuk, hogy

$$\sum_{j=0}^{n-2} \lambda_{j+1} f_j(\mathcal{Q}) = \lambda_{n-1} - \lambda_0.$$

Ez minden $\mathcal{Q}$ politóra teljesül, ezért az indukciós feltevés szerint a

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_{n-1} - \lambda_0)$$

vektor az

$$(1, -1, 1, \dots, (-1)^{n-2}, 1 + (-1)^{n-2})$$

vektor skalárszorosa. Ezért $\lambda_j = (-1)^{j-1} \lambda_1$, ha $1 \leq j \leq n-1$, $\lambda_{n-1} - \lambda_0 = (1 + (-1)^{n-2}) \lambda_1$, azaz $\lambda_0 = -\lambda_1$. Ekkor az Euler-Poincaré formula szerint

$$\beta = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j f_j(\mathcal{P}) = -\lambda_1 \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j f_j(\mathcal{P}) = -\lambda_1 (1 + (-1)^{n-1}).$$

Ezért a

$$\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j X_j = \beta$$

nem más, mint a

$$\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j X_j = 1 + (-1)^{n-1}$$

összefüggés skalárszorosa. ■

Ha $n = 2$, akkor nyilvánvaló, hogy pontosan akkor létezik konvex sokszög, ha $f_0(\mathcal{P}) = f_1(\mathcal{P})$ teljesül.

2.4.2. Tétel. Három dimenzióban $(f_0(\mathcal{P}), f_1(\mathcal{P}), f_2(\mathcal{P}))$ pontosan akkor lapvektora valamely konvex poliédernek, ha

$$(i) \quad f_0(\mathcal{P}) - f_1(\mathcal{P}) + f_2(\mathcal{P}) = 2;$$

$$(ii) \quad 4 \leq f_0(\mathcal{P}) \leq 2f_2(\mathcal{P}) - 4;$$

$$(iii) \quad 4 \leq f_2(\mathcal{P}) \leq 2f_0(\mathcal{P}) - 4.$$

Magasabb dimenzióban lényegében semmi nem ismert. Az $\mathbb{R}^n$ -beli momentumgörbe v különböző pontjának konvex burka a $C(v, n)$ ciklikus politóp. Ismert a lapok száma, ha $0 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1$, akkor egyszerű:

$$f_j(C(v, n)) = \binom{v}{j+1}.$$

Ha $\mathbb{R}^n$ -ben a $\mathcal{P}$ konvex politópnek v csúcsa van, akkor $f_j(\mathcal{P}) \leq f_j(C(v, n))$.

2.5. Poláris halmazok

A vizsgatematikában ez a tétel nem szerepel, viszont az előadáson elhangzott.

2.5.1. Definíció. A $K \subset \mathbb{R}^n$ halmaz **poláris halmaza** a

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \leq 1, \forall x \in K\}$$

halmaz.

2.5.1. Állítás. Egy $x \in \mathbb{R}^n$ pont poláris halmaza $\mathbb{R}^n$, ha x a nullvektor; zárt féltér, ha x nem a nullvektor.

Bizonyítás. Ha x a nullvektor, akkor bármely vektorral vett skaláris szorzata nulla, vagyis a poláris halmaz az egész tér. Ha x nem a nullvektor, akkor a korábbi ismereteink alapján a fenti egyenlet egy zárt féltér egyenlete. ■

A definíció és a De-Morgan azonosságok következménye az alábbi:

2.5.2. Állítás. Unió polárisa a polárisok metszete: $(\bigcup_{i \in I} K_i)^* = \bigcap_{i \in I} K_i^*$.

2.5.3. Állítás. Ha $K_1 \subseteq K_2$, akkor $K_2^* \subseteq K_1^*$.

2.5.4. Állítás. Egy $\mathbf{0}$ középpontú, r sugarú gömb (kör) polárisa egy $\mathbf{0}$ középpontú $\frac{1}{r}$ sugarú gömb (kör).

2.5.5. Állítás. Ha K kompakt, konvex, és $\mathbf{0} \in \text{int}(K)$, akkor K^* is kompakt, konvex, és $\mathbf{0} \in \text{int}(K^*)$.

Bizonyítás. A poláris halmaz nyilvánvalóan konvex, hiszen konvex feltérek metszeteként is előállítható.

A kompaktsághoz be kell bizonyítanunk, hogy a poláris halmaz korlátos és zárt. Zártnak nyilvánvalóan zárt, hiszen egy pont poláris halmaza zárt, és zárt halmazok metszete is zárt. Mivel az origó belső pont, így van olyan r sugár, amelyre igaz, hogy K tartalmazza az origó középpontú, r sugarú gömböt. Ekkor a fenti állítások miatt K^* része ezen gömb poláris halmazának, ami szintén egy origó középpontú gömb, vagyis korlátos.

Annak igazolásához, hogy az origó K^* belső pontja, K korlátosságát használjuk ki. Mivel K korlátos, van olyan R sugár, amelyre K benne van az origó középpontú, R sugarú gömbben. Ekkor ismét felhasználva a tartalmazásról, és a poláris halmazokról szóló állításunkat kapjuk, hogy K^* tartalmazza az $\frac{1}{R}$ sugarú origó középpontú gömböt, tehát $\mathbf{0} \in \text{int}(K^*)$. ■

2.5.6. Állítás. Ha K zárt, és $\mathbf{0} \in K$, akkor $(K^*)^* = K$ (ahol $(K^*)^*$ definíció szerint K polárisának a polárisa).

Bizonyítás. Az egyenlőséget kétirányú tartalmazás igazolásával bizonyítjuk. Ha $\mathbf{x} \in K$, akkor $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq 1$ minden $\mathbf{y} \in K^*$ esetén, ezért $\mathbf{x} \in (K^*)^*$, így $K \subseteq (K^*)^*$.

Ha pedig egy $\mathbf{x}_0$ vektorra $\mathbf{x}_0 \notin K$ akkor az elválasztási tételek miatt van olyan $H = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{u} \rangle = 1\}$ hipersík, amely elválasztja egymástól K -t és $\mathbf{x}_0$ -t, és az origó helyzete miatt azt is tudjuk, hogy $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle < 1$, ha $\mathbf{x}_0 \in K$ és ezzel szemben $\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{u} \rangle > 1$. Az első egyenlőtlenségből az adódik, hogy $\mathbf{u} \in K^*$, a másodikból pedig hogy $\mathbf{x}_0 \notin (K^*)^*$, vagyis a másik irányú tartalmazás, $(K^*)^* \subseteq K$ is szükségképpen fennáll. ■

2.5.7. Tétel. Legyen K konvex politóp, $\mathbf{0} \in \text{int}(K)$. Ekkor K^* is konvex politóp, és K minden lapjának megfeleltethető K^* valamely lapja, és ez a megfeleltetés megfordítja a tartalmazást.

Bizonyítás. Legyen F a politópunk egy lapja. Definiáljuk ezen laphoz a K^* poláris halmaz $\tilde{F}$ részhalmazát a következőképpen:

$$\tilde{F} = \{\mathbf{y} \in K^* \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 1, \forall \mathbf{x} \in F\}.$$

Mivel F a politóp egy lapja, így definíció szerint van olyan H hipersík, amely ki-metszi őt a politópból, vagyis $F = K \cap H$. Legyen H egyenlete $\langle \mathbf{y}, \mathbf{n} \rangle = 1$, ahol az $\mathbf{n}$ vektor a hipersík normálvektora. Ha F egyetlen pontból áll, akkor $\tilde{F}$ lap. Ellen-kező esetben van egy $\mathbf{x}_0 \in \text{relint}(F)$ pont. Vizsgáljuk most az $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_0 \rangle = 1$ egyenletű hipersíkot, amelyet H' -vel jelölünk. Vegyük észre, hogy H' támaszhipersíkja K^* -nak, hiszen $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_0 \rangle \leq 1$ minden $\mathbf{y} \in K^*$ -ra. Legyen $F' = H' \cap K^*$. Belátjuk, hogy $F' = \tilde{F}$:

- (i) $\tilde{F} \subset F'$: Ha $\mathbf{z} \in \tilde{F}$, az azt jelenti, hogy minden $\mathbf{x} \in F$ -re $\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = 1$, vagyis $\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{z} \rangle = 1$, azaz $\mathbf{z} \in F'$.
- (ii) $F' \subset \tilde{F}$: Legyen $\mathbf{v} \in K^* \setminus \tilde{F}$. A $\mathbf{v}$ választása miatt van olyan $\mathbf{x} \in F$, hogy $\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle < 1$. Mivel $\mathbf{x}_0 \in \text{relint}(F)$, van olyan $\mathbf{x}_1 \in F$, hogy $\mathbf{x}_0 = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{x}_1$, vagyis $\langle \mathbf{v}, \mathbf{x}_0 \rangle < 1$ tehát $\mathbf{v}$ az F' -ben sincsen benne.

Hátra van még annak igazolása, hogy $F \mapsto \tilde{F}$ bijekció. $\tilde{F}$ -hoz hasonlóan definiáljuk $\tilde{\tilde{F}}$ -ot a következőképpen:

$$\tilde{\tilde{F}} = \left\{ \mathbf{y} \in (K^*)^* \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 1, \forall \mathbf{x} \in \tilde{F} \right\}.$$

Mivel $\tilde{\tilde{F}} = \left\{ \mathbf{y} \in K \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 1, \forall \mathbf{x} \in \tilde{F} \right\}$, így adódik, hogy $F \subset \tilde{\tilde{F}}$. Belátjuk a másik irányú tartalmazást is. Legyen H az a hipersík, ami kimetszi F -et K -ból, és legyen H egyenlete $\langle \mathbf{y}, \mathbf{n} \rangle = 1$. Ha $\mathbf{z} \in K \setminus F$, az azt jelenti, hogy $\langle \mathbf{z}, \mathbf{n} \rangle < 1$, azaz $\mathbf{z} \notin \tilde{\tilde{F}}$, vagyis $F = \tilde{\tilde{F}}$. Tehát az $F \mapsto \tilde{\tilde{F}}$ leképezés bijekció. Mivel K^* -nak véges sok támaszhipersíkja van, így K^* poliéder. A tétel azon részét, hogy megfordul a tartalmazás, már korábban beláttuk. ■

2.6. A tér felosztásai hipersíkokkal

A vizsgatematikában ez a tizenhatodik tétel.

2.6.1. Tétel. *Az $\mathbb{R}^d$ teret n darab hipersík legfeljebb*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{d}$$

részre osztja.

Bizonyítás. Indukcióval n -re. Az állítás $n = 0, 1$ esetén nyilvánvaló (minden d -re). Tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás bármely d -re, bizonyítunk $(n + 1)$ -re. Vegyünk egy $(n + 1)$ -edik hipersíkot. Annyi új rész keletkezik ahány részre az eredeti n hipersík osztja az $(n + 1)$ -edik hipersíkot. Az eredeti n hipersík $(d - 2)$ -dimenziós hipersíkokban metszi a $(d - 1)$ -dimenziós $(n + 1)$ -edik hipersíkot. Így azt legfeljebb

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{d-1}$$

részre osztják. Legfeljebb ennyivel nő a tér felosztásainak száma. Tehát $n + 1$ hipersík az $\mathbb{R}^d$ teret legfeljebb

$$\begin{aligned} & \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{d} \right) + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{d-1} \right) \\ &= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{n+1}{d} \end{aligned}$$

részre osztja. ■

Az előadóról

Kiss György 1961-ben született. 1996-ban szerzett Ph.D. tudományos fokozatot matematika- és számítástudományokból. 1987 óta tanít az Eötvös Loránd Tudományegyetemen. Jelenleg a Geometriai Tanszék docense. 1997 óta a Szegedi Tudományegyetem részmunkaidős oktatója. Kombinatorikus és diszkrét geometriával valamint véges geometriákkal foglalkozik. Összesen 20 előadást tartott nemzetközi konferenciákon és 32 publikációt adott közre. Tagja a Bolyai Matematikai Társulatnak és az Amerikai Matematikai Társulatnak.



Irodalomjegyzék

- [1] Kiss Gy., Szőnyi T., *Véges geometriák*. Polygon Kiadó, Szeged, 2001.
- [2] Szabó L., *Konvex geometria*. ELTE Eötvös Kiadó Kft., Budapest, 1996.