Kombinatorika és gráfelmélet I

1. pót ZH, 2025. április 14. 10.15-11.45, H 406.

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden résztvevő a **nevét**, és a **NEPTUN kódját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése (tájékoztató jelleggel): 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe. Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, számoló- és számítógép, mobiltelefon, tévé, rádió, fűnyíró, hajszárító stb használata és a dolgozatírás közben történő együttműködés.

1. Hány olyan fa van a $v_1, v_2, \ldots, v_{100}$ csúcsokon, amelynek pontosan 98 levele van?

2. Egy 100 csúcsú teljes gráf egyik csúcsa v. Az éleit úgy súlyoztuk meg, hogy a v-re illeszkedő élek súlya 2, az összes többi él súlya 1. Hány különböző minimális összsúlyú feszítőfája van?

3. A G egy 23 csúcsú egyszerű reguláris gráf (minden fokszám ugyanannyi). Bizonyítsuk be, hogy G vagy komplementere $\overline{G}$ tartalmaz Hamilton kört.

4. (G, s, t, c) egy hálózat. Az e_1 él kapacitása $c(e_1) = x$, az e_2 él kapacitása $c(e_2) = y$. Az összes többi e élhez adott egy-egy $c(e) > 0$ kapacitás. Adott $x, y > 0$ számokra legyen $M(x, y)$ a maximális folyam nagysága. Tudjuk, hogy $M(10, 10) = 15$. Bizonyítsuk be, hogy $M(100, 50) \leq 105$.

5. G egy 3-pontösszefüggő 32 csúcsú gráf, u, v két csúcsa. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz egy legfeljebb 22 hosszú kört, ami tartalmazza u-t és v-t.

6. G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{12}$. A v_i és v_j, $1 \leq i < j \leq 12$ csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $|i - j|$ nem osztható 3-mal. Határozzuk meg $\tau(G)$-t és $\nu(G)$-t.
($\tau(G)$ a lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$ a független élek maximális száma.)