M: kompakt d-dim. Riemann-sokaság

1

	klasszikus mechanika	kvantummechanika
fázistér	SM	$L^2(M)$
mozgó pont	$f: \mathbb{R} \to SM$ sima	$\psi: \mathbb{R} \to L^2(M)$ $\lVert\psi\rVert = 1$
megfigyelhető mennyiség	$a: SM \to \mathbb{R}$ sima	$Op(a): L^2(M) \to L^2(M)$ önadjungált (pozitív, ha $a \geq 0$)
energia	$(x,\xi) \mapsto \lvert\xi\rvert$	$\psi \mapsto \sqrt{\Delta}\,\psi$
geodetikus folyam	$G^t: SM \to SM$	$e^{-it\sqrt{\Delta}}: L^2(M) \to L^2(M)$

Schrödinger: $\frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{\Delta}\,\psi \Rightarrow \psi(t) = \sum_j c_j e^{-it\sqrt{\lambda_j}} \phi_j$,

ahol $\{\phi_j\}$ az $L^2(M)$ egy ortonormált

Δ-sajátbázisa, $\Delta\phi_j = \lambda_j \phi_j$

Def. $\nu_j(a) := \langle Op(a)\phi_j, \phi_j \rangle$

Weyl $\nu_j(a) \xrightarrow{\text{Cesàro}} \nu(a)$, ahol $\nu(a) := \int_{SM} a$

az a integrálja a normalizált Liouville-mértékre

nézve.

<u>Biz</u>. $N(\lambda) := \sum_{\lambda_j \le \lambda} 1 \sim \frac{B_d}{(2\pi)^d} \mathrm{vol}(M)\, \lambda^{d/2}$

$$\sum_{\lambda_j \le \lambda} \nu_j(a) \sim \frac{B_d}{(2\pi)^d} \mathrm{vol}(M)\, \nu(a)\, \lambda^{d/2}$$

$$\frac{1}{N(\lambda)} \sum_{\lambda_j \le \lambda} \nu_j(a) \to \nu(a) . \square$$

<u>Egorov</u> Ha t fix, akkor

$$\mathrm{Op}(a \circ G^t) = e^{it\sqrt{\Delta}}\, \mathrm{Op}(a)\, e^{-it\sqrt{\Delta}} + \text{"kicsi"}$$

<u>Köv</u> $\nu_j(a \circ G^t) = \nu_j(a) + o(1)$

<u>Köv</u> Ha $a^T := \frac{1}{T} \int_0^T a \circ G^t \, dt$ és T fix,

akkor $\nu_j(a^T) = \nu_j(a) + o(1)$.

<u>Kvantum ergodicitás</u> Ha G^t ergodikus, akkor $\nu_j(a) \to \nu(a)$ majdnem minden j-re.

<u>Biz</u>. $\limsup \frac{1}{N(\lambda)} \sum_{\lambda_j \le \lambda} |\nu_j(a) - \nu(a)|^2$

$$= \limsup \frac{1}{N(\lambda)} \sum_{\lambda_j \le \lambda} |\nu_j(a^T - \nu(a))|^2$$

Cauchy-Schwarz

$$\le \limsup \frac{1}{N(\lambda)} \sum_{\lambda_j \le \lambda} \nu_j(|a^T - \nu(a)|^2)$$

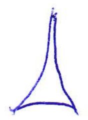
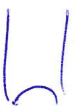
$$\overset{\text{Weyl}}{=} \nu\left(|a^T - \nu(a)|^2\right) = o(1), \text{ ha } T \to \infty.$$

$$\Downarrow \quad \frac{1}{N(\lambda)} \sum_{\lambda_j \le \lambda} |\nu_j(a) - \nu(a)|^2 = o(1). \quad \square$$

QUE sejtés (Rudnick–Sarnak) Ha M negatív görbületű, akkor $\nu_j(a) \to \nu(a)$ minden j-re.

Hassell–Hillairet Nem elég feltenni, hogy M nempozitív görbületű és G^t ergodikus.

Anantharaman Ha G^t Anosov, akkor a ν_j mértékek minden torlódási pontjának (gyenge limeszben értve) pozitív az entrópiája.

Moduláris felület Hiperbolikus háromszög konstans -1 görbülettel, $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 0)$ szögekkel, majd a határ bizonyos pontpárjainak azonosításával: , felső félsíkon  $\cong SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$

$SM \cong SL_2(\mathbb{Z})\backslash SL_2(\mathbb{R})$

- klasszifikálja az $\mathbb{R}^2$ rácsait forgatva-nyújtás erejéig

M: kompakt irányítható Riemann-sokaság

$\{\phi_j\}$: az $L^2(M)$ egy ortonormált Δ-sajátbázis,

$$\Delta\phi_j = \lambda_j \phi_j , \quad 0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

<u>Def.</u> $a: SM \to \mathbb{C}$ sima fv-re

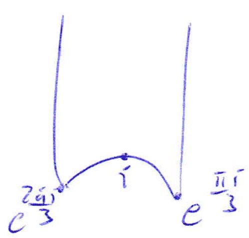
$$\nu_j(a) := \langle Op(a)\phi_j , \phi_j \rangle = \int_{SM} a \, d\omega_j \quad , \text{ illetve}$$

<u>Def.</u> $$\nu(a) := \int_{SM} a \, d\omega .$$

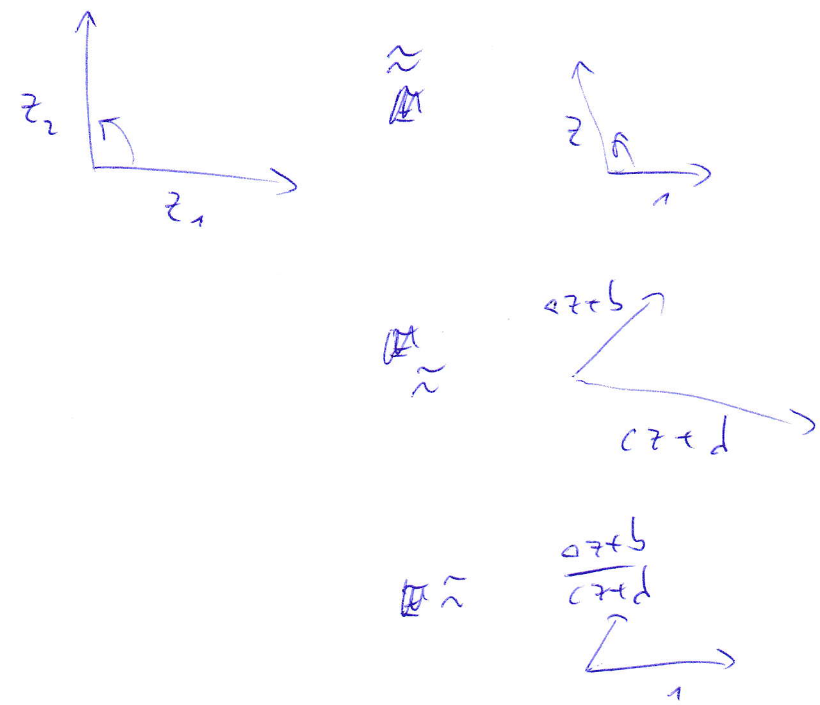
<u>QE-tétel</u> Ha G^t ergodikus, akkor $\nu(a)=0$ esetén

$$\sum_{\lambda_j \leq \lambda} |\nu_j(a)|^2 = o(N(\lambda))$$

<u>QUE-sejtés</u> Ha M negatív görbületű, akkor $\nu(a)=0$ esetén $\nu_j(a) = o(1)$.

<u>Moduláris felület</u> $M =$ 

- Modulus tér, mert klasszifikálja $\mathbb{C}$ rácsait forgatva nyújtás erejéig:



$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$

- $M \cong SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H} \cong SL_2(\mathbb{Z}) \backslash SL_2(\mathbb{R}) / SO_2(\mathbb{R})$

$SM \cong SL_2(\mathbb{Z}) \backslash SL_2(\mathbb{R})$

$SM \twoheadrightarrow M \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{1/2} & \\ & y^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mapsto x+iy$

$G^t \quad : \quad SL_2(\mathbb{Z})\, g \mapsto SL_2(\mathbb{Z})\, g \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & \\ & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$

- Hecke-operátor mint átlagolás az n indexű rácsok felett: $(T_n\phi)(z) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{ad=n} \sum_{b \bmod d} \phi\left(\frac{az+b}{d}\right)$

- $L^2(M) = \mathbb{C}_m \oplus L^2_{\text{csúcsos}}(M) \oplus L^2_{\text{Eisenstein}}(M)$

A csúcsos altérnek van Hecke–Maass formákból álló bázisa: $\Delta\phi_j = \lambda_j \phi_j$, $T_n\phi_j = \lambda_j(n)\phi_j$

Selberg igazolta, hogy a "Weyl law" itt is igaz: $N(\lambda) \sim \frac{\lambda}{12}$.

- Hasonló, de bonyolultabb leírás $L^2(S\Gamma)$-ra, pl. ϕ_j-ből lesznek $\phi_{j,k}$ $(k \in \mathbb{Z})$ formák
- $d\omega_j = \left(\phi_{j,0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\phi_{j,k}} \right) d\omega$

→ előzmény: Luo–Sarnak (1995), Jakobson (1997), Luo–Sarnak (2004), Zhao (2010)

Sarnak–Zhao: Ha $a_1, a_2 : S\Gamma \to \mathbb{C}$ kellően sima, továbbá $\nu(a_1) = \nu(a_2) = 0$, akkor

$$\sum_{\lambda_j \le \lambda} \nu_j(a_1)\overline{\nu_j(a_2)} \sim Q(a_1, a_2)\sqrt{\lambda}.$$

Itt $Q(a_1, a_2)$ egy hermitikus forma, ami nem azonosan nulla (de nem is teljesen az, amit a fizikusok vártak).

Watson–Ichino: Ha $a : S\Gamma \to \mathbb{C}$ minimális súlyú csúcsforma, akkor $|\nu_j(a)|^2$ enyhe faktoroktól eltekintve $\Lambda(\frac{1}{2}, a \otimes \phi_j \otimes \phi_j)$, ami miatt

$$GRH \Rightarrow \nu_j(a) \ll_\varepsilon \lambda_j^{-\frac{1}{4}+\varepsilon}.$$

Lindenstrauss – Soundararajan Ha $a \in C_0^\infty(SM)$ (10)

és $\nu(a) = 0$, akkor $\nu_j(a) = o(1)$.

"Biz." Legyen $\tilde{\nu}$ a ν_j-k egy torlódási pontja

- **Bourgain–Lindenstrauss**: $\tilde{\nu}$ majdnem minden ergodikus komponensének entrópiája legalább $\frac{2}{9}$.

- **Lindenstrauss**: $\tilde{\nu}$ Hecke-rekurrens, és persze G^t-invariáns, amiért $\tilde{\nu} = c\nu$, ahol $0 \leq c \leq 1$.

- **Soundararajan**: $\displaystyle\int_{\substack{|x| \leq \frac{1}{2} \\ y \geq T}} |\phi_j(x+iy)|^2 \frac{dx\,dy}{y^2} \ll \frac{\log T}{\sqrt{T}}$
(ha $T > 2$) $\qquad$ ($\ll$: ftlen a j-től)

Így minden $\varepsilon > 0$ esetén van $M_\varepsilon \subset M$, hogy $\nu_j(M_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$, amiért $\tilde{\nu}(M_\varepsilon) \geq 1-\varepsilon$, tehát $c \geq 1-\varepsilon$. Így $c = 1$.