

Kombinatorika és gráfelmélet I
2. ZH, 2022. május 13, 10.15-11.45, T 601/2
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. A G egyszerű páros gráf két osztálya A és B . $|A| = |B| = n > 4$, B -ben pedig minden csúcs fokszáma legalább $n - 4$. Azt is tudjuk, hogy G 4-pontösszefüggő.

Bizonyítsuk be, hogy G -ben van teljes párosítás.

Ellenőrizzük a Frobenius tétel feltételeit. Azt tudjuk, hogy $|A| = |B|$, azt kell csak belátni, hogy minden $X \subseteq A$ esetén $|N(X)| \geq |X|$. 2 pont

Mivel G 4-pontösszefüggő, minden csúcs foka legalább 4. 3 pont

Tehát tetszőleges X esetén $|N(X)| \geq 4$. Vagyis ha $|X| \leq 4$, akkor $|N(X)| \geq 4 \geq |X|$. 2 pont

Most legyen $|X| \geq 5$. Ekkor, mivel B -ben pedig minden csúcs fokszáma legalább $n - 4$, minden B -beli csúcsnak van X -beli szomszédja (ellenkező esetben legfeljebb $n - 5$ lehetne a fokszáma). Vagyis $N(X) = B$, tehát $|N(X)| = n \geq |X|$. Ezzel készen is vagyunk. 3 pont

2. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \dots, v_{75}$. A $v_i v_j$ ($i \neq j$) csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $i + j = 75, 79$ vagy 69 . Határozzuk meg a $\nu(G)$, $\tau(G)$, $\alpha(G)$ és $\rho(G)$ értékeket.

Vegyük észre, hogy minden él páros és páratlan indexű csúcs között fut, tehát G páros gráf. Egyik osztály a 37 darab páros indexű csúcs, a másik a 38 páratlan indexű. 2 pont

A $v_1 v_{74}, v_2 v_{73}, \dots, v_{37} v_{38}$ élek függetlenek, 37-en vannak, tehát $\nu(G) \geq 37$. 2 pont

Ugyanakkor a 37 darab páros indexű csúcs lefogó ponthalmazt alkot, tehát $\tau(G) \leq 37$. De $\nu(G) \leq \tau(G)$, ennek alapján $\nu(G) = \tau(G) = 37$. 3 pont

Most pedig a Gallai tételek alapján $\rho(G) + \nu(G) = 75$, tehát $\rho(G) = 38$, $\alpha(G) + \tau(G) = 75$, tehát $\alpha(G) = 38$. 3 pont

3. G 12 csúcsú gráf és $\nu(G) \leq 4$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 9$. Mutassunk olyan 12 csúcsú G gráfot, amelyre $\nu(G) = 4$ és $\chi(G) = 9$.

Tekintsünk $\nu(G)$ független élt. Legyen V azon csúcsok halmaza, amelyek nem végpontjai ezeknek az éleknek. Mivel több független él nincs G -ben, V csúcsai között nincs él, vagyis ezek egy független csúcshalmazt alkotnak. 2 pont

Tehát kiszínezhethetjük őket ugyanazzal a színnel. A többi csúcsot meg színezzük csupa különböző színűre. 3 pont

Mivel $\nu(G) \leq 4$, $|V| \geq 4$, tehát így legfeljebb 9 színnel sikerül kiszíneznünk a csúcsokat, vagyis $\chi(G) \leq 9$. 2 pont

Most pedig vegyünk egy teljes 9 csúcsú gráfot és 3 izolált pontot. Itt világos, hogy $\nu(G) = 4$ és $\chi(G) = 9$. 3 pont

4. G egy 10 csúcsú egyszerű páros gráf, A és B osztályokkal. Tudjuk, hogy A -ban minden csúcs foka 6. Bizonyítsuk be, hogy $\chi'(G) = 6$.

Mivel A -ban minden csúcs foka 6 és nincsenek párhuzamos élek, $|B| \geq 6$. 3 pont

De akkor $|A| \leq 4$. Ebből viszont következik, hogy B -ben minden csúcs foka legfeljebb 4. 4 pont
 Vagyis G egy páros gráf, ahol a maximális fokszám 6, ezért König tétele alapján $\chi'(G) = 6$. 3 pont

5. A G 100 csúcsú gráfból akárhogyan elhagyunk egy élt, a kapott gráf síkgráf. Bizonyítsuk be, hogy $\alpha(G) \geq 24$.

Hagyjunk el egy tetszőleges élt, e -t G -ből. A kapott G' gráf síkgráf. A Négyszíntétel alapján kiszínezhető 4 színnel. 3 pont

Valamelyik szín, mondjuk a piros, legalább 25 csúcson fordul elő. Legyen a piros csúcsok halmaza P . 3 pont

P független halmaz G' -ben. G -ben is majdnem független, legfeljebb az elhagyott él, e fut köztük. Hagyjuk el e egy végpontját P -ből. Ezzel egy független halmazt kapunk, amelynek legalább 24 csúcsa van. 4 pont

6. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra $n(G)$ a csúcsok száma, $e(G)$ az élek száma és $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $n(G) + 2t(G)$ mennyiség minimális értékét, ha G tetszőleges 100 élű, egyszerű összefüggő síkbarajzolt gráf lehet.

Legyen G összefüggő komponenseinek a száma $k(G)$. Az Euler formula alapján $n(G) - e(G) + t(G) = k(G) + 1$, vagyis $n(G) + t(G) = e(G) + k(G) + 1$. 3 pont

Világos, hogy $t(G) \geq 1$ és $k(G) \geq 1$. 2 pont

Tehát $n(G) + 2t(G) \geq n(G) + t(G) + 1 = e(G) + k(G) + 2 \geq 103$ 3 pont

Viszont $n(G) + 2t(G)$ lehet is 103, legyen G egy 101 csúcsú, 100 élű fa, ekkor $t(G) = 1$, tehát $n(G) + 2t(G) = 103$. 2 pont