

1/2. pót ZH, 2025. május 23. 10.15-11.45, H 405A.

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden résztvevő a **nevét**, és a **NEPTUN kódját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése (tájékoztató jelleggel): 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe. Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, számoló- és számítógép, mobiltelefon, tévé, rádió, fűnyíró, hajszárító, stb használata és a dolgozatírás közben történő együttműködés.

1. Hány olyan fa van a $v_1, v_2, \dots, v_{100}$ csúcsokon, amelynek pontosan egy olyan $v_i v_j$ éle van, ahol $i - j$ páratlan?

2. Egy 100 csúcsú teljes gráf éleit úgy súlyoztuk meg, hogy minden súly pozitív és különböző. Bizonyítsuk be, hogy a legnagyobb és a második legnagyobb súlyú él nem lehet benne a minimális összsúlyú feszítőfában.

3. A G egy 100 csúcsú egyszerű gráf, bármely két szomszédos csúcs fokszámának az összege kevesebb, mint 99. Bizonyítsuk be, hogy G komplementere, $\overline{G}$, tartalmaz Hamilton kört.

4. A (G, s, t, c) hálózatban a maximális folyam nagysága 10. A $(G, s, t, c + 1)$ hálózatban (minden kapacitáshoz hozzáadunk 1-et) pedig 16. Bizonyítsuk be, hogy a (G, s, t, c) hálózatban van olyan e él, amelyre $c(e) < 2$.

5. Határozzuk meg, hogy maximálisan hány éle lehet egy 6 csúcsú G egyszerű gráfnak, amelyre $\lambda(G) = 3$. ($\lambda(G)$ a G gráf élösszefüggőségi száma)

6. G ismét egy 100 csúcsú gráf, minden csúcs foka legalább 1 és legfeljebb 4 ($1 \leq d(v) \leq 4$). Bizonyítsuk be, hogy $\nu(G) \geq 10$. ($\nu(G)$ a független élek maximális száma.)

2. pót ZH, 2025. május 23. 10.15-11.45, H 405A.

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden résztvevő a **nevét**, és a **NEPTUN kódját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése (tájékoztató jelleggel): 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe. Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, számoló- és számítógép, mobiltelefon, tévé, rádió, fűnyíró, hajszárító stb használata és a dolgozatírás közben történő együttműködés.

Segítség: $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\chi(G)$: kromatikus szám, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi'(G)$: élkromatikus szám.

1. Határozzuk meg $\alpha(G)$ minimumát és maximumát az olyan 100 csúcsú G gráfokon, amelyekre $\nu(G) = 20$.

2. A G gráf csúcsai $v_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq 21$. A $v_{i,j}$ és $v_{k,l}$ *különböző* csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $i = k$ vagy $j = l$. Határozzuk meg a $\alpha(G)$, $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ értékeket.

3. Adott a síkon egy véges ponthalmaz, P . Minden pont megfelel G egy csúcsának. Két pont (csúcs) akkor és csak akkor van összekötve, ha a szakasz, aminek ők a végpontjai, vízszintes vagy függőleges, és nincs rajta más P -beli pont. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 3$.

Vagy 5 pontért azt, hogy $\chi(G) \leq 4$.

4. A 3. feladatban szereplő G gráfra mutassuk meg, hogy $\chi'(G) \leq 4$.

5. Legyen G egy gráf, amelynek az élei ki vannak színezve pirossal és kékkel. A piros élek egy fát, a kék élek egy síkgráfot alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 8$.

6. A G síkbarajzolt egyszerű gráfnak minden lapját 6 él határolja (multiplicitással számolva: ha egy él mindkét oldalról ugyanazt a lapot határolja, akkor kétszer számoljuk). Bizonyítsuk be, hogy nem lehet 4-reguláris.