Lovagok és lókötők a gödeli szigeteken

A címben szereplő fogalmak nyilván ismerősek azoknak, akik olvasták *Raymond Smullyan: Mi a címe ennek a könyvnek* c. könyvét (Műszaki Könyvkiadó, 1988), azoknak pedig, akik ezt elmulasztották volna eddig, melegen ajánlom. Igaza volt Martin Gardenernek, a Scientific American kritikusának, amikor a könyvről mint a valaha írt legeredetibb, legtartalmasabb és legmulatságosabb logikai feladatgyűjteményről nyilatkozott. Az „igaza volt" múlt idejű használata is helytálló, ha figyelembe vesszük, hogy azóta a könyv folytatása is megjelent *A hölgy vagy a tigris?* címmel (TypoTEX Kiadó – Műszaki Könyvkiadó, 1991).

Képzeljük el, hogy egy bizonyos sziget lakói kizárólag lovagok, akik mindig igazat mondanak, és lókötők, akik mindig hazudnak. Feltesszük, hogy legalább egy lovag és legalább egy lókötő lakja a szigetet. A sziget lakói különböző klubokat alakítanak. Egy lakos több klubhoz is tartozhat, és minden klubnak van legalább egy tagja. Ha adott két nem feltétlenül különböző A és B lakos és egy tetszőleges C klub, akkor A vagy azt állítja, hogy B tagja a C klubnak, vagy azt, hogy nem tagja C-nek. Tekintsük most a következő két feltételt.

G (**Gödeli feltétel**): *Bármelyik adott C klub esetén van olyan lakója a szigetnek, aki azt állítja, hogy ő tagja C-nek.*

GG (**Kétszeresen gödeli feltétel**): *Ha adott két tetszőleges klub, C_1 és C_2, akkor van két olyan lakos, A és B, hogy A azt állítja, hogy B tagja C_1-nek és B azt állítja, hogy A tagja C_2-nek.*

Az elsőként említett könyv 239. oldalán szerepel a következő probléma (268a. feladat).

„*. . . amennyire én tudom*, a G és a GG feltételek egyike sem következik a másikból. Be tudná bizonyítani, hogy sejtésem igaz? (Vagy esetleg cáfolni, de nagyon valószínűtlen, hogy sikerül.)"

Amikor a könyv olvasása közben ideértem, természetesen rögtön nekiláttam, hogy a kívánt bizonyítást elvégezzem, csakhogy nyomban egy másik problémával találtam szembe magam: a GG feltételben a C_1 és C_2 klubok, ill. az A és B lakosok egybeesése megengedett-e? Ha ui. mindegyik esetet számba vesszük, akkor a GG lényegében négy feltételt jelenthet.

GG_0: GG — megengedve, hogy $C_1 = C_2$, ill. $A = B$ legyen.

GG_1: GG_0 — azzal a megszorítással, hogy $C_1 \neq C_2$.

GG_2: GG_0 — azzal a megszorítással, hogy $A \neq B$.

GG_3: GG_0 — azzal a megszorítással, hogy $C_1 \neq C_2$ és $A \neq B$.

Jelen cikk fő célja, hogy a G és a GG_i ($i = 0, 1, 2, 3$) feltételekkel egyenértékű, viszonylag áttekinthető feltételeket adjon, és ezáltal eldöntse, hogy ezen feltételek közül melyik következik a másikból. Az 5 feltétel (G és GG_i) alapján legfeljebb 32 típusa létezik a szigeteknek, aszerint, hogy az egyes feltételek teljesülnek-e vagy sem. Látni fogjuk, hogy a 32 elvileg lehetséges típus közül csak 7 „valósulhat meg", ezekből 6 típus bemutatható már egy-egy kétlakosú szigettel is (egy lovaggal és egy lókötővel), a fennmaradó 7. típushoz viszont már legalább három lakos szükséges (egy lovag és két lókötő) — ezzel a könyv 268c. feladatát is részben megoldjuk.

A rövidebb írásmód kedvéért használni fogjuk a formális logika $\wedge$ (és), $\vee$ (vagy), $\neg$ (nem), $\Rightarrow$ és $\Leftarrow$ (következtetés), $\Leftrightarrow$ (ekvivalencia) jeleit, továbbá a halmazelmélet jólismert jelöléseit ($\emptyset$, $\in$, $\subseteq$, $\cup$, $\cap$, stb.). S-sel jelöljük a sziget lakóinak halmazát, X-szel a lovagok, Y-nal a lókötők csoportját. Tehát $S = X \cup Y$, ahol $X \cap Y = \emptyset$. Tetszőleges $H \subseteq S$ esetén $\overline{H} = S - H$ a H (S-re vonatkozó) komplementere.

Mindenekelőtt nyilvánvaló, hogy

(1) $$GG_2 \Rightarrow GG_3 \Rightarrow GG_1 \text{ és } GG_2 \Rightarrow GG_0 \Rightarrow GG_1,$$

vagyis GG_2 a legerősebb és GG_1 a leggyengébb feltétel.

1. Ennek alapján elsőként tegyük fel, hogy szigetünkön $\neg GG_2$ teljesül, azaz vannak olyan C_1 és C_2 klubok, hogy tetszőleges két *különböző* A és B lakos esetén A azt állítja, hogy B nem tagja C_1-nek vagy B azt állítja, hogy A nem tagja C_2-nek, amit így jelölünk A: „$B \notin C_1$" vagy B: „$A \notin C_2$".

1.1. eset, amikor C_1-ben is és C_2-ben is van lovag. Ekkor tetszőleges C_1-beli x_1 és C_2-beli x_2 lovag esetén x_1: „$x_2 \in C_2$" és x_2: „$x_1 \in C_1$", vagyis x_1 és x_2 nem lehetnek különbözőek. Ezek szerint C_1-ben és C_2-ben ugyanazok a lovagok vannak, sőt C_1-ben és C_2-ben összesen csak 1 lovag van: legyen ez J.

1.1.1. eset, amikor C_1-nek vagy C_2-nek legalább 2 tagja van. Legyen pl. $|C_1| \geq 2$, ekkor C_1-ben van egy y_1 lókötő. Ha x_1 tetszőleges lovag, akkor x_1 és y_1 különbözőek, továbbá x_1: „$y_1 \in C_1$", vagyis szükségképpen y_1: „$x_1 \notin C_2$", azaz $x_1 \in$ $\in C_2$. Tehát az összes lovag C_2-ben van, ami azt jelenti, hogy J az egyetlen lovag a szigeten. Természetesen ugyanez áll $|C_2| \geq 2$ esetén is. Legyenek most $y_1 \in \overline{C_1}$ és $y_2 \in \overline{C_2}$ tetszőleges szigetlakók (ha ilyenek egyáltalán vannak). Ekkor y_1 és y_2 lókötők, hiszen a sziget egyetlen lovagja (J) tagja C_1-nek is és C_2-nek is. Tehát y_1: „$y_2 \in C_2$" és y_2: „$y_1 \in C_1$", vagyis $y_1 = y_2$, amiből következik, hogy $\overline{C_1} = \overline{C_2} = \{K\}$, ahol K lókötő. Ha y_1 vagy y_2 nem létezik, akkor $\overline{C_1}$ vagy $\overline{C_2}$ üres, és így $C_1 = S$ vagy $C_2 = S$. Ezek szerint ebben az esetben szükséges, hogy teljesüljön az alábbi két feltétel valamelyike.

F_1: A sziget lakói klubot alkotnak. A szigeten egyetlen lovag él.

F_2: Van olyan klubja a szigetnek, amely egy lókötő kivételével mindenkit tartalmaz. A szigeten egyetlen lovag él.

Az is könnyen látható, hogy F_1 vagy F_2 teljesülése esetén a szigeten $\neg GG_2$. Ha ui. F_1 fennáll, akkor legyen a GG_2 feltételben $C_1 = S$ és $C_2 = S$. Ezzel tetszőleges A és B lakosok esetén ha A: „$B \in C_1$" és B: „$A \in C_2$", akkor A és B lovagok, vagyis $A = B$. Ha pedig F_2 teljesül, akkor legyen C_1 és C_2 a feltételben szereplő $\overline{\{K\}}$ klub, ahol K lókötő. Ezzel tetszőleges $A, B \in \overline{\{K\}}$ mellett ha A: „$B \in C_1$" és B: „$A \in C_2$", akkor $B \in C_1$ és $A \in C_2$ alapján A és B lovagok; de összesen csak egy lovag van a szigeten, vagyis $A = B$. Ha pedig pl. $B = K$, akkor A: „$K \in C_1$" és K: „$A \in C_2$" esetén $A \notin C_2$ (hiszen K lókötő), azaz $A = K$, $A = B$.

1.1.2. eset, amikor C_1 és C_2 is csak 1 tagot számlál. Mivel J tagja C_1-nek is és C_2-nek is, ezért $C_1 = \{J\} = C_2$. Legyenek most y_1 és y_2 tetszőleges lókötők. Ekkor $y_1 \notin C_1$ és $y_2 \notin C_2$, azaz y_1: „$y_2 \in C_2$" és y_2: „$y_1 \in C_1$", vagyis $y_1 = y_2$, amiből $|Y| = 1$ következik. Így ebben az esetben szükséges az alábbi feltétel.

F_3: Van olyan klubja a szigetnek, amelynek tagságát egyetlen lovag alkotja. A szigeten egyetlen lókötő él.

Az F_3 feltétel elégséges is, azaz $F_3 \Rightarrow \neg GG_2$. Legyen ui. C_1 és C_2 a feltételben szereplő $\{J\}$ klub, ahol J lovag. Ezzel tetszőleges A, $B \in \overline{\{J\}}$ mellett ha A: „$B \in C_1$" és B: „$A \in C_2$", akkor $B \notin C_1$ és $A \notin C_2$ alapján A és B lókötők; de összesen csak egy lókötő van a szigeten, vagyis $A = B$. Ha pedig pl. $B = J$, akkor A: „$J \in C_1$" és J: „$A \in C_2$" esetén $A \in C_2$ (hiszen J lovag), azaz $A = J$, $A = B$.

*

Kis kitérő következik. Érdemes összehasonlítanunk az F_2 és F_3 feltételeket, ill. az $F_2 \Rightarrow \neg GG_2$ és $F_3 \Rightarrow \neg GG_2$ relációk bizonyítását; ezek bizonyos értelemben egymás duálisának tekinthetők. A szép szimmetriát meg is tudjuk magyarázni, ha bevezetünk egy új fogalmat.

Tegyük fel, hogy **S** szigetünkön mindenkinek van személyi igazolványa, amely tartalmazza, hogy az illető lovag-e vagy lókötő, továbbá minden klubhoz tartozik egy rovat, ami azt jelzi, hogy az illető annak a klubnak tagja-e vagy sem. (Az adatok hitelességét szavatolja az a tény, hogy az igazolványt kizárólag lovag hivatalnokok tölthetik ki.) Mármost képzeljük el, hogy egy teliholdas éjszakán mindenkinek ellopjuk a személyi igazolványát, és pontosan az ellenkezőjére változtatjuk benne az adatokat. Varázslatunk annyira hatásos, hogy a lovagok valóban lókötőkké, a lókötők valóban lovagokká válnak. Ezzel lényegében egy új, $\mathbf{S}'$ szigetet hoztunk létre, új klubokkal. Az $\mathbf{S}'$ szigetet — az őt létrehozó $f\colon \mathbf{S} \to \mathbf{S}'$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetéssel — az **S** duálisának hívjuk. (Az $f\colon \mathbf{S} \to \mathbf{S}'$ írásmód arra utal, hogy az f az **S** minden lakójához, ill. klubjához az $\mathbf{S}'$ egy-egy lakóját, ill. klubját rendeli.) Az f két lényeges tulajdonsága — amely lényegében már meghatározza őt — az „igazmondás-" és a „klubtagság-váltás". Most már azt is nyugodtan elképzelhetjük, hogy az $\mathbf{S}'$ sziget a Föld másik oldalán van, mint az **S**. Az is látható, hogy az $\mathbf{S}'$ duálisa lényegében* az eredeti **S** sziget. Számunkra különösen fontos a következő észrevétel (az **S**-beli X lakos, ill. C klub f-képét X'-vel, ill. C'-vel jelöljük):

Ha A és B az **S** lakosai és C az **S** klubja, akkor A: „$B \in C$" $\Leftrightarrow$ A': „$B' \in C'$". Ez ui. azt jelenti, hogy egy szigeten és a duálisán a G és a GG_i ($i = 0, 1, 2, 3$) feltételek közül ugyanazok teljesülnek. Most már érthető, hogy F_2-t és F_3-t miért tekintettük egymás duálisának: **S**-en F_2 pontosan akkor igaz, ha $\mathbf{S}'$-n F_3 fennáll, és fordítva. F_1 duálisa például így néz ki:

F_1': *Az üres halmaz klub. A szigeten egyetlen lókötő él.*

Ez a feltétel azért maradt ki (és fog kimaradni) a többi közül, mert kizártuk azt a szemlélettel ellenkező lehetőséget, hogy egy klubnak egyetlen tagja se legyen.

*

A kitérőt lezárva tovább boncolgatjuk a $\neg GG_2$ feltételt.

1.2. eset, amikor C_1 és C_2 valamelyike — mondjuk C_1 — csupa lókötőből áll. Ha $A \in \overline{C_2}$ és $y \in C_1$, akkor y lókötő, tehát y: „$A \in C_2$", vagyis $y \neq A$ esetén, $\neg GG_2$ miatt, A: „$y \notin C_1$", azaz A lókötő. Azt kaptuk, hogy $y = A$ vagy A lókötő, vagyis A mindenképpen lókötő. Így $\overline{C_2}$ csupa lókötőből áll, más szóval az összes lovag C_2-ben van. Legyen most x tetszőleges lovag, ekkor $x \notin C_1$. Tegyük fel, hogy C_2-ben van

* Két szigetet akkor tekintünk lényegében azonosnak, ha az egyik sziget lakosait és klubjait „át tudjuk nevezni" úgy, hogy a másik sziget lakóihoz és klubjaihoz jussunk.

y lókötő. Ekkor $x \neq y$, továbbá x: „$y \in C_2$" és y: „$x \in C_1$", ami ellentmondás. Tehát C_2-ben nincs lókötő: C_2 éppen a lovagok halmaza. Tegyük fel, hogy C_1-en kívül van y_1 lókötő, és jelöljön y_2 tetszőleges C_1-beli klubtagot: ekkor y_2 is lókötő ($C_1 \subseteq Y$ miatt), és különbözik y_1-től. Nyilván $y_2 \notin C_2$, tehát y_1: „$y_2 \in C_2$" és y_2: „$y_1 \in C_1$", ami ismét ellentmondás. Ezek szerint az összes lókötő C_1-ben van, de C_1 minden tagja lókötő, tehát C_1 éppen a lókötők halmaza. Mindezek alapján teljesül, hogy

F_4: A lovagok klubot alkotnak. A lókötők klubot alkotnak.

A feltétel elégséges is $\neg GG_2$-höz. Ha ui. fennáll F_4, akkor a GG_2 feltételben válasszuk C_1-et X-nek, C_2-t Y-nak. Most tetszőleges A és B szigetlakók esetén A: „$B \in C_1$" ($\Leftrightarrow$ A: „B lovag") és B: „$A \in C_2$" ($\Leftrightarrow$ B: „A lókötő") egyszerre nem lehetséges.

(*Megjegyzések*: 1. Az F_4 duálisa önmaga.
2. Az $F_4 \Rightarrow \neg GG_2$ reláció kontraponált, vele ekvivalens, $GG_2 \Rightarrow \neg F_4$ változatát Smullyan könyvében is megtalálhatjuk — 238. oldal, 267b. feladat.)

Az eddigieket összefoglalva:

$$\neg GG_2 \Leftrightarrow F_1 \vee F_2 \vee F_3 \vee F_4, \quad \text{azaz} \quad GG_2 \Leftrightarrow \neg F_1 \wedge \neg F_2 \wedge \neg F_3 \wedge \neg F_4.$$

Ezen a ponton mindenki fellélegezhet: a nehezén — a GG_2 vizsgálatán — túl vagyunk.

2. Tegyük fel ezután, hogy szigetünkön nem csak $\neg GG_2$, hanem $\neg GG_3$ is teljesül, azaz vannak olyan *különböző* C_1 és C_2 klubok, hogy tetszőleges két *különböző* A és B lakos esetén A: „$B \notin C_1$" vagy B: „$A \notin C_2$".

2.1. eset, amikor C_1-ben is és C_2-ben is van lovag. Ekkor — a $\neg GG_2$ vizsgálata során kapott eredmények szerint —

$$(2) \qquad \begin{aligned} &C_1 = S \quad \text{vagy} \quad C_2 = S, \quad \text{vagy} \\ &\overline{C_1} = \overline{C_2} \ (= \{K\}, \quad \text{ahol } K \text{ valamelyik lókötő}), \text{ vagy} \\ &C_1 = C_2 \ (= \{J\}, \quad \text{ahol } J \text{ valamelyik lovag}). \end{aligned}$$

Mivel feltételeink szerint most $C_1 \neq C_2$, ezért $\overline{C_1} \neq \overline{C_2}$ is, tehát (2) biztosan teljesül. Legyen pl. $C_1 = S \neq C_2$. Az is igaz továbbá, hogy J, a sziget egyetlen lovagja, tagja C_2-nek is. Tehát szükséges az alábbi.

F_1^*: A sziget lakói klubot alkotnak. Ezen a klubon kívül van még legalább egy olyan klub, amelynek tagja a sziget egyetlen lovagja.

Az F_1^* feltétel elégséges is ($\neg GG_3$ teljesüléséhez). Legyen ui. J a sziget egyetlen lovagja, $C_1 = S$ és $C_2 \neq S$ klubok, ahol J tagja C_2-nek. Legyenek A és B olyan lakosok, hogy A: „$B \in C_1$" és B: „$A \in C_2$". Ekkor $B \in C_1$ miatt A lovag: $A = J$. Így B állítása is igaz, mert $J \in C_2$ valóban fennáll, tehát B is lovag, $B = J = A$. (Jegyezzük meg, hogy $F_1^* \Rightarrow F_1$.)

2.2. eset, amikor C_1 és C_2 valamelyike — mondjuk C_1 — csupa lókötőből áll. Ekkor az **1.2.** eset eredményei alapján fennáll az F_4 feltétel, ami elégséges is. (Az $F_4 \Rightarrow \neg GG_2$ bizonyítása azért alkalmas $F_4 \Rightarrow \neg GG_3$ igazolására is, mert C_1-et X-nek, C_2-t Y-nak választottuk, ezek pedig különbözőek.)

Összefoglalva:

$$\neg GG_3 \Leftrightarrow F_1^* \vee F_4, \quad \text{azaz} \quad GG_3 \Leftrightarrow \neg F_1^* \wedge \neg F_4.$$

3. Tegyük fel most, hogy szigetünkön $\neg GG_0$ is teljesül, azaz vannak olyan C_1 és C_2 klubok, hogy tetszőleges A és B lakosok esetén A: „$B \notin C_1$" vagy B: „$A \notin C_2$".

3.1. eset, amikor C_1-ben van x_1 és C_2-ben van x_2 lovag. Ezekkel x_1: „$x_2 \in C_2$" és x_2: „$x_1 \in C_1$", ami ellentmondás.

3.2. eset, amikor C_1 és C_2 valamelyike — mondjuk C_1 — csupa lókötőből áll. Ilyenkor az 1.2. esetbeli gondolatmenettel adódik, hogy fennáll az F_4 feltétel, ami elégséges is. (Az $F_4 \Rightarrow \neg GG_2$ bizonyítása alkalmas $F_4 \Rightarrow \neg GG_0$ igazolására is, hiszen ott nem használtuk ki A és B különböző voltát.)

Összefoglalva:

$$\neg GG_0 \Leftrightarrow F_4, \quad \text{vagyis} \quad GG_0 \Leftrightarrow \neg F_4.$$

4. Végül tegyük fel, hogy a szigeten $\neg GG_1$ is teljesül, azaz vannak olyan *különböző* C_1 és C_2 klubok, hogy tetszőleges A és B lakosok esetén A: „$B \notin C_1$" vagy B: „$A \notin C_2$". Ekkor a $\neg GG_0$-ra vonatkozó eredmény szerint teljesül F_4, ami elégséges is, hiszen ismét megfelel $C_1 = X$, $C_2 = Y$. Tehát

$$GG_1 \Leftrightarrow \neg F_4,$$

így az előbbi eredményünk szerint

$$GG_0 \Leftrightarrow GG_1.$$

A GG_0 és a GG_1 feltételt együttesen jelölhetjük GG_{01}-gyel. Vagyis

$$GG_2 \Rightarrow GG_3 \Rightarrow GG_{01}. \tag{3}$$

5. Most pedig lássuk az egyszeresen gödeli G feltételt. Tegyük fel, hogy szigetünkön $\neg G$, azaz van olyan C klub, hogy tetszőleges A szigetlakó esetén A: „$A \notin C$". Ekkor $A \notin C \Leftrightarrow A$ lovag, azaz $A \in C \Leftrightarrow A$ lókötő, tehát C éppen a lókötők halmaza. Igaz ezért, hogy

F: A lókötők klubot alkotnak.

A gondolatmenetet megfordítva a $C = Y$ választással adódik, hogy az F feltétel elégséges is. Így

$$\neg G \Leftrightarrow F, \quad \text{azaz} \quad G \Leftrightarrow \neg F.$$

(Ez az eredmény szerepel Smullyan könyvében a 232—233 oldalakon, a 264b. feladat második részeként.) Vegyük észre, hogy $F_4 \Rightarrow F$, vagyis $G \Leftrightarrow \neg F \Rightarrow \neg F_4 \Leftrightarrow GG_{01}$, tehát (3) felhasználásával

$$GG_2 \Rightarrow GG_3 \Rightarrow GG_{01} \Leftarrow G. \tag{4}$$

A dolgozat elején idéztük, hogy Smullyan igen valószínűtlennek találja, hogy a $G \Rightarrow GG$ következtetést bárki is igazolni tudja. Ennek alapján feltételezhető, hogy könyvének írásakor a GG feltétel esetében a GG_2 vagy a GG_3 feltételre gondolt. Mint később kiderül, a (4) reláción kívül több következtetést nem tudunk felállítani a G és a GG_i feltételek között, tehát a GG_2 és a GG_3 feltétel között sem tudunk majd dönteni. Józan paraszti ésszel gondolkodva azonban valószínű, hogy a GG_3 feltétel az „igazi".

A (4) miatt a szigeteknek 7 típusát különíthetjük el aszerint, hogy a G és a GG_i feltételek közül melyik teljesül. A típusokat az áttekinthetőség kedvéért táblázatba rendezve soroljuk fel. Ha mindazokat a szigeteket, amelyeken csak egy lovag és csak egy lókötő él, besoroljuk az 1—7 típusok valamelyikébe, akkor azt találjuk, hogy a 6-os kivételével mindegyik típus bemutatható egy-egy kétlakosú szigettel. A 6-os típusba csak olyan sziget tartozhat, amelyen egyetlenegy lovag él. Háromlakosú, 6-os típusú sziget már létezik; ezen $|X| = 1$, $|Y| = 2$.

	G	GG_{01}	GG_2	GG_3	példa
1	+	+	+	+	$x \quad y$
2	–	+	+	+	$x \quad y$
3	+	+	–	+	$x \quad y \; ; \; x \quad y$
4	–	+	–	+	$x \quad y$
5	+	+	–	–	$x \quad y$
6	–	+	–	–	$x \quad y_1 \quad y_2$
7	–	–	–	–	$x \quad y \; ; \; x \quad y$

Harcos Gergely

Az 1992. évi Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny feladatai

I. forduló

Kezdők (legfeljebb I. osztályosok)

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$3\,||x+1|-2|-3 = x+1.$$

2. Az $ABCD$ négyzet mindegyik oldalára befelé egyenlő szárú háromszöget rajzolunk. Ezeknek a háromszögeknek a harmadik (X, Y, Z, U) csúcsnál levő szöge $150°$. Bizonyítsa be, hogy a négy háromszög területének összege egyenlő az $XYZU$ négyszög területével.

3. Egy háromszög oldalainak hossza egész számokkal adható meg. Egyik oldala a másik két oldal szorzatának felével azonos hosszúságú. Kerülete 18 hosszúságegység. Mekkorák a háromszög oldalai?

4. Antal, Béla és Cili elhatározzák, hogy megoldják egy példatár összes feladatát. Antal a darab feladatot, Béla b darab feladatot és Cili c darab feladatot old meg naponta és minden feladattal csak egyikük foglalkozik. Ha naponta Antal tizenegyszer, Béla hétszer és Cili kilencszer több feladatot oldana meg, akkor öt nap alatt, ha naponta Antal négyszer, Béla kétszer és Cili háromszor több feladatot oldana meg, akkor tizenhat nap alatt fejeznék be munkájukat. Hány nap alatt oldják meg az összes feladatot?

5. Az ABC háromszög A-nál, illetve B-nél levő szöge rendre $20°$ és $40°$. A C csúcsnál levő szög belső szögfelező egyenesén vegyük fel az E pontot úgy, hogy $AB = BE$ teljesüljön. Mekkorák az ABE háromszög szögei?