

Kombinatorika és gráfelmélet I
1. ZH, 2022. április 8, 10.15-11.45, T 601/2
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Hány fa van a $v_1, v_2, \dots, v_8$ csúcsokon, ahol minden foksám vagy 1, 4, vagy 7?

Tekintsük a fák Prüfer kódjait, ezek egyértelműen megfelelnek a fáknek. A Prüfer kód 6 hosszú és minden csúcs sorszáma a foksáma -1 -szer szerepel. 2 pont

Tehát az olyan kódokat keressük, ahol minden sorszám 0-szor, 3-szor vagy 6-szor szerepel. 2 pont

Vagyis a kód olyan, hogy vagy mind a hat szám egyforma, vagy három egyforma és a másik három is egyforma (de a másiktól különböző). 3 pont

Az első esetben 8 lehetőség van, a második esetben $\binom{6}{3} \cdot 8 \cdot 7 / 2 = 560$, összesen tehát 568 ilyen fa van. 3 pont

2. A G teljes gráf csúcsai $v_1, v_2, \dots, v_8$. A $v_i v_j$ ($i \neq j$) él súlya 1, ha $i + j$ páros, és x , ha $i + j$ páratlan.

Adjuk meg a minimális összsúlyú feszítőfa súlyát x függvényében (és bizonyítsuk be, hogy ennyi), ahol $0 < x$ tetszőleges valós szám.

Legyen $V_1 = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$, $V_2 = \{v_2, v_4, v_6, v_8\}$. Ezzel a jelöléssel, a V_1 -beli és a V_2 -beli éle súlya 1, a V_1 és V_2 közötti élek súlya x . Nézzük meg, hogyan fut le a mohó algoritmus, ez megtalálja a minimális feszítőfát. 2 pont

Ha $x < 1$, akkor az algoritmus x súlyú éleket választ, amíg lehetséges. És ezekből már fel is épül egy feszítőfa, (például $v_1 v_2, v_1 v_4, v_1 v_6, v_1 v_8, v_2 v_3, v_2 v_5, v_2 v_7$). Tehát ebben az esetben a válasz $7x$. 3 pont

Ha $x > 1$, akkor az algoritmus 1 súlyú éleket választ, amíg lehetséges. De ezzel csak egy feszítőfát kapunk V_1 -en, és egyet V_2 -n (mindkettőnek 3 éle van) ezután be kell vennünk egy x súlyú élt, ami összeköti a két komponenset. Tehát ebben az esetben a válasz $6 + x$. 3 pont

Ha $x = 1$, akkor minden feszítőfa súlya ugyanannyi, 7. Tehát a válasz 7 ha $x \leq 1$ és $6 + x$ ha $x \geq 1$. 2 pont

3. A G 12 csúcsú gráf négy háromszög diszjunkt uniója. Legkevesebb hány élt kell hozzáadni G -hez, hogy legyen Euler körsétája?

El kell érünk, hogy a kapott gráf összefüggő legyen és minden foksám páros legyen. Jelenleg minden foksám páros, csak nem összefüggő a gráf. 3 pont

Tehát mind a négy komponenshez csatlakoznia kell legalább egy új élnek. De ha tényleg csak egy új él csatlakozik egy komponenshez, akkor a csatlakozó pont foka 3 lesz. Tehát minden komponenshez legalább két új élnek kell csatlakozni! Ez azt jelenti, hogy legalább 4 új élre van szükség. 4 pont

De 4 új éllel el is érhetjük, hogy legyen Euler körséta. Vegyük mind a négy háromszögnek egy-egy csúcsát, és adjunk a gráfhoz egy 4 hosszú kört ezeken a pontokon. 3 pont

4. Egy $G(s, t, c)$ hálózatban minden él kapacitása pozitív egész. A maximális folyam nagysága $m = 2022$. Képezzük a $G(s, t, c')$ hálózatot úgy, hogy minden él kapacitásából levonunk 1-et. Legyen

m' a maximális folyam nagysága $G(s, t, c')$ -ben. Határozzuk meg m' lehetséges értékeit ezen feltételek mellett.

A válasz: m' tetszőleges egész szám lehet, amelyre $0 \leq m' \leq 2021$. 2 pont

Bizonyítás: $G(s, t, c')$ -ben minden él kapacitása egész, tehát m' is egész. 2 pont

Mivel minden vágás kapacitása legalább eggyel csökken, és $G(s, t, c)$ -ben a minimális vágás kapacitása 2022, $m' \leq 2021$, és természetesen $m' \geq 0$. 2 pont

Ha pedig m' tetszőleges egész, amelyre $0 \leq m' \leq 2021$, akkor álljon a hálózatunk $2022 - m'$ darab párhuzamos st élből, amelyeknek az összkapacitása 2022. Ha minden kapacitást eggyel csökkentünk, akkor a vágás kapacitása éppen $2022 - (2022 - m') = m'$ lesz. 4 pont

Megjegyzés: ha valaki nem szereti a párhuzamos éleket, akkor itt az élek helyett vehetünk utakat is.

5. Maximálisan és minimálisan hány éle lehet egy 6 csúcsú G egyszerű gráfnak, amelynek élössze-függőségi száma, $\lambda(G) = 2$?

Minimum: Mivel $\lambda(G) = 2$, a minimális fokszám is legalább 2, vagyis $2e = \sum_1^6 d_i \geq 12$, $e \geq 6$. Ennyi éle lehet is, vegyünk egy 6 hosszú kört. 4 pont

Maximum: Mivel $\lambda(G) = 2$, 2 megfelelő él elhagyásával G két komponensre esik szét, legyen ezek csúcsszáma x és $6 - x$. Mivel maximalizálni akarjuk az élek számát, feltehetjük, hogy mindkét komponens teljes gráfot alkot. 3 pont

Ekkor G éleinek száma $2 + \binom{x}{2} + \binom{6-x}{2}$. Ez akkor maximális, ha $x = 1$ vagy 5, az értéke ekkor 12. 3 pont

6. A G páros gráf két osztálya A és B . A csúcsai $u_1, u_2, \dots, u_{10}$, B csúcsai $v_1, v_2, \dots, v_{10}$.

Az u_i és v_j csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $i \cdot j \leq 10$. Határozzuk meg G -ben a független élek maximális számát, $\nu(G)$ -t.

Az $u_1v_{10}, u_2v_5, u_3v_3, u_5v_2, u_{10}v_1$ élek benne vannak G -ben és függetlenek, tehát $\nu(G) \geq 5$. 3 pont

Az u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 pontok lefoglalják az összes élt, mert ha $i \cdot j \leq 10$, akkor vagy $i \leq 3$, vagy $j \leq 2$. Ezért $\tau(G) \leq 5$. 4 pont

Viszont minden gráfra igaz, hogy $\tau \geq \nu$, itt tehát $5 \geq \tau(G) \geq \nu(G) \geq 5$, vagyis $\nu(G) = 5$. 3 pont