A STIRLING-FORMULA EGY BIZONYÍTÁSA

NEMES GERGŐ

2008. november 3.

Tétel. *Minden pozitív egész n számhoz található olyan $0 < \lambda_n < \frac{1}{2}$ szám, hogy*

$$n! = \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n+\frac{1}{12n+\lambda_n}}.$$

Bizonyítás. Legyen $a_n := \dfrac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$. Vizsgáljuk az $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ hányadost!

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}} \cdot \frac{(n+1)^{n+3/2}}{(n+1)!e^{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2} \frac{1}{e} = e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}.$$

Végezzünk el némi algebrai átalakítást a $b_n := \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-1$ sorozaton!

$$b_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-1 = (2n+1)\,\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\dfrac{1}{2n+1}}{1-\dfrac{1}{2n+1}}\right)-1 = (2n+1)\operatorname{artanh}\left(\frac{1}{2n+1}\right)-1.$$

Az így nyert alakra alkalmazhatjuk az artanh függvény hatványsorát:

$$\begin{aligned}
b_n = (2n+1)\operatorname{artanh}\left(\frac{1}{2n+1}\right)-1 &= (2n+1)\left\{\frac{1}{(2n+1)}+\frac{1}{3\,(2n+1)^3}+\frac{1}{5\,(2n+1)^5}+\frac{1}{7\,(2n+1)^7}+\cdots\right\}-1\\
&= \frac{1}{3\,(2n+1)^2}+\frac{1}{5\,(2n+1)^4}+\frac{1}{7\,(2n+1)^6}+\cdots .
\end{aligned}$$

Először alsó becslést adunk a kapott sorra:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{3\,(2n+1)^2}+\frac{1}{5\,(2n+1)^4}+\frac{1}{7\,(2n+1)^6}+\cdots\\
&> \frac{1}{3\,(2n+1)^2}+\frac{1}{3\cdot 2\cdot (2n+1)^4}+\frac{1}{3\cdot 2^2\cdot (2n+1)^6}+\cdots\\
&= \frac{1}{3\,(2n+1)^2}\left\{1+\frac{1}{2\,(2n+1)^2}+\frac{1}{2^2\,(2n+1)^4}+\cdots\right\}\\
&= \frac{1}{3\,(2n+1)^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2(2n+1)^2}} = \frac{1}{3\,(2n+1)^2-3/2} = \frac{1}{12n^2+12n+3/2}\\
&> \frac{1}{12n^2+13n+25/48} = \frac{1}{12n+1/2}-\frac{1}{12\,(n+1)+1/2}.
\end{aligned}$$

Most nézzük a felső becslést!

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{3\,(2n+1)^2}+\frac{1}{5\,(2n+1)^4}+\frac{1}{7\,(2n+1)^6}+\cdots\\
&< \frac{1}{3\,(2n+1)^2}+\frac{1}{3\,(2n+1)^4}+\frac{1}{3\,(2n+1)^6}+\cdots\\
&= \frac{1}{3\,(2n+1)^2}\left\{1+\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right\}\\
&= \frac{1}{3\,(2n+1)^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}} = \frac{1}{3\,(2n+1)^2-3} = \frac{1}{12n^2+12n}\\
&= \frac{1}{12n}-\frac{1}{12\,(n+1)}.
\end{aligned}$$

Ezzel tehát azt kaptuk, hogy
$$e^{\frac{1}{12n+1/2}-\frac{1}{12(n+1)+1/2}} < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{12(n+1)}},$$
vagyis
$$a_{n+1}e^{-\frac{1}{12(n+1)+1/2}} < a_n e^{-\frac{1}{12n+1/2}},$$
$$a_{n+1}e^{-\frac{1}{12(n+1)}} > a_n e^{-\frac{1}{12n}}.$$
Az $a_n e^{-\frac{1}{12n+1/2}}$ sorozat szigorún monoton csökken, az $a_n e^{-\frac{1}{12n}}$ sorozat pedig szigorúan monoton nő. Nyilván korlátosak is, hiszen minden pozitív egész n esetén
$$a_n e^{-\frac{1}{12n+1/2}} > a_n e^{-\frac{1}{12n}} \geq a_1 e^{-\frac{1}{12}} > 0,$$
$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_n e^{-\frac{1}{12n+1/2}} \leq a_1 e^{-\frac{1}{12+1/2}}.$$
Ebből következik, hogy mindkettő konvergens és könnyen látható, hogy a két sorozat limesze ugyanaz az a pozitív valós szám. Sőt a monotonitási tulajdonságaikból következik, hogy
$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n e^{-\frac{1}{12n+1/2}},$$
$$ae^{\frac{1}{12n}} > a_n > ae^{\frac{1}{12n+1/2}}.$$
Rögzített n mellett az $f : x \mapsto ae^{\frac{1}{12n+x}}$ függvény folytonos a $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ intervallumon. Bolzano tétele szerint az intervallum két végpontjában felvett érték közé eső minden értéket felvesz az intervallum belsejében, ezért van olyan $\lambda_n \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, amelyre
$$a_n = ae^{\frac{1}{12n+\lambda_n}}$$
teljesül. A közrefogási-elv miatt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, továbbá
$$a_{2n} = \frac{(2n)!e^{2n}}{(2n)^{2n+1/2}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{(n!)^2 e^{2n}}{n^{2n+1}} \sqrt{\frac{n}{2}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} a_n^2 \sqrt{\frac{n}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{1\cdot 1}{2\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 3}{4\cdot 4}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{(2n-1)(2n-1)}{2n\cdot 2n}} a_n^2 \sqrt{\frac{n}{2}} = \sqrt{\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n\cdot 2n}} a_n^2 \sqrt{\frac{n}{4n+2}}.$$
Az utolsó lépésben az első négyzetgyök alatt éppen a Wallis-féle sorozat reciproka áll, így mindkét oldal határértékét véve
$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} a^2 \sqrt{\frac{1}{4}},$$
ahonnan $a > 0$ miatt $a = \sqrt{2\pi}$. Tehát
$$a_n = \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{12n+\lambda_n}},$$
azaz
$$\frac{n!e^n}{n^{n+1/2}} = \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{12n+\lambda_n}}.$$
Az egyenlőséget átrendezve
$$n! = \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n+\frac{1}{12n+\lambda_n}}$$
teljesül alkalmas $0 < \lambda_n < \frac{1}{2}$ számra. Ezzel a bizonyítást befejeztük. ■