# Mely valós számok esnek a „legtávolabbra” az összes racionális számtól?

*Bevezetés.* Az Olimpia 6. feladatához néhány megjegyzést fűzve vetettem fel a következő kérdést (KöMaL 1991/8–9. szám, 344. old.):

Milyen kicsi lehet az $\alpha$, ha található hozzá olyan $\xi$, hogy tetszőleges $q > 0$ és $p$ egészekre fennáll az

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{\alpha q^2} \tag{1}$$

egyenlőtlenség?

Az $\alpha$-ra azért volt szükségünk, hogy segítségével elő tudjunk állítani egy olyan, a feladatban megkívánt tulajdonságú sorozatot, amelynek elemei egy $\alpha$ hosszúságú nyílt intervallumban helyezkednek el. Az intervallum sugara tehát annál kisebb, minél kisebbre tudjuk az $\alpha$-t választani.

A múltkori dolgozatban részleges választ adtam a kérdésre, bebizonyítva azt, hogy $\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ még megfelelő (pl. $\xi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ esetén), továbbá, hogy $\alpha < 2,5$ már nem lehetséges.

Ebben a dolgozatban többek között teljes választ adtam erre a kérdésre: igazoltam, hogy a jó $\alpha$-k között van legkisebb, mégpedig éppen $\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. (Ez egyébként azt jelenti, hogy az előző dolgozatban definiált $h$ értéke $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $I_a = [h, +\infty)$ és $I_b = (0, h)$, továbbá hogy az ott megadott módszerrel konstruált $(x_k)$ sorozat lehető legkisebb korlátja $\beta = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$.)

Tanulságos végiggondolni, hogy hogyan kaptuk a múltkor az $\alpha \geqslant 2,5$ eredményt.

Mindenekelőtt vezessük be tetszőleges $x$ valós szám esetén az $x$-nek a hozzá legközelebbi egésztől valós eltérésére az $||x||$ jelölést:

$$||x|| \stackrel{\text{def}}{=} \min(\{x\}, 1 - \{x\}),$$

ahol $\{x\} = x - [x]$ az $x$ törtrészét jelöli.

Nyilvánvaló, hogy (1) pontosan akkor teljesül valamilyen $\alpha$ mellett a $\xi$-re, ha $||\xi||$-re (vagy pl. $(1 - ||\xi||)$-re) is fennáll, ezért az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $\xi \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, vagy hogy $\xi \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$; (kényelmi szempontból hol az egyik, hol a másik intervallummal dolgozunk majd).

Ezzel a megjegyzéssel ui. azt kapjuk, hogy az (1)-ben az $\alpha$-hoz pontosan akkor található megfelelő $\xi$, ha a $\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{\alpha q^2}; \frac{p}{q} + \frac{1}{\alpha q^2}\right)$ alakú intervallumok ($q > 0$ és $p$ egészek) nem fedik le a $\left[0;\frac{1}{2}\right]$-et, illetve ami ezzel ekvivalens: $\left[\frac{1}{2};1\right]$-et. Na már most az, hogy az $\alpha$ nem megfelelő számunkra (tehát hogy nem található hozzá (1)-beli $\xi$), éppen azt jelenti, hogy

$$(*)\qquad \left[\frac{1}{2};1\right] \subset \bigcup_{\substack{p,q\in\mathbb{Z}\\ 0<q}} \left(\frac{p}{q}-\frac{1}{\alpha q^2};\frac{p}{q}+\frac{1}{\alpha q^2}\right).$$

Aki ismeri a híres Borel-féle befedési tételt, az ezen a ponton felkiált: hohó, hiszen ebből következik, hogy a rossz $\alpha$-k között nincs maximális, vagyis hogy a jó $\alpha$-k között van minimális. Ha ui. feltesszük, hogy a rossz $\alpha$-k között van egy $\alpha^*$ maximális, akkor arra $(*)$ teljesül, ami azt jelenti, hogy a bal oldali zárt intervallumot lefedik a jobb oldali nyílt intervallumok. A Borel-tétel szerint tehát a jobb oldali nyílt intervallumok közül már véges sok is befedi az $\left[\frac{1}{2};1\right]$-et, és ekkor – amint az könnyen végiggondolható – a fedő intervallumokat összehúzhatjuk egy kicsit a középpontjukból úgy, hogy továbbra is befedjék az $\left[\frac{1}{2};1\right]$-et. Más szóval az $\alpha^*$-ot egy kicsit növelve még mindig rossz $\alpha$-t kapunk, ami ellentmond $\alpha^*$ maximalitásának.

A Borel-tétel segítségével tehát máris beláttuk, hogy a jó $\alpha$-k között van minimális: ezt természetesen bizonyítani fogjuk az alábbiakban a Borel-tétel felhasználása nélkül is. A Borel-féle befedési tétel mindenesetre azt jelenti, hogy minden rossz $\alpha$-hoz meg tudunk adni véges sok $\frac{p}{q}$ törtet úgy, hogy már azokkal is teljesüljön $(*)$.

Hogyan bizonyítanánk például ezt az elvet szem előtt tartva, hogy $\alpha<2$ nem lehetséges (1)-ben? Egyszerűen úgy, hogy a $(*)$ jobb oldalán egyetlen $\frac{p}{q}$ törtet veszünk, $\frac{p}{q}=1$, és már az ehhez tartozó intervallum is lefedi az $\left[\frac{1}{2};1\right]$-et:

$$\text{Ha } \alpha<2, \text{ akkor } \left[\frac{1}{2};1\right] \subset \left(1-\frac{1}{\alpha};1+\frac{1}{a}\right).$$

Ahogyan $\alpha$-t a 2-höz közelítjük (alulról), a jobb oldali intervallum bal végpontja $\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$ az $\frac{1}{2}$-hez tart, ami arra késztet bennünket, hogy az $\frac{1}{2}$-et is vegyük be a $\frac{p}{q}$ törtek (eddig csak az $\frac{1}{1}$!) közé.

A kérdés tehát az, hogy milyen lehet az $\alpha$, ha

$$(*_1)\qquad \left[\frac{1}{2};1\right] \subset \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4\alpha};\frac{1}{2}+\frac{1}{4\alpha}\right) \cup \left(1-\frac{1}{\alpha};1+\frac{1}{\alpha}\right).$$

Egyszerű számolás adja az $\alpha<\frac{5}{2}$ eredményt.

Ezzel tehát beláttuk, hogy az $\alpha<2,5$ számok a rossz $\alpha$-k közé tartoznak, hiszen kielégítik a $(*)$ relációt.

Mi történik akkor, ha most nem állunk meg, és a felhasznált $\frac{p}{q}$-k eddigi halmazát ($\frac{1}{2}$ és 1) bővíteni próbáljuk?

Az $\alpha$-t az $\frac{5}{2}$-hez közelítve a $(*_1)$ jobb oldalán álló nyílt intervallumok $\frac{1}{2}+\frac{1}{4\alpha}$, illetve $1-\frac{1}{\alpha}$ határpontjai a közös $\frac{3}{5}$ értékhez tartanak, tehát célszerű a $\frac{p}{q}$-khoz a $\frac{3}{5}$-öt is hozzávenni. Feltéve most a kérdést, hogy milyen $\alpha$-kra teljesül

$$\left[\frac{1}{2};1\right]\subset\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4\alpha};\frac{1}{2}+\frac{1}{4\alpha}\right)\cup\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{25\alpha};\frac{3}{5}+\frac{1}{25\alpha}\right)\cup\left(1-\frac{1}{\alpha};1+\frac{1}{\alpha}\right),$$

az $\alpha<\frac{13}{5}$ egyenlőtlenséget kapjuk.

Tehát az $\alpha<\frac{13}{5}$ számok is a rossz $\alpha$-k közé tartoznak. Ezt a sort még jó ideig folytathatnánk, eközben mindenkiben kialakulna az a sejtés, hogy a $\frac{p}{q}$-k közé az

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{8}{13},\ \frac{21}{34},\ \dots$$

szomszédos Fibonacci–számok hányadosait érdemes felvenni (ezek éppen a kritikus $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ értékhez közelítenek), és ezekkel rendre az $\alpha<\frac{2}{1}$, $\alpha<\frac{5}{2}$, $\alpha<\frac{13}{5}$, $\alpha<\frac{34}{13}$, ... számokat tudnánk besorolni a rossz $\alpha$-k közé.

Az egyenlőtlenségek jobb oldalán éppen a Fibonacci–sorozat bizonyos másodszomszédos elemeiből képzett hányadosok állnak, ezeknek pedig a $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{5}+3}{2}$ a határértéke.

Vagyis a sejtés igaz volta éppen azt jelentené, hogy minden $\alpha<\frac{\sqrt{5}+3}{2}$ kielégíti a $(*)$ relációt, tehát hogy az (1)-ben jó $\alpha$-kra fennáll $\alpha\geqslant\frac{\sqrt{5}+3}{2}$. Mivel pedig láttuk, hogy a $\frac{\sqrt{5}+3}{2}$ jó, ez azt igazolná, hogy a jó $\alpha$-k legkisebbike $\frac{\sqrt{5}+3}{2}$.

Ezt az elég vázlatos fejtegetést írjuk át a továbbiakban precíz tételekké és bizonyításokká.

*

Az egyszerűség kedvéért legyen $f(x)\overset{\text{def}}{=}1-\|x\|$, és jelöljön $\xi$ a továbbiakban mindig *irracionális* számot (racionális számokra ui. triviálisak a tételek).

**1. Tétel.**

a) Ha $\frac{3-\sqrt{5}}{2}<\|\xi\|$, akkor alkalmas $q>0$ és $p$ egészekkel $\frac{1}{2,9\cdot q^2}>\left|\xi-\frac{p}{q}\right|$.

b) Ha $\|\xi\|<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, akkor alkalmas $q>0$ és $p$ egészekkel $\frac{1}{3\cdot q^2}>\left|\xi-\frac{p}{q}\right|$.

A bizonyításnál és a későbbiekben is segítségünkre lesz a következő, önmagában is érdekes

**1. Lemma.** Tetszőleges pozitív egész $k$ szám esetén értelmezzük az $(s_n)$ sorozatot az

$$s_0 = 0,$$
$$s_1 = 1,$$
$$s_n = ks_{n-1} + s_{n-2}, \qquad (n \geqslant 2)$$

előírással. Jelöljük továbbá a szomszédos elemek hányadosaiból képzett sorozatot $(t_n)$-nel:

$$t_n = \frac{s_n}{s_{n+1}} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor

a) $s_n^2 - s_{n-1}s_{n+1} = (-1)^{n-1}, \qquad (n \geqslant 1);$

b) $t_n - t_{n-1} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{s_n s_{n+1}}, \qquad (n \geqslant 1);$

c) $s_{n-2}s_{n+1} - s_{n-1}s_n = k \cdot (-1)^{n-1}, \qquad (n \geqslant 2);$

d) $t_{n-2} - t_n = \dfrac{k \cdot (-1)^{n-1}}{s_{n-1}s_{n+1}}, \qquad (n \geqslant 2);$

e) $t_0 < t_2 < t_4 < \ldots < \gamma_k < \ldots < t_5 < t_3 < t_1;$

$\lim\limits_n t_n = \gamma_k$, ahol $\gamma_k = \dfrac{\sqrt{k^2+4} - k}{2}$.

*Bizonyítás.*

a) Legyen $i \geqslant 2$ tetszőleges egész. Ekkor a definíció szerint

$$s_i^2 - s_{i-1}s_{i+1} = s_i^2 - s_{i-1}(ks_i + s_{i-1}) = s_{i-1}^2 + s_i^2 - ks_{i-1}s_i =$$
$$= -s_{i-1}^2 + s_i(s_i - ks_{i-1}) = -s_{i-1}^2 + s_{i-2}s_i, \quad \text{azaz}$$
$$\frac{s_i^2 - s_{i-1}s_{i+1}}{s_{i-1}^2 - s_{i-2}s_i} = -1, \quad \text{tehát}$$
$$s_n^2 - s_{n-1}s_{n+1} = (s_1^2 - s_0 s_2) \prod_{i=2}^{n} \frac{s_i^2 - s_{i-1}s_{i+1}}{s_{i-1}^2 - s_{i-2}s_i} =$$
$$= 1 \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

b) Triviálisan adódik a)-ból.

c) Felhasználva a)-t,

$$s_{n-2}s_{n+1} - s_{n-1}s_n = s_{n-2}(ks_n + s_{n-1}) - s_{n-1}(ks_{n-1} + s_{n-2}) =$$
$$= ks_{n-2}s_n - ks_{n-1}^2 = -k(s_{n-1}^2 - s_{n-2}s_n) =$$
$$= -k \cdot (-1)^{n-2} = k \cdot (-1)^{n-1}.$$

d) Triviálisan adódik c)-ből.

e) A d) összefüggés szerint a $t_n - t_{n-2}$ különbség pozitív vagy negatív aszerint, hogy $n$ páros vagy páratlan. Így $t_0 < t_2 < t_4 < \ldots$, illetve $t_1 > t_3 > t_5 > \ldots$.

Ha $n = 2m$ páros, akkor b)-ből

$$t_{2m} - t_{2m-1} = t_n - t_{n-1} < 0, \quad \text{azaz}$$
$$t_{2m} < t_{2m-1} \leqslant t_1,$$

tehát a növekvő $(t_0, t_2, t_4, \ldots)$ sorozat felülről korlátos, ami miatt létezik az $L_0 = \lim_m t_{2m}$ határérték. Hasonlóan a fogyó $(t_1, t_3, t_5, \ldots)$ sorozat alulról korlátos, ami miatt létezik az $L_1 = \lim_m t_{2m-1}$ határérték. Mivel $s_n \to \infty$ (ez nyilvánvaló), ezért b)-ből

$$\lim_m (t_{2m-1} - t_{2m}) = 0, \quad \text{azaz}$$
$$L_1 - L_0 = 0 \quad \text{következik.}$$

Így tehát $L_0 = L_1$, és létezik az $L = \lim_n t_n$ határérték. Erre természetesen

$$t_0 < t_2 < t_4 < \ldots < L < \ldots < t_5 < t_3 < t_1.$$

Nyilván

$$\frac{1}{L^2} = \lim_n \frac{1}{t_n t_{n+1}} = \lim_n \frac{s_{n+2}}{s_n} = \lim_n \frac{k \cdot s_{n+1} + s_n}{s_n} =$$
$$= 1 + k \cdot \lim_n \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1 + \frac{k}{L},$$

tehát $\frac{1}{L}$ gyöke az

(2) $$x^2 = kx + 1$$

egyenletnek.

Ha még figyelembe vesszük, hogy $\frac{1}{L} > \frac{1}{t_1} = k$, akkor

$$\frac{1}{L} = \frac{k + \sqrt{k^2+4}}{2}, \quad \text{vagyis}$$
$$L = \frac{2}{k + \sqrt{k^2+4}} = \frac{\sqrt{k^2+4} - k}{2} = \gamma_k. \qquad \square$$

**2. Lemma.** Rögzítsük $k$ értékét, és használjuk az 1. Lemma jelöléseit.

a) Ha $m$ tetszőleges természetes szám, akkor

(3) $$\alpha = k + \frac{2}{k} - \frac{k}{s_{2m+1} s_{2m+3}}$$

esetén

$$[t_{2m}; \gamma_k) \subset \bigcup_{l=m}^{\infty} \left[ t_{2l} - \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+1}^2}; t_{2l} + \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+1}^2} \right].$$

b)

(4) $$\alpha = k + \frac{2}{k}$$

esetén

$$(\gamma_k; t_1] \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} \left[ t_{2l-1} - \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l}^2}; t_{2l-1} + \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l}^2} \right].$$

*Bizonyítás.*

a) Az állítás azt mondja ki, hogy a $[t_{2m}; \gamma_k)$ intervallumot lefedik az

$$\left[\frac{s_{2l}}{s_{2l+1}} - \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+1}^2}; \frac{s_{2l}}{s_{2l+1}} + \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+1}^2}\right] \qquad (l \geqslant m)$$

alakú intervallumok, ha $\alpha$ értékét (3)-nak választjuk. Az 1. Lemma e) állítása szerint

$$[t_{2m}; \gamma_k) = \bigcup_{l=m}^{\infty} [t_{2l}; t_{2l+2}],$$

ezért elegendő belátnunk, hogy $l \geqslant m$ esetén

$$[t_{2l}; t_{2l+2}] \subset \left[t_{2l} - \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+1}^2}; t_{2l} + \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+1}^2}\right] \cup \left[t_{2l+2} - \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+3}^2}; t_{2l+2} + \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+3}^2}\right].$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$[t_{2l}; t_{2l+2}] \subset \left[t_{2l}; t_{2l} + \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+1}^2}\right] \cup \left[t_{2l+2} - \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+3}^2}; t_{2l+2}\right],$$

azaz ha

$$t_{2l+2} - t_{2l} \leqslant \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+1}^2} + \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+3}^2}.$$

Az egyenlőtlenséget az 1. Lemma a) és d) összefüggéseinek segítségével ekvivalensen átalakítva

$$\frac{k}{s_{2l+1} s_{2l+3}} \leqslant \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+1}^2} + \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+3}^2}, \quad \text{azaz}$$

$$k \cdot \alpha \leqslant \frac{s_{2l+3}^2 + s_{2l+1}^2}{s_{2l+1} s_{2l+3}} = \frac{(s_{2l+3} - s_{2l+1})^2 + 2 s_{2l+1} s_{2l+3}}{s_{2l+1} s_{2l+3}} =$$

$$= 2 + \frac{(s_{2l+3} - s_{2l+1})^2}{s_{2l+1} s_{2l+3}} = 2 + \frac{(k s_{2l+2})^2}{s_{2l+1} s_{2l+3}} =$$

$$= 2 + k^2 \cdot \frac{s_{2l+1} s_{2l+3} - 1}{s_{2l+1} s_{2l+3}}, \quad \text{vagyis}$$

(5)
$$\alpha \leqslant k + \frac{2}{k} - \frac{k}{s_{2l+1} s_{2l+3}},$$

amit (3)-mal egybevetve

$$-\frac{k}{s_{2m+1} s_{2m+3}} \leqslant -\frac{k}{s_{2l+1} s_{2l+3}},$$

$$s_{2m+1} s_{2m+3} \leqslant s_{2l+1} s_{2l+3};$$

ez pedig $m \leqslant l$ miatt nyilván teljesül.

b) Hasonlóan az a) állítás bizonyításához,

$$(\gamma_k; t_1] = \bigcup_{l=1}^{\infty} [t_{2l+1}; t_{2l-1}]$$

miatt elegendő tetszőleges $l \geqslant 1$ esetére belátnunk a

$$|t_{2l+1} - t_{2l-1}| \leqslant \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l+2}^2} + \frac{1}{\alpha \cdot s_{2l}^2}$$

egyenlőtlenséget, amiből az előző esetbelivel azonos ekvivalens átalakítással az (5)-höz hasonló

$$\alpha \leqslant k + \frac{2}{k} + \frac{k}{s_{2l}s_{2l+2}} \tag{5'}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Mivel most $\alpha$ értékét (4) adja meg, ezért (5′) valóban fennáll, és ez igazolja állításunkat. □

Az 1. és a 2. Lemmából nekünk csak a $k = 1, 2$; $m = 1, 2$ esetre lesz szükségünk.

Legyen először $k = 1$ és $m = 1$. Ekkor az 1. Lemmában $(s_n)$ megegyezik a jól ismert Fibonacci–sorozattal, és $\gamma_k$ értéke $(\gamma_1)$ éppen $\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. A 2. Lemma a) állításában

$$\alpha = 1 + 2 - \frac{1}{s_3 \cdot s_5} = 3 - \frac{1}{2 \cdot 5} = 2,9; \quad t_{2m} = t_2 = \frac{1}{2};$$

a b) állításban pedig

$$\alpha = 3 \quad \text{és} \quad t_1 = 1.$$

Ezek szerint

$$\left[\frac{1}{2}; \gamma\right) \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} \left[t_{2l} - \frac{1}{2,9 \cdot s_{2l+1}^2}; t_{2l} + \frac{1}{2,9 \cdot s_{2l+1}^2}\right], \quad \text{illetve} \tag{6}$$

$$(\gamma; 1] \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} \left[t_{2l-1} - \frac{1}{3 \cdot s_{2l}^2}; t_{2l-1} + \frac{1}{3 \cdot s_{2l}^2}\right]. \tag{7}$$

*Az 1. Tétel bizonyítása.*

A bevezetőbeli megjegyzés alapján feltehetjük, hogy $\xi = f(\xi)$, amikoris $\frac{1}{2} < \xi < 1$ ($\xi$ irracionális).

a) A feltétel szerint $f(\xi) < \gamma$, azaz $\frac{1}{2} < \xi < \gamma$, amikor is (6) szerint van olyan $l$ pozitív egész, hogy

$$\xi \in \left[t_{2l} - \frac{1}{2,9 \cdot s_{2l+1}^2}; t_{2l} + \frac{1}{2,9 \cdot s_{2l+1}^2}\right] \quad \text{azaz}$$

$$|\xi - t_{2l}| \leqslant \frac{1}{2,9 \cdot s_{2l+1}^2},$$

vagyis a $p = s_{2l}$, $q = s_{2l+1} (> 0)$ választással

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{2,9 \cdot q^2};$$

mivel $\xi$ irracionális, ezért itt az egyenlőség nem állhat fenn, tehát

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2,9 \cdot q^2},$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

b) Ugyanúgy következik (7)-ből, mint az a) állítás (6)-ból. □

Ezzel tehát az 1. Tételt beláttuk.

Ugyanezzel a módszerrel általában adódik a 2. Lemmából a

**3. Lemma.** Rögzítsük le $k$ értékét és használjuk az 1. Lemma jelöléseit. Legyen továbbá

a) $t_{2m} < \xi < \gamma_k$ esetén $\alpha = k + \frac{2}{k} - \frac{k}{s_{2m+1}s_{2m+3}}$,

b) $\gamma_k < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{k}(=t_1)$ esetén $\alpha = k + \frac{2}{k}$.

Ekkor alkalmas $q > 0$ és $p$ egészekkel

$$\frac{1}{\alpha q^2} > \left|\xi - \frac{p}{q}\right|. \tag{8}$$ □

Az 1. Tétel nem más, mint ennek a lemmának a $k = 1, m = 1$ választással adódó speciális esete (a $\xi$ helyett a lemmában $(1 - \|\xi\|)$-t kell helyettesíteni).

A $k = 2, m = 1$ esetben kapjuk, hogy

a) $\frac{2}{5} < \xi < \gamma_2 = \sqrt{2} - 1$ esetén az $\alpha = 3 - \frac{2}{5 \cdot 29}$ értékkel,

b) $\sqrt{2} - 1 = \gamma_2 < \xi < \frac{1}{2}$ esetén az $\alpha = 3$ értékkel

teljesül (8) — ha $q > 0$ és $p$ alkalmas egészek.

Ha most a 3. Lemma a) állításában $k$-t 1-nek, $m$-et pedig 2-nek választjuk, akkor

$$t_{2m} = t_4 = \frac{s_4}{s_5} = \frac{3}{5} \quad \text{és} \quad \alpha = 3 - \frac{1}{s_5 s_7} = 3 - \frac{1}{5 \cdot 13}$$

lévén kapjuk, hogy

c) $\frac{3}{5} < \xi < \gamma_1 = \gamma$ esetén az $\alpha = 3 - \frac{1}{5 \cdot 13}$ értékkel kielégíthető a (8) egyenlőtlenség.

A legutóbbi a) és b) összefüggésekben $\xi$ helyettesíthető $\|\xi\|$-val, a c) összefüggésben pedig $(1 - \|\xi\|)$-val.

Ezért tehát — felhasználva az 1. Tételt — teljesül a

**2. Tétel.** Legyen

a) $\|\xi\| < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ esetén $\alpha = 3$,

b) $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < \|\xi\| < \frac{2}{5}$ esetén $\alpha = 3 - \frac{1}{5 \cdot 13}$,

c) $\frac{2}{5} < \|\xi\| < \sqrt{2} - 1$ esetén $\alpha = 3 - \frac{2}{5 \cdot 29}$,

d) $\sqrt{2} - 1 < \|\xi\|$ esetén $\alpha = 3$;

ekkor alkalmas $q > 0$ és $p$ egészekkel

$$\frac{1}{\alpha q^2} > \left|\xi - \frac{p}{q}\right|. \qquad \square$$

A tétel csak azokról a $\xi$-kről nem ad felvilágosítást, amelyekre

$$\|\xi\| = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{vagy} \quad \|\xi\| = \sqrt{2}-1.$$

Az előző dolgozatban viszont láttuk, hogy

a) ha $\|\xi\| = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, akkor van olyan $q > 0$ és $p$ egész, hogy $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| = \frac{1}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}q^2}$,

és itt a $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ konstans nem növelhető tovább;

b) ha $\|\xi\| = \sqrt{2}-1$, akkor van olyan $q > 0$ és $p$ egész, hogy $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)q^2}$,

és itt a $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$ konstans nem növelhető tovább.

Mindezek alapján kimondhatjuk a dolgozat fő eredményét, amely szerint lényegében a $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ és a $\sqrt{2}$ esik a „legtávolabbra" az összes racionális számtól.

**3. Tétel.**

a) Tetszőleges $\xi$-hez találhatók olyan $q > 0$ és $p$ egészek, hogy az $\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ tényezővel

$$\frac{1}{\alpha q^2} \geqslant \left|\xi - \frac{p}{q}\right| \tag{9}$$

fennálljon. Itt az $\alpha$ nem növelhető tovább akkor (és csak akkor), ha $\|\xi\| = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

b) Ha kikötjük, hogy $\xi \neq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ legyen, akkor (9) kielégíthető az $\alpha = \frac{3}{2}+\sqrt{2}$ tényezővel is. Az $\alpha$ itt sem növelhető tovább akkor, ha $\|\xi\| = \sqrt{2}-1$ (és csak ekkor, hiszen minden további esetben jó például $\alpha = 3 - \frac{1}{5\cdot 13}$). $\square$

Ezek után már nyilvánvaló, hogy pontosan az $\alpha \geqslant \frac{\sqrt{5}+3}{2}$ számokhoz található olyan $\xi$ szám, amelyre tetszőleges $q > 0$ és $p$ egészekkel teljesül az (1) egyenlőtlenség.

Végezetül szeretném megköszönni Surányi János tanár úrnak értékes megjegyzéseit, amiknek hatására a dolgozatot a jelenlegi formájára átdolgoztam.

**Harcos Gergely**