

# Kombinatorika és gráfelmélet 1.

7. gyakorlat, 2022. március 28

*Páros gráfok, párosítások, Hall, Frobenius, König tételek.*

## Tudnivalók

$G(A, B, E)$  páros gráf, ha  $A$  és  $B$  a csúcsok halmaza,  $E$  az élek halmaza, és minden él  $A$  és  $B$  között fut. Legyen  $G$  egy tetszőleges gráf.

Egy gráf akkor és csak akkor páros, ha nem tartalmaz páratlan hosszú kört.

Egy  $e_1, e_2, \dots, e_k$  élhalmaz **független**, vagy **párosítás**, ha nincs közös végpontjuk.

Egy ponthalmaz **lefogó**, ha  $G$  minden élének legalább az egyik végpontját tartalmazza.

$\tau(G)$ : lefogó pontok minimális száma;

$\nu(G)$ : független élek maximális száma;

Minden  $G$  gráfra igaz, hogy  $\nu(G) \leq \tau(G)$ . (Mert a  $\nu$  darab független él lefogásához is kell már  $\nu$  darab pont.)

Tetszőleges  $X$  csúcshalmazra legyen  $N(X)$   $X$  szomszédainak a halmaza, vagyis azon csúcsok halmaza, amelyek legalább egy  $X$ -beli csúccsal össze vannak kötve.

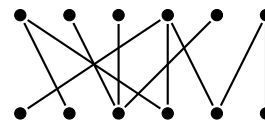
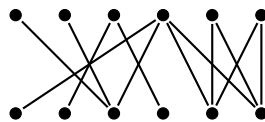
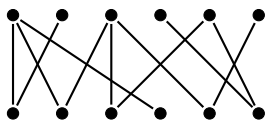
Legyen most  $G = G(A, B, E)$  páros gráf, vagyis  $A$  és  $B$  a csúcsok halmaza,  $E$  az élek halmaza, és minden él  $A$  és  $B$  között fut.

**Frobenius tétel:** Akkor és csak akkor van a  $G(A, B, E)$  páros gráfban teljes (minden csúcsot párosító) párosítás, ha  $|A| = |B|$ , és minden  $X \subset A$ -ra  $|X| \leq |N(X)|$ .

**Hall tétel:** Akkor és csak akkor van a  $G(A, B, E)$  páros gráfban  $A$ -t lefedő párosítás, ha minden  $X \subset A$ -ra  $|X| \leq |N(X)|$ .

**König tétel:** (a) Ha  $G$  páros gráf, akkor  $\nu(G) = \tau(G)$ .

1. Határozzuk meg a maximális párosítás méretét az alábbi gráfokban.



2. Adott  $n$  fiú és  $n$  lány úgy, hogy minden fiúnak legfeljebb 1 rokona van a lányok között, és bármely lánynak van olyan fiú, aki nem rokona. Bizonyítsuk be, hogy a fiúk és a lányok párokba rendezhetők úgy, hogy rokonok nem alkotnak párt.
3. Bizonyítsuk be, hogy ha a  $G$  páros gráf összefüggő és az  $A$  osztályában a fokszámok különbözők, akkor  $G$ -nek van  $A$ -t fedő párosítása.
4. Egy kiránduláson  $n$  házaspár vesz részt, és közöttük kellene elosztani  $2n$  különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy minden résztvevő legalább  $n$  fajtát szeret a  $2n$ -féle csokoládé közül, és az is teljesül, hogy minden csokoládét szereti minden házaspárnak legalább az egyik tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kioszthatók úgy a csokoládék, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.
5. A  $G$  irányított gráf minden csúcsából  $k$  él indul és  $k$  él érkezik. Igaz-e, hogy  $G$ -nek kiválaszthatók pontdiszjunkt irányított körei, melyek  $G$  minden csúcsán áthaladnak?
6. Igazoljuk, hogy minden reguláris páros gráfnak van teljes párosítása.
7. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris, páros gráfban a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.
8. a. Bizonyítsuk be, hogy minden véges  $G$  gráfra  $2\nu(G) \geq \tau(G) \geq \nu(G)$  teljesül. b. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $2\nu \geq \tau \geq \nu$  számokhoz van olyan  $G$  gráf, amelyre  $\nu(G) = \nu$  és  $\tau(G) = \tau$ .
9. Egy táncmulatságon 25 lány és 25 fiú van jelen. E társaságban minden lány ismeretségben van legalább 13 fiúval és minden fiú legalább 13 lánnyal. Bizonyítsuk be, hogy páros táncra perdülhetnek egyszerre mind az 50-en úgy, hogy az egymással táncolók ismerik egymást!
10. Konstruáljunk olyan gráfot, amelynek pontosan  $k$  db különböző teljes párosítása van.
11. Igaz-e, hogy tetszőleges véges  $G$  gráf mindazon élei, amik  $G$  valamelyik teljes párosításában szerepelnek, páros gráfot alkotnak?

12. Valaki véletlenszerűen szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy darab 2-es, egy darab 3-as, stb., egy darab  $A$ ). (A francia kártyában 13 fajta figura van: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,  $J$ ,  $Q$ ,  $K$ ,  $A$ . Minden figurából 4 darab van egy pakliban.)
13. Adott egy  $n \times n$ -es mátrix, amelynek minden sorában, és oszlopában pontosan  $k$  darab egyes van. Bizonyítsd be, hogy ekkor kiválasztható  $n$  darab egyes úgy, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy darab egyest választottunk ki!

### Házi feladat

1. Legyen  $G(A, B, E)$  páros gráf. Tudjuk, hogy minden  $X \subseteq A$  esetén  $|N(X)| \geq |X| - 1$ . Bizonyítsuk be, hogy  $\nu(G) \geq |A| - 1$ , vagyis  $G$  tartalmaz  $|A| - 1$  független élt.
2. Legyen  $G$  egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs fokszáma legalább 6. Igazoljuk, hogy  $\nu(G) \geq 6$ . ( $\nu(G)$  a független élek maximális számát jelöli.)
3. Legyenek  $G$  csúcsai  $v_1, \dots, v_{12}$ ,  $v_i$  és  $v_j$  ( $i \neq j$ ) akkor és csak akkor vannak összekötve, ha  $ij$  osztható 6-tal. Határozzuk meg  $\nu(G)$  értékét (és bizonyítsuk be, hogy annyi).